# Tema 5. Producte escalar

Algebra i Geometria. EETAC

S.C. López. Matemàtica Aplicada IV. UPC

# Índex

# Introducció

# Índex

# Definició. Exemples

Sigui $E$ un $\mathbb{R}$-ev. Una aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, és un *producte escalar* si compleix:

- $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$, i
- $\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \beta_1 \langle u, v_1 \rangle + \beta_2 \langle u, v_2 \rangle$ (és bilineal)
- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (és simètrica)
- $\langle u, u \rangle \geq 0$. A més, $\langle u, u \rangle = 0$ si i només si, $u = 0$ (és definida positiva).

Altres símbols per respresentar $\langle u, v \rangle$ són $u \circ v$, o $\Phi(u, v)$.

Un $\mathbb{R}$-ev amb producte escalar s'anomena *espai euclidià*

**Exemples**

1. En $\mathbb{R}^n$, el producte escalar habitual:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

# Més exemples

2. En $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$:
$$\langle A, B\rangle = Tr(B^T A).$$
3. En $\mathcal{C}^0([a, b]$:
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$
También, $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)p(t)dt$, on $p(t)$ és una funció continua, estrictament positiva.
4. En $\mathbb{R}_n[x]$, fixats $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$,
$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} p(\alpha_i)q(\alpha_i).$$

# Índex

# Desigualtat de Cauchy-Schwarz

**Lemma** Sigui $E$ un espai euclidià amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Aleshores,

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle.$$

**dem.** Si $v = 0$, cert. Suposem $v \neq 0$. Considerem $k = \langle u, v\rangle / \langle v, v\rangle$ i $0 \leq \langle u - kv, u - kv\rangle \ldots .$

**Aplicació** Suposem $u, v \neq 0$. Com $|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$, obtenim

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}} \leq 1,$$

per tant, existeix $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos \alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}}$. Direm $\alpha = \mathrm{ang}(u, v)$ és *l'angle* entre $u$ i $v$.

# Índex

# Norma associada al producte escalar

Sigui $E$ un espai euclidià amb producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La *norma associada al prod. escalar* és $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Compleix:

- $\|u\| \geq 0$. A més, $\|u\| = 0$ si i només si, $u = 0$.
- $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular).

**Algunes fórmules**

1. Si $\|u\| = \|v\|$, aleshores $\langle u + v, u - v\rangle = 0$.
2. Llei del paral·lelogram: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
3. Fórmules de polarització:
   (i)$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$
   (ii)$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$.
4. Teorema de Pitàgores: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, si $\langle u, v\rangle = 0$.

# Índex

# Distància associada al producte escalar

Sigui $E$ un espai euclidià amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La *distància associada al prod. escalar* és
$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$. Compleix:

- $d(u, v) \geq 0$. A més, $d(u, v) = 0$ si i només si, $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (desigualtat triangular).

**Vocabulari** Sigui $E$ un espai euclidià amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Si $\|u\| = 1$ és un vector *unitari*. S'anomena *normalitzat* de $u$ al vector $u/\|u\|$ (unitari).
2. Dos vectors $u$ i $v$ són *ortogonals* si $\langle u, v \rangle = 0$.

**Proposició** Un conjunt de vectors $S$, ortogonals dos a dos, és un conjunt lin. independent.

# Bases ortogonals i bases ortonormals

Sigui $E$ un espai euclidià amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$
Una *base ortogonal* de $E$ és una base de $E$ formada per vectors ortogonals dos a dos. Una *base ortonormal* de $E$ és una base ortogonal formada per vectors unitaris.

**Observació** Si $B = \{u_i\}_{i=1}^{n}$ és una base ortog. de $E$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ aleshores,

$$\alpha_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} (\text{ s'anomenen coeficients de Fourier}).$$

**Exemples**

1. En $\mathbb{R}^n$, el producte escalar habitual: $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, la base canònica és una base ortonormal
2. En $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$: $\langle A, B \rangle = Tr(B^T A)$, la base $\{E_{ij} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) : \ i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2\}$, on $E_{ij}$ té tots els elements zero, excepte el que està a la columna $i$, fila $j$ que és 1, és una base ortonormal.

# Índex

# Mètode de Gram-Schmidt

3. En $\mathcal{C}^0([-\pi,\pi]$: $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$, $\{1, \cos(kt), \sin(kt)\}_{k\in\mathbb{N}}$ és un conjunt ortogonal.

**Proposició** Tot espai euclidià de dimensió finita té almenys una base ortogonal i una base ortonormal.

**Mètode de Gram-Schmidt** Sigui $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base d'un espai euclidià $E$. Construïm una base ortogonal $\{u_i\}_{i=1}^n$ tal que, en cada pas, el sv generat pels vectors $\{e_i\}_{i=1}^r$, coincideix amb el sv generat per $\{u_i\}_{i=1}^r$. Finalment, considerem $\{u_i/\|u_i\|\}_{i=1}^n$.

# Mètode de Gram-Schmidt

1. Considerem $u_1 = e_1$.
2. Suposem construïts $u_1, \ldots, u_r$, amb $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ i $\{u_i\}_{i=1}^{r}$ un conjunt ortogonal.
3. Construïm el nou vector $u_{r+1}$:

$$u_{r+1} = e_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i,$$

on $\alpha_i$ és una constant que determinem imposant $u_{r+1}$ sigui ortogonal a $u_i$. És a dir,

$$\langle u_{r+1}, u_i \rangle = 0 \leftrightarrow \alpha_i = \frac{\langle e_{r+1}, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}, \forall i = 1, \ldots, r.$$

**Exemple**

Construïu una base ortonormal del sv de $\mathbb{R}^3$, amb el producte escalar habitual, definit per $F = \langle (1,-1,1),(1,1,1)\rangle$.
Per evitar confusions, denotem amb $\circ$ el producte escalar habitual.

1. Considerem $u_1 = (1,-1,1)$
2. $u_2 = (1,1,1) - \alpha(1,-1,1)$, on
   $\alpha = ((1,1,1)\circ(1,-1,1))/((1,-1,1)\circ(1,-1,0)) = 1/3$.
   D'aquí,
   $u_2 = (1,1,1) - (1,-1,1)/3 = (2/3,4/3,2,3) = 2(1,2,1)/3$.
   De fet, posem considerar $u_2 = (1,2,1)$.
3. Com $\|u_1\| = \sqrt{3}$ i $\|u_2\| = \sqrt{6}$, obtenim que $\{u_1,u_2\}$ és una base ortogonal i $\{u_1' = \sqrt{3}/3(1,-1,1), u_2' = \sqrt{6}/6(1,2,1)\}$ és una base ortonormal de $F$.

**Exercici**

Construïu una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ respecte el producte escalar: $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(2)q(2)$. (Suggerència: considereu la base de $\mathbb{R}_2[x]$, $\{1, x, x^2\}$.)

# Índex

# Matriu associada a un producte escalar

Sigui $E$ un espai euclidià amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considerem $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de $E$.

**Lema**

- $B = (b_{ij})$, on $b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ determina $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ja que si $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ i $v = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ aleshores,

$$\langle u, v \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) B (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \leftrightarrow \langle u, v \rangle = u^T B v.$$

**Proposició** (Criteri de Sylvester) Sigui $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, l'aplicació

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) B (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$$

és un producte escalar, si i només si, $B^T = B$ i, si designem per $B_r$ la submatriu de $B$ determinada per les primeres $r$-files i $r$-columnes, aleshores, $\det B_r > 0$, per a tot $r = 1, \dots, n$.

# Índex

# Subespais ortogonals

Sigui $E$ un espai euclidià amb producte escalar $\cdot \circ \cdot$. Considerem un subconjunt $S \subset E$. Denotem $S^\perp = \{v \in E : \ u \circ v = 0\}$.

**Propietats**

1. $S^\perp$ és un $\mathbb{R}$-sv de $E$.
2. Si $S \subset R$ aleshores $R^\perp \subset S^\perp$.
3. $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$
4. $S \cap S^\perp = 0$.
5. $S \subset (S^\perp)^\perp$.

**Proposició** Si $F$ és un $\mathbb{R}$-sv de $E$, aleshores

1. $E = F \oplus F^\perp$.
2. $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.
3. $F^{\perp\perp} = F$ (el complement ortogonal és únic).

# Índex

# Projecció ortogonal. Aproximació òptima

Sigui $E$ un espai euclidià. $F$ un $\mathbb{R}$-sv. La *projecció ortogonal de v sobre F* és:

$$\mathrm{proj}(v, F) = v_1 \in F \text{ tal que } v - v_1 \in F^{\perp}.$$

**Propietats**

1. Si $v \in F$ aleshores $v =$proj$(v, F)$.
2. proj$(v, F) = 0$ si i només si $v \in F^{\perp}$.
3. La proj$(v, F)$ és única.

Denotem com a $d(v, F) = \min_{u \in F} d(v, u)$, on $d(\cdot, \cdot)$ és la distància associada al prod. escalar.

4. $d(v, F) = d(v, v_1)$, on $v_1 =$proj$(v, F)$.
5. $d(v, F) = \|v - v_1\|$.

# Component d'un vector respecte un altre vector

Sigui $E$ un espai euclidià amb producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $w \in E$.
Per a tot $v \in E$, denotem $\mathrm{proj}(v,w) = \mathrm{proj}(v,\langle w\rangle)$. Aleshores,

$$\mathrm{proj}(v,w) = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} w.$$

El coeficient $\langle v,w\rangle/\langle w,w\rangle$ s'anomena la *component de $v$ respecte de $w$*.

**Propietat** Les coordenades d'un vector $v$ respecte una base ortogonal són les seves components.

# Angle entre un vector i un subespai

L'angle entre un vector $v$ i un subespai $F$ d'un espai euclidià $E$ és l'angle entre el vector i la seva projecció ortogonal sobre el subespai.
Si $v_1 = proj(v, F)$ aleshores $v - v_1 \in F^{\perp}$. D'aquí, si denotem com a $\alpha = \text{ang}(v, v_1)$, obtenim:

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v\|\|v_1\|} = \frac{\langle v_1, v_1\rangle}{\|v\|\|v_1\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$