Tema 5. Equacions Diferencials.

Algebra i Geometria. EETAC

S.C. López. Matemàtica Aplicada IV. UPC

Índex

Introducció

Una equació diferencial és qualsevol expressió on intervé:

- una variable dependent o funció,
- unes variables independents i
- les derivades parcials de la funció respecte una o més variables independents.

Moltes lleis de la física troben la seva expressió matemàtica en el llenguatge de les equacions diferencials.

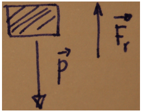
Exemples

1. L'equació que regula l'espai recorregut per un cos que cau.
2. L'equació que regula el corrent elèctric en un circuit senzill.
3. L'equació del calor.

Exemples

1. La força que actúa sobre un cos que cau ($F = ma$) és la resultant de dues forces oposades:

   - el seu pes, $P = mg$, i
   - la força de fregament, $F_r = kv$.



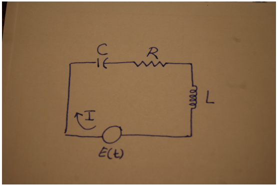
A partir de $F = P - F_r$ obtenim:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt},$$

on la funció és $y = y(t)$ (l'espai recorregut en funció del temps).

2. L'equació diferencial que representa un circuit elèctric senzill en sèrie:

- E és el voltatge aplicat,
- R la resistència i la caiguda del voltatge: $E_R = RI$ (Llei de Ohm),
- L la inductància de la bobina i la caiguda del voltatge: $E_L = LdI/dt$,
- C capacitància del capacitor i la caiguda del voltatge: $E_C = 1/CQ$.



Per la segona llei de Kirchoff, com $I = dQ/dt$:

$$E = R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q.$$

3. Suposem una barra d'extrems aïllats (no passa calor a través dels extrems). La temperatura en cada punt de la barra, depèn de la distància als extrems i del temps, $u = u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

   on c és certa constant que depèn del material de la barra.

Definició Una equació diferencial ordinària (e.d.o.) és tota expressió de la forma:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \text{ on, } y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}.$$

L'ordre de l'e.d.o. és el més gran dels ordres de les derivades que hi surten.

Índex

Equacions diferencials de primer ordre

Estudiem e.d.o. del tipus $F(x, y, y') = 0$. De vegades es podrà obtenir, la seva forma normal:

$$y' = f(x, y).$$

S'anomena solució de l'e.d.o. en un interval I, a tota funció $y = \phi(x)$ que compleix:

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)),\ \forall x \in I.$$

Exemples

1. $y = e^{3x}$ és una solució de l'e.d.o. $y' = 3y$. Però també, $y = Ce^{3x}$, on C és qualsevol constant. En tots els casos, $I = \mathbb{R}$.
2. $y = Ce^{x} - x - 1$ és una solució de l'e.d.o. $y' = y + x$, amb $I = \mathbb{R}$.

3. La família de paràboles $y = Cx^2$, (C constant) es pot descriure com les corbes que compleixen l'e.d.o.

$$y' = 2y/x.$$

Ja que, derivant respecte x, obtenim:

$$y' = 2Cx.$$

Aillant C i substituint en l'equació $y = Cx^2$ obtenim l'e.d.o. *Les corbes tals que en cada punt, el pendent de la recta tangent és dues vegades el pendent del vector posició.*

Observació Aquest darrer procés ens permetrà obtenir l'e.d.o. d'una família de corbes que depèn d'un paràmetre.

Existència de solucions: Problema del valor inicial

Teorema Donada l'e.d.o.:

$$y' = f(x, y),$$

amb $f, \partial f/\partial y \in \mathcal{C}^0(R)$, on $(x, y) \in R$ si $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$, aleshores, existeix una única solució $y = \phi(x)$ tal que $\phi(x_0) = y_0$, definida en cert interval $|x - x_0| \leq h \leq a$.

S'anomena problema de valors inicials, PVI, a:

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{array} \right.$$

No sempre serà possible expressar les solucions d'una e.d.o. com a combinació de funcions elementals. Estudiarem algunes e.d.o..

Variables separables

Són e.d.o. de primer ordre, que poden reduir-se a: $y' = g(x)h(y)$.
Plantegem:

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x).$$

D'aquí, si $H(y)$ és una primitiva de $1/h(y)$ i $G(x)$ una primitiva de $g(x)$ obtenim:

$$H(y) = G(x) + C,$$

on C és qualsevol contant. Si es pot, aïllem y: $y = \phi(x, C)$.

Exemples

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2}$.
2. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{y^2} + t$.
3. $y' + a(x)y = 0$.

Lineals

Són les equacions que poden reduir-se al format:

$$y' + a(x)y = b(x).$$

El nom de lineal prové de l'operador: $L = \frac{d}{dx} + a(x)Id$.

Propietats

- $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2)]$ i
- $L[cy] = cL[y]$, c constant.

D'aquí, totes les funcions y_g solució de l'e.d.o. $L[y](x) = b(x)$ podem obtenir-se:

$$y_g = y_p + Nuc\ L,$$

on y_p és una solució particular, i $Nuc\ L$ representa la solució general de l'e.d.o. $L[y] = 0$ (equació homogènia associada).

Equació homogènia

Lineals homogènies

$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int a(x)dx}$, on C és qualsevol constant.

Exemple

Considerem l'e.d.o. $y' \cos x + y \sin x = 0$, definida en l'interval $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. És de variables separables:

$$y' + \sin x / \cos x y = 0 \rightarrow \ln |y| = \ln |\cos x| + C.$$

D'aquí: $|y| = C|\cos x|$, $C > 0$, ara bé, $y = 0$ també és una solució.

La solució de l'equació homogènia és

$$y_h = C \cos x,$$

on C és qualsevol constant.

Solució particular: mètode de variació de constants

Proposem una solució amb la forma $y_p = Ky_1$, on y_1 és una solució de $L[y] = 0$ i ara $K = K(x)$. Imposem que sigui solució de l'e.d.o. completa i trobem una e.d.o. (de variables separables) per a K.

Exemple

Per trobar una solució particular de $y' \cos x + y \sin x = 1$, com l'e.d.o.

$$y' \cos x + y \sin x = 0 \rightarrow y_h = C \cos x, \;\; C \in \mathbb{R},$$

plantegem: $y_p = K \cos x$, on $K = K(x)$ és certa funció complint:

$$K' \cos x + K(-\sin x) + (K \cos x) \tan x = \frac{1}{\cos x}.$$

Simplificant, obtenim: $K' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \rightarrow K = \tan x$. I d'aquí, $y_p = \tan x \cos x = \sin x$.

Solució general

Els passos que seguim per resoldre l'e.d.o. són:

- Plantegem i resolem l'equació homogènia associada.
- Busquem una solució particular: "Mètode de variació de constants".
- Sumem les dues expressions anteriors per obtenir la solució general.

Exemples

1. La solució general de l'e.d.o. $y' \cos x + y \sin x = 1$, definida en l'interval $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ és:

$$y_g = y_h + y_p = C \cos x + \sin x \ \forall C \in \mathbb{R}.$$

2. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.
3. $y' + 2y = x^2 + 2x$.

Canvis de variable: homogènies

Una e.d.o. $y' = f(x, y)$ és homogènia si $f(tx, ty) = f(x, y)$. En aquest cas, el canvi de variable $z = x/y$ o bé, $z = y/x$ la transforma en una e.d.o. de variables separables.

Plantegem $y = zx$ pensant que $z = z(x)$. Derivant respecte x obtenim: $y' = z'x + z$. Substituint ara a l'e.d.o. obtenim:

$$z'x + z = f(1, z) \to z'x = f(1, z) - z,$$

e.d.o. de variables separables.

Exemples

1. L'e.d.o. $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0$ és d'aquest tipus ja que la seva forma normal és: $y' = \dfrac{3xy + 2y^2}{x^2}$.
2. $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

Exactes

Una equació diferencial del tipus

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

s'anomena exacta si existeix una funció $U = U(x,y)$ tal que

$$\partial U/\partial x = P(x,y) \text{ i } \partial U/\partial y = Q(x,y).$$

En aquest cas $U(x,y) = c$ defineix una solució de forma implícita, on c és una constant.

Teorema Suposem que $P, Q, \partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$ son contínues en cert rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$, ($(x,y) \in R$ si $\alpha < x < \beta$ i $\gamma < y < \delta$). Aleshores, l'equació

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

és exacta si i només si, en tot punt de R es compleix

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Per trobar la funció U podem seguir el procés següent:

1. Integrem respecte x: $U(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y)$, i
2. derivem respecte y tot igualant a $Q(x,y)$.

Exemple Considerem l'e.d.o.

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0.$$

És una e.d.o. exacta, ja que si anomenem $P(x,y) = x^3 + xy^2$ i $Q(x,y) = x^2y + y^3$, es té que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La funció $U(x,y)$ pot trobar-se:

1. Integrem respecte x:

$$U(x,y) = \int (x^3 + xy^2)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y).$$

2. Derivem l'expressió anterior respecte y i imposem igualtat amb $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 y + C'(y) \to x^2 y + C'(y) = x^2 y + y^3,$$

on $C'(y)$ indica la derivada respecte y, que ha de ser igual a y^3. D'aquí, una primitiva és $C = \frac{1}{4} y^4$.

La solució de l'e.d.o., definida de forma implícita, és

$$\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4 = constant,$$

equivalentment,

$$(x^2 + y^2)^2 = c, \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Aplicacions: Trajectòries ortogonals

En molts problemes físics apareixen dues famílies de corbes que són mútuament ortogonals (p.ex. en una làmina plana d'un material conductor, les corbes equipotencials són les trajectòries ortogonals a les línies de flux).
Donada l'e.d.o. d'una família de corbes $y' = f(x, y)$, l'e.d.o. de la família ortogonal és: $y' = -1/f(x, y)$.

Exemple La família de paràboles per l'origen, té e.d.o. $y' = 2y/x$. La família ortogonal té equació:

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{x}{y}.$$

D'aquí integrant, obtenim:

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{4}x^2 + C.$$

És a dir, una família d'el·lipses amb eixos de simetria els eixos coordenats.

Índex

Equacions diferencials lineals d'ordre superior

Una edo lineal d'ordre n és una equació del tipus:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = b(x),$$

amb $a_n \neq 0$.
Les condicions inicials són del tipus

$$\{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}\}.$$

Exemples Són e.d.o. lineals (de segon ordre):
$y'' + 3xy' + y\sin x = e^x$ i $y'' + 3y' + 2y = \cos x$. Però no ho són, $y'' + 3y' + \sin y = 0$ i $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y'' = 0$.

Teorema Donat el PVI:

$$\left\{ \begin{array}{c} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{array} \right. ,$$

on $y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n, b \in \mathcal{C}^0(I)$, aleshores per a qualsevol $x_0 \in I$ existeix una única solució $y = \phi(x)$ definida en I.

Introduïm: $L = \dfrac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0(x)Id.$

Propietats

L'operador L és lineal, ja que,

1. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.
2. $L[cy] = cL[y]$, c constant.

Utilitzant L l'e.d.o. s'escriu $L[y] = b(x)$, (l'anomenarem equació completa). A partir d'ella, l'equació homogènia associada és:

$$L[y] = 0.$$

Les solucions de l'e.d.o. completa es poden escriure com:

$$y_g = y_p + y_h,$$

on y_p és una solució particular, i y_h és qualsevol solució de l'e.d.o. homogènia associada.

Lineals homogènies

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ són n solucions de $L[y] = 0$, aleshores també és una solució

$$y = \Sigma_{i=1}^{n} c_i y_i, \forall c_i \in \mathbb{R}.$$

Qüestió: Quina condició han de complir $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ per tal que l'expressió anterior generi totes les altres solucions de $L[y] = 0$?

Considerem el PVI:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \end{cases}$$

D'aquí, si la solució té la forma $\Sigma_{i=1}^{n} c_i y_i$, imposant les condicions inicials, obtenim que:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Té solució, per a qualsevol PVI en x_0, si i només si, el determinant

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

($W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$ s'anomena wronskià de $y_1, y_2, \dots, y_n$ en x.)

Lineals homogènies a coeficients constants de 2n ordre

Suposem que l'e.d.o. és $y'' + by' + cy = 0$, on b, c són nombre reals. Explorem si $y = e^{rx}$ és una solució:

$$(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} = e^{rx}(r^2 + br + c).$$

D'on, $y = e^{rx}$ és una solució de l'e.d.o. homogènia si i només si,

$$r^2 + br + c = 0.$$

Dues arrels reals diferents

Suposem que r_1, r_2 són les dues arrels. Aleshores, $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) \neq 0$, i qualsevol solució s'expressa com a combinació lineal de $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$.

Exemple Per resoldre el PVI

$$y'' + 6y' + 5y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2,$$

trobem les arrels de $r^2 + 6r + 5$: $\{-1, -5\}$. D'aquí la solució general és:

$$y_g = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}.$$

Amb les c.i, determinem C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{l} y_g = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} \\ y_g' = -C_1 e^{-x} - 5C_2 e^{-5x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} y(0) = 1 : C_1 + C_2 = 1, \\ y'(0) = 2 : -C_1 - 5C_2 = 2. \end{array}\right\}$$

D'aquí, $C_1 = 7/4$ i $C_2 = -3/4$. La solució al PVI és:

$$y = \frac{7}{4} e^{-x} - \frac{3}{4} e^{-5x}.$$

Dues arrels complexes conjugades

Suposem que $\alpha + j\beta$ sigui una arrel. Aleshores, $\alpha - j\beta$ també és una arrel (el polinomi és a coef. reals).
Si $u = u(x)$, $v = v(x)$, definim $(u + jv)' = u' + jv'$. D'aquí,

- ✓ $L[u + jv] = L[u] + jL[v]$, i
- ✓ $u(x) + jv(x)$ és una sol. de $L[y] = 0 \Leftrightarrow u(x), v(x)$ són solucions.

Exemple

L'e.d.o. $4y'' + 4y' + 5y = 0$ té polinomi associat $4r^2 + 4r + 5$ que té arrels $\{-\frac{1}{2} \pm j\}$. Plantegem $e^{(-1/2+j)x} = e^{-x/2}(\cos x + j \sin x)$. D'on, considerant la part real i la part imaginària obtenim dues solucions. A partir d'elles, obtenim tota la resta:

$$y = C_1 e^{-x/2} \cos x + C_2 e^{-x/2} \sin x, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Una arrel real de multiplicitat 2 Suposem que $y_1 = e^{r_1 x}$ sigui una solució de $L[y] = 0$. És a dir, $r^2 + ar + b = (r - r_1)^2$. Aleshores, $y_2 = xe^{r_1 x}$ és una altra solució amb $W(e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}) \neq 0$, i qualsevol solució s'expressa com a combinació lineal de $\{e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}\}$.

Exemple Per trobar les solucions de $y'' - 4y' + 4 = 0$, plantegem l'equació:

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2.$$

D'aquí, que $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$ són dues solucions de l'e.d.o.. A més, com $W(e^{2x}, xe^{2x}) \neq 0$, la solució general de l'é.d.o. és:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Lineals homogènies a coeficients constants

Estudiem:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0,$$

amb $a_n \neq 0$ i $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Observem que,

$$L[e^{rx}] = (a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0)e^{rx}.$$

D'aquí, $y = e^{r_1 x}$ és una solució de l'e.d.o. homogènia si i només si, r_1 és una arrel del polinomi

$$p(r) = a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0.$$

L'equació $p(r) = 0$ s'anomena *equació característica de l'e.d.o.*

<u>Arrels reals diferents</u>

Suposem que $r_1, \ldots, r_n$ són totes arrels diferents de p. En aquest cas,

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}) \neq 0,$$

i qualsevol solució s'expressa com a combinació lineal de $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$.

Exemple A partir de l'e.d.o. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, considerem el polinomi

$$p(r) = r^3 - 2r^2 - r + 2.$$

Que té arrels: $\{\pm 1, 2\}$. D'aquí que, qualsevol solució de l'e.d.o. s'expressa com:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Arrels complexes

Com el el cas $n = 2$, si $\alpha + j\beta$ és una arrel, com els coeficients de l'e.d.o. són reals, també $\alpha - j\beta$ també és una arrel.

Exemple El polinomi associat a l'e.d.o.

$$y^{(4)} - y = 0$$

és $p(r) = r^4 - 1$ que té arrels $\{\pm 1, \pm j\}$. D'aquí, com $e^{jx} = \cos x + j \sin x$, obtenim les solucions

$$\{e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x\}.$$

A més, com $W(e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x) \neq 0$, qualsevol altra solució és:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \ \ C_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 4.$$

Arrel múltiples Suposem que r_1 és una arrel de multiplicitat k de $p(r)$. Aleshores, també són solució

$$\{e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_1 x}\}.$$

Exemple Per trobar les solucions de $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - y' = 0$, plantegem l'equació:

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = r(r-1)^3.$$

Per tant, qualsevol altra solució s'expressa:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x, \;\; C_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 4.$$

Conjectura prudent

Quan l'e.d.o. és $p(D)[y] = b(x)$, amb $p \in \mathbb{R}[x]$ i $b(x)$ té cert aspecte, proposem una solució particular amb unes constants que cal determinar, imposant que funció proposada sigui solució de l'e.d.o. completa.

$b(x) = e^{\alpha x} q(x)$, on $q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$.

(i) Si α no és una arrel de $p(x)$, proposarem:

$$y_p = e^{\alpha x}(c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m).$$

(ii) Si α és una arrel de multiplicitat k de $p(x)$, proposarem:

$$y_p = x^k e^{\alpha x}(c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m).$$

Exemples

1. $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.
   Com $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$, busquem $y_p = (ax+b)e^x$, $a, b \in \mathbb{R}$. Imposem que sigui solució:

   $$y_p' = ae^x + (ax+b)e^x = e^x(ax+a+b),$$
   $$y_p'' = ae^x + e^x(ax+a+b) = e^x(ax+2a+b).$$

   D'aquí, $y_p'' - 5y_p' + 6y_p = e^x(2ax + (-3a+2b))$ i igualant

   $$e^x(2ax + (-3a+2b)) = xe^x \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4}.$$

   La solució:

   $$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4})e^x, \ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' = xe^x$.

$b(x) = \cos(\beta x)q(x)$ o $b(x) = \sin(\beta x)q(x)$, on $q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$.

(i) Si βj no és una arrel de $p(x)$, proposarem:
$$y_p = \cos(\beta x)(c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m) + \sin(\beta x)(d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m).$$

(ii) Si βj és una arrel de multiplicitat k de $p(x)$, proposarem:
$$y_p = x^k(\cos(\beta x)(c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m) + \sin(\beta x)(d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m)).$$

Exemples

1. $y'' + 2y' + y = x \sin x$.
2. $y^{(4)} - y = \cos x$.

$b(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)q(x)$ o $b(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)q(x)$, on $q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$.

(i) Si $\alpha + \beta j$ no és una arrel de $p(x)$, proposarem:
$$y_p = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m) + e^{\alpha x}\sin(\beta x)(d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m).$$

(ii) Si $\alpha + \beta j$ és una arrel de multiplicitat k de $p(x)$, proposarem:
$$y_p = x^k(e^{\alpha x}\cos(\beta x)(c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m) + e^{\alpha x}\sin(\beta x)(d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m)).$$

Exemples

1. $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\sin x$.
2. $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\cos x$.

Principi de superposició

Quan l'e.d.o. és de la forma $L[y] = b_1(x) + \ldots + b_k(x)$ i trobem $y_i(x)$ tal que $L[y_i] = b_i(x)$ per a cada $i = 1, \ldots, k$, aleshores, una solució particular és p.e.,

$$y_p = y_1 + \ldots + y_k.$$

Exemple Donada l'e.d.o.:

$$y''' - 4y' = x + \cos x + 2e^{-2x},$$

busquem una solució particular:

$$y_p = y_1 + y_2 + y_3 = (ax + b)x + c\cos x + d\sin x + x(fe^{-2x}),$$

on a, b, c, d, f són constants adequades que trobem imposant que y_p sigui solució de l'edo.

Índex

Introducció

Donat $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, considerem el PVI:

$$\begin{cases} y_1' = a_1^1(t)y_1 + \ldots + a_n^1(t)y_n + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_1^n(t)y_i + \ldots + a_n^n(t)y_n + b_n(t) \\ \\ y_1(t_0) = a_1, \ldots, y_n(t_0) = a_n \end{cases}$$

Una solució del PVI està formada per n funcions $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ tals que, $y_i' = a_1^i(t)y_1 + \ldots + a_n^i(t)y_n + b_i(t)$ i $y_i(t_0) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemple

Una solució del PVI $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \\ x(0) = 1, y(0) = -1 \end{cases}$ és $\{x(t) = e^{-t}, y(t) = -e^{-t}\}$.

Notació matricial

De forma equivalent, el PVI anterior, es pot escriure en forma matricial: $Y' = AY + B,\ Y(t_0) = (a_1, \dots, a_n)^T$, on

$$Y = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T,\ B = (b_1(t), \dots, b_n(t))^T$$

i

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & \dots & a_n^1(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n(t) & \dots & a_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Una solució del PVI és un vector $Y(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$ que verifica el sistema amb $Y(t_0) = (a_1, \dots, a_n)^T$.

Teorema

Donat el PVI anterior amb $a_i^j(t), b_i(t) \in \mathcal{C}^0(I)$ (contínues en I).
Aleshores, $\forall t_0 \in I$ existeix una única solució
$Y(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$, definida en tot I.

Reducció d'un sistema a una equació d'ordre superior

Exemple

Donat el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} x' = y + 1 \ (1) \\ y' = x + 1 \ (2) \end{array} \right.$, i derivant respecte t la eq. (1), obtenim: $x'' = y'$. Substituint ara en eq. (2), obtenim l'edo de 2n ordre:

$$x'' - x = 1.$$

Trobem ara la solució $x_g = x_p + x_h$. De l'eq. característica: $r^2 - 1 = 0$ deduïm: $x_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. Per conjectura prudent busquem $y_p = A$, on A és certa constant. Imposem que sigui solució: $-A = 1$. D'aquí,

$$x_g = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 1.$$

Finalment, substituint en (1), trobem
$y_g = x_g - 1 = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - 1$. És a dir,

$$Y_g = \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La substitució anterior pot plantejar-se en termes de l'operador derivació D, tal com mostra l'exemple següent:

Exemple Considerem el sistema: $\left\{ \begin{array}{c} x' = x - y - t^2 \ (1) \\ y' = x + 3y + 2t^2 \ (2) \end{array} \right.$.

Aïllem x de l'eq. (1), obtenim

$$x = y' - 3y - 2t^2.$$

Substituïm en l'eq. (2):

$$y'' - 3y' - 4t = (y' - 3y - 2t^2) - y - t^2.$$

És a dir:

$$y'' - 4y' - 4y = 4t - 3t^2.$$

D'aquí, $y_g = y_h + y_p$. Trobem y_h a partir de l'equació característica:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \leftrightarrow (r-2)^2 = 0.$$

És a dir, $y_h = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$. Per conjectura prudent, trobem una solució particular: $y_p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, on a_i són constants que fixem imposant que y_p sigui solució de l'equació completa:

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 4t - 3t^2 \to a_0 = \frac{-1}{8},\ a_1 = \frac{-1}{2},\ a_2 = \frac{-3}{4}.$$

Obtenim,

$$y_g = (c_1 + c_2 t)e^{2t} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}t^2.$$

Finalment, substituint en l'eq. (2) obtenim x_g:

$$x_g = y_g' - 3y_g - 2t^2 = (c_2 - c_1)e^{2t} - c_2 te^2 t - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2.$$

Reducció d'una equació d'ordre superior a un sistema

Una equació diferencial lineal d'ordre n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = b(x)$$

es transforma en un sistema d'equacions lineals de primer ordre amb el canvi:

$$y_1 = y, y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}.$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = b(x) - a_0(x)y_1 - \ldots - a_{n-1}(x)y_{n-1} \end{cases}$$

Índex

Operador L. Solució general

Considerem l'operador L definit per $L[Y] = Y' - AY$. El sistema $Y' = AY + B$ s'expressa com $L[Y] = B$, i el sistema homogeni associat com: $L[Y] = 0$.

Propietats

1. L és un operador lineal: $L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2]$, i $L[cY] = cL[Y]$, per a tota constant c.
2. Si Y_1, Y_2 són dues solucions de $L[Y] = B$, aleshores $Y_1 - Y_2$ és una solució del sistema homogeni associat $(L[Y_1 - Y_2] = 0)$.
3. Si Y_p és una solució de $L[Y] = B$, aleshores per a qualsevol altra solució Y_g de $L[Y] = B$, existeix una solució Y_h de $L[Y] = 0$ tal que:
$$Y_g = Y_p + Y_h.$$

Estudi del cas homogeni mitjançant valors i vectors propis

Considerem el sistema d'edo:

$$Y' = DY \quad ,$$

on $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. És a dir,

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \quad \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases}$$

D'aquí trobem:

$$\{y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, y_n(t) = C_n e^{\lambda_1 t}\},$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ constants.

És a dir,

$$Y = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Observació

A partir de $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, definim

$$e^{Dt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Dt)^k}{k!} = diag(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!}) =$$

$$= diag(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \quad (\Rightarrow (e^{Dt})' = De^{Dt}).$$

Mitjançant valors i vectors propis

Donada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriu diagonalitzable, existeixen $P, D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tals que:

$$P^{-1}AP = D,$$

on $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
(P és la matriu que té per columna i-èssima un vep de vap λ_i.)

Considerem ara el sistema d'edo:

$$Y' = AY \quad \Leftrightarrow$$

$$Y' = (PDP^{-1})Y \Leftrightarrow P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \Leftrightarrow (P^{-1}Y)' = D(P^{-1}Y).$$

Introduint el canvi de variable $U = P^{-1}Y$, obtenim:

$$U' = DU.$$

El sistema d'edos $U' = DU$ té solució

$$U = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

D'aquí, com $Y = PU$, obtenim

$$Y = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

A diagonalitzable en $\mathbb{R}$

Exemple

Per resoldre el sistema: $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$, busquem els vap's i vep's de la matriu de coeficients: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Els vap's són les arrels de $c_A(x) = det(A - xId) = (x-4)(x+1)$.

La base de vep's la trobem en els nuclis:

<u>VAP -1</u> $Nuc(A + Id) =< (1, -1) >$.

<u>VAP 4</u> $Nuc(A - 4Id) =< (3, 2) >$.

D'aquí la solució general és:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

on c_1, c_2 són dues constants qualssevol.

Matriu fonamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Propietats

1. $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, (cada columna és una solució).
2. $det\Phi(t) \neq 0$
3. Per a qualsevol solució Y_h de $L[Y] = 0$ existeixen $c_1, \ldots, c_n$ tals que $Y_h = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$
4. Per a qualsevol $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $detM \neq 0$, $\Phi(t)M$ és una matriu fonamental.

Matriu exponencial

Donada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriu diagonalitzable, existeixen $P, D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tals que:

$$PDP^{-1} = A,$$

on $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, aleshores:

$$A^k = \overbrace{(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}^{k} = PD^kP^{-1}.$$

D'aquí,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} = P\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Dt)^k}{k!} P^{-1} =$$

$$= Pe^{Dt}P^{-1} = (PU)P^{-1} \quad (\Rightarrow (e^{At})' = Ae^{At}).$$

És a dir, $\Psi(t) = e^{At}$ és la matriu fonamental amb $\Psi(0) = Id$.

Sistemes lineals no homogenis: variació de paràmetres

Donat el sistema $Y' = AY + B$ amb matriu fonamental $\Phi(t)$, el sistema homogeni associat admet solució

$$Y_h = \Phi(t)C, \text{ on } C = (c_1, \dots, c_n)^T, \text{ i } c_1, \dots, c_n \text{ són constants.}$$

El mètode de variació de constants proposa una solució particular de la forma

$$Y_p = \Phi(t)C(t), \text{ on } C(t) = (c_1(t), \dots c_n(t))^T,$$

on cada $c_i(t)$ és una funció que trobem imposant que Y_p sigui solució del sistema complet.
Observem que:

$$Y_p' = \Phi(t)'C(t) + \Phi(t)C'(t)$$

d'aquí, imposant que sigui solució:
$\Phi(t)'C(t) + \Phi(t)C'(t) = A\Phi(t)C(t) + B$ s'arriba a l'equació:

$$\Phi(t)C'(t) = B \Leftrightarrow C'(t) = \Phi(t)^{-1}B.$$

Exemple Donat el sistema homogeni: $\left\{ \begin{array}{c} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 2x + y - 3 \end{array} \right.$ es té que

$$\Phi(t) = \left(\begin{array}{cc} e^{-t} & e^{4t} \\ -e^{-t} & e^{4t} \end{array} \right)$$

és una matriu fonamental del sistema homogeni ja que,
$\Phi'(t) = A\Phi(t)$, per $A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{array} \right)$ i $det(\Phi(t)) = 2e^{3t} \neq 0$.
D'aquí, qualsevol altra solució del sistema homogeni és de la forma $Y_H = \Phi(t)C$, on $C = (c_1, c_2)^T$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Busquem una solució particular pel mètode de variació de paràmetres: $Y_P = \Phi(t)C(t)$. Plantegem:

$$C'(t) = \Phi(t)^{-1}B = \frac{1}{2e^{3t}}\begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2e^{3t}}\begin{pmatrix} 4e^t \\ -2e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-7t} \end{pmatrix}$$

D'aquí, integrant, $C(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ \frac{1}{7}e^{-7t} \end{pmatrix} \rightarrow$

$$Y_p = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ \frac{1}{7}e^{-7t} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}e^{-3t}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

I la solució general és:

$$Y_g = \Phi(t)C + Y_p = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}e^{-3t} \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix},$$

on c_1, c_2 són constants.

És a dir,

$$Y_g = \begin{pmatrix} -e^{2t} & e^{2t} - te^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} t^2 \\ -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} t - \frac{3}{4} t^2 \end{pmatrix}.$$