Tema 6. Transformada de Laplace.

Algebra i Geometria. EETAC

S.C. López. Matemàtica Aplicada IV. UPC

Índex

Introducció

Definició. Exemples. Teorema d'existència

Propietats operacionals de la transformada

Altres propietats

Inversió per descomposició en fraccions simples
- α arrel de multiplicitat r de $Q(s)$
- $\alpha + \beta j$ arrel de $Q(s)$

Funció de Heaviside

La funció δ de Dirac

Convolució

Introducció

La transformada de Laplace és un mètode directe i potent per resoldre PVI amb (sistemes d') equacions diferencials lineals a coeficients constants. Resulta especialment útil quan apareix una funció $f(t)$ on:

- o bé, $f(t)$ és discontínua (Funció de Heaviside),
- o bé, $f(t)$ és zero llevat un instant del temps (Funció δ de Dirac).

A partir d'un PVI amb incògnita la funció $y = y(t)$, plantejarem una equació lineal amb la seva transformada, $Y = Y(s)$. Trobarem $Y(s)$ i a partir de reconèixer la seva anti-transformada, determinarem $y = y(t)$.

Índex

Introducció

Definició. Exemples. Teorema d'existència

Propietats operacionals de la transformada

Altres propietats

Inversió per descomposició en fraccions simples

- α arrel de multiplicitat r de $Q(s)$
- $\alpha + \beta j$ arrel de $Q(s)$

Funció de Heaviside

La funció δ de Dirac

Convolució

Definició. Exemples

Donada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, la transformada de Laplace de f:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)dt,$$

si aquest límit existeix.

Exemples

1. $f(t) = 1 \to F(s) = 1/s$

$$F(s) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st} dt = \lim_{A \to +\infty} [\frac{-1}{s} e^{-st}]_{t=0}^{t=A} =$$

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1 - e^{-sA}}{s} = \frac{1}{s},$$

si $s > 0$, i no existeix per $s \leq 0$.

Teorema d'existència

2. $f(t) = t \rightarrow F(s) = 1/s^2$
3. $f(t) = e^{\alpha t} \rightarrow F(s) = 1/(s-\alpha)$
4. $f(t) = \cos(\beta t) \rightarrow F(s) = s/(s^2+\beta^2)$,
   $g(t) = \sin(\beta t) \rightarrow G(s) = \beta/(s^2+\beta^2)$
5. $f(t) = e^{t^2}$ (com exemple que no té transformada).

Teorema d'existència Donada $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ complint:

(i) la restricció de f sobre cada interval finit és contínua a trossos, i

(ii) f és d'ordre exponencial γ, és a dir, $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, per $t \geq a$,

aleshores, existeix la seva transformada $F(s)$ per $s > \gamma$.

Les funcions complint (i) i (ii) s'anomenen *admissibles*.

Índex

Introducció

Definició. Exemples. Teorema d'existència

Propietats operacionals de la transformada

Altres propietats

Inversió per descomposició en fraccions simples
- α arrel de multiplicitat r de $Q(s)$
- $\alpha + \beta j$ arrel de $Q(s)$

Funció de Heaviside

La funció δ de Dirac

Convolució

Propietats operacionals de la transformada

1. Linealitat:

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}, \ \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

2. Derivació: Suposant f i f' admissibles, aleshores

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \rightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

En general, $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} =$

$$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)\ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Observació En l'anterior relació, si f no està definida en 0, podem substituir $f(0)$,$f'(0)$, ... per $\lim_{t\to 0^+} f(t), \lim_{t\to 0^+} f'(t), \ldots$.

Exemple

Donat el PVI:

$$y'' + y = 5e^{2t},\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1,$$

usem la propietat de derivació per plantejar una equació amb $Y(s)$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)\\
&\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2\\
&\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2s - 1\\
&\mathcal{L}\{e^{2t}\} = 1/(s-2)
\end{aligned}$$

Transformant ara tota l'edo, obtenim:

$$Y(s)(s^2+1) - 2s - 1 = \frac{5}{s-2} \to Y(s) = \frac{2s^2 - 3s + 3}{(s^2+1)(s-2)}.$$

D'aquí, usant la descomposició en fraccions simples,

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2+1} + \frac{1}{s-2} = \mathcal{L}\{\cos t - \sin t + e^{2t}\}.$$

Teorema d'unicitat de la transformada de Laplace

Teorema

Siguin $f(t), g(t)$ dues funcions admissibles, tals que $F(s) = G(s)$ per $s \geq s_0$, aleshores $f(t) = g(t)$ per a tot t on f, g siguin contínues simultàniament.

Observació

Tot i que existeix una fórmula d'inversió per calcular l'anti-transformada d'una funció donada, basarem el seu càlcul en la identificació de transformades de funcions conegudes. Un punt clau del procés, serà la descomposició en fraccions simples.

Exemple

Resoleu el PVI:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

(es troba que $Y(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}$).

Resolució de sistemes d'edo lineals a coef. constants

Exemple A partir del PVI:

$$\begin{cases} x' = x + 4y + e^t \\ y' = x + y + e^t \\ \\ x(0) = 2, y(0) = 1 \end{cases}$$

plantegem: $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$.
Transformant el sistema d'edos, obtenim:

$$\begin{cases} sX(s) - 2 = X(s) + 4Y(s) + \frac{1}{s-1} \\ sY(s) - 1 = X(s) + Y(s) + \frac{1}{s-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (s-1)X(s) - 4Y(s) = 2 + \frac{1}{s-1} \\ -X(s) + (s-1)Y(s) = 1 + \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

Aïllem $X(s)$, $Y(s)$, pe, usant Cramer:

$$X(s) = \frac{(2s-1)(s-1)+4s}{((s-1)^2-4)(s-1)} = \frac{11}{4}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1},$$

$$Y(s) = \frac{s(s-1)+2s-1}{((s-1)^2-4)(s-1)} = \frac{11}{8}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1}.$$

D'aquí,

$$x(t) = \frac{11}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} - e^{t},$$

$$y(t) = \frac{11}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t}.$$

Índex

Introducció

Definició. Exemples. Teorema d'existència

Propietats operacionals de la transformada

Altres propietats

Inversió per descomposició en fraccions simples
- α arrel de multiplicitat r de $Q(s)$
- $\alpha + \beta j$ arrel de $Q(s)$

Funció de Heaviside

La funció δ de Dirac

Convolució

Altres propietats

3. Integració

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\} = \frac{F(s)}{s}.$$

(Idea: $g(t) = \int_0^t f(u)du \to g'(t) = f(t)$)

4. Multiplicació per t:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}(F(s)).$$

Exemples

4.1 $\mathcal{L}\{te^t\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-1}) = \frac{1}{(s-1)^2}.$

4.2 $\mathcal{L}\{t^{13}\} = (-1)^{13}\frac{d^{13}}{ds^{13}}\mathcal{L}\{1\} = \frac{13!}{s^{14}}.$

4. 4.3 Quina funció $y = y(t)$ té transformada:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right)?$$

4.4 Quina funció $y = y(t)$ té transformada:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2s}\frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{s}\left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s}\mathcal{L}\{t \sin t\} = \frac{1}{2}\int_0^t u \sin u du = \ldots = \frac{1}{2}(-t\cos t + \sin t).$$

4.5 Quina funció $y = y(t)$ té transformada: $Y(s) = \dfrac{-4s}{(s^2+4)^2}$?

4.6 Quina funció $y = y(t)$ té transformada: $Y(s) = \dfrac{1}{(s-4)^3}$?

5. Divisió per t.
Si $f(t)/t$ és admissible, (en particular, existeix $\lim_{t\to 0^+} f(t)/t$.)

$$\mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^{+\infty} F(u)du.$$

(Idea: $g(t) = f(t)/t\ldots$).

Exemples

5.1 $\mathcal{L}\{\frac{\sin t}{t}\} = \frac{\pi}{2} - \arctan s$

5.2 $\mathcal{L}\{\frac{\cos(at)-1}{t}\} = \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}$

5.3 $\mathcal{L}\{\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\} = \ln \frac{s-b}{s-a}$

6. Multiplicació per $e^{\alpha t}$.

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(s-\alpha).$$

Exemples

6.1 $\mathcal{L}\{e^{3t}\sin t\} = \dfrac{1}{s^2-6s+10}$.

6.2 Quina funció $y = y(t)$ té transformada: $\dfrac{s-7}{25+(s-7)^2}$?

6.3 Quina funció $y = y(t)$ té transformada: $\dfrac{1}{s^2-4s+9}$?

7. Translació.
   Donada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, considerem la funció $\tilde{f}_a$ definida per: $\tilde{f}_a = \begin{cases} f(t-a), & \text{si } t \geq a; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$ Aleshores,

$$\mathcal{L}\{\tilde{f}_a\} = e^{-sa}F(s).$$

   Exemple Quina és la funció $y = y(t)$ amb $Y(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2}$?

8. Canvi d'escala
   Considerem $a > 0$. Aleshores,

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}).$$

   Exemple $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{1}{a}\dfrac{s/a}{(s/a)^2+1}$

9. Funcions periòdiques.
Considerem una funció $f = f(t)$, periòdica de període T, és a dir, $f(t+T) = f(t)$ per a tot t. Aleshores,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

Exemples

9.1 Considerem $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$ estesa periòdicament, és a dir, $f(t+2) = f(t)$. Aleshores $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})}$.

9.2 Considerem $f(t) = t$, si $0 \le t \le 1$, i $f(t+1) = f(t)$. Aleshores $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s}(1+s)}{s^2(1 - e^{-s})}$.

10. <u>Valors inicials i finals</u>

(a) $\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0.$

A més, si $f'(t)$ és admissible i existeixen els límits indicats:

(b)

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to +\infty} sF(s).$$

(c)

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s).$$

Índex

Introducció

Definició. Exemples. Teorema d'existència

Propietats operacionals de la transformada

Altres propietats

Inversió per descomposició en fraccions simples
- α arrel de multiplicitat r de $Q(s)$
- $\alpha + \beta j$ arrel de $Q(s)$

Funció de Heaviside

La funció δ de Dirac

Convolució

Inversió de fraccions simples

Donada $F(s)$ de tipus racional, és a dir, $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, on P, Q són polinomis. Per trobar la seva transformada inversa, descomposem la fracció com a suma de fraccions simples.

α **arrel de multiplicitat** r **de** $Q(s)$

$$\frac{A_1}{s-\alpha} + \frac{A_2}{(s-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-\alpha)^r},$$

on A_i són constants.
En aquest cas,

$$\frac{A_k}{(s-\alpha)^k} = \frac{A_k}{(k-1)!}(-1)^{k-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(s-\alpha)^k} = \frac{A_k}{(k-1)!}\mathcal{L}\{t^{k-1}e^{\alpha t}\}.$$

Arrels complexes

$\alpha + \beta j$ **arrel de** $Q(s)$ Aleshores $\alpha - \beta j$ és una arrel de la mateixa multiplicitat de $Q(s)$.

Multiplicitat 1 En aquest cas, la descomposició en fraccions simples:

$$\frac{As + B}{(s - \alpha)^2 + \beta^2},$$

on A, B són constants. Plantegem:

$$\frac{As + B}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{A(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A\alpha + B}{\beta} \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} =$$

$$\mathcal{L}\{Ae^{\alpha t} \cos(\beta t)\} + \mathcal{L}\{\frac{A\alpha + B}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t)\}.$$

Multiplicitat 2 En aquest cas, la descomposició en fraccions simples:

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{Cs+D}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2},$$

on A, B, C, D són constants. Estudiem el segon terme:

$$\frac{Cs+D}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{C}{2\beta}\frac{2\beta(s-\alpha)}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}+\frac{C\alpha+D}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}=$$

Ara bé,

$$\frac{2\beta(s-\alpha)}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\mathcal{L}\{te^{\alpha t}\sin(\beta t)\}.$$

Estudiem la resta,

$$\frac{1}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{2\beta^2}\frac{(s-\alpha)^2+\beta^2-(s-\alpha)^2+\beta^2}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2} =$$

D'aquí,

$$\frac{1}{2\beta^3}\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{1}{2\beta^2}\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2} =$$

per tant,

$$\frac{1}{2\beta^3}\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin(\beta t)\} - \frac{1}{2\beta^2}\mathcal{L}\{te^{\alpha t}\cos(\beta t)\}.$$

Alternativa 1

$$\frac{1}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2} = \mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\}, \text{ on } F(s) = \frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}.$$

Ara bé,

$$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{2s\beta}{2s\beta(s^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{2s\beta}\left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\mathcal{L}\{\int_0^t t\sin(\beta t)dt\}.$$

Integrant per parts,

$$\frac{1}{2\beta}\int_0^t t\sin(\beta t)dt = \frac{1}{2\beta}\left(-\frac{t}{\beta}\cos(\beta t) + \frac{1}{\beta^2}\sin(\beta t)\right).$$

És a dir,

$$\frac{1}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2} = \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\left(-\frac{t}{2\beta^2}\cos(\beta t) + \frac{1}{2\beta^3}\sin(\beta t)\right).$$

Alternativa 2

Treballant amb nombres complexos. Una arrel $\alpha + \beta j$ (i la seva conjugada) de multiplicitat r dóna lloc a

$$\frac{A_1}{s-\alpha-\beta j} + \frac{\bar{A}_1}{s-\alpha+\beta j} + \ldots + \frac{A_r}{(s-\alpha-\beta j)^r} + \frac{\bar{A}_r}{(s-\alpha+\beta j)^r}.$$

on $A_i, \bar{A}_i \in \mathbb{C}$ són constants conjugades. Escrivint $A_k = |A_k| e^{\varphi_k j}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{A_k}{(s-\alpha-\beta j)^k} + \frac{\bar{A}_k}{(s-\alpha+\beta j)^k}\}$$

$$= \frac{|A_k|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\varphi_k j} e^{(\alpha+\beta j)t} + \frac{|\bar{A}_k|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\varphi_k j} e^{(\alpha-\beta j)t}$$

$$= 2\frac{|A_k|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi_k).$$

Repàs de descomposició en fraccions simples

Una manera de calcular els coeficients de la descomposició amb fraccions simples d'una funció racional:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \Sigma_{k=1}^{r} \frac{A_k}{(s-\alpha)^k} + R(s),$$

on A_i són constants i $R(s)$ és una funció racional amb denominador que no s'anul·la en α:

$$A_r = (s-\alpha)^r \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=\alpha} , \qquad A_{r-1} = \frac{d}{ds}\left((s-\alpha)^r \frac{P(s)}{Q(s)}\right) \Big|_{s=\alpha}$$

En general,

$$A_{r-k} = \tfrac{1}{k!}\tfrac{d^k}{ds^k}\left((s-\alpha)^r \tfrac{P(s)}{Q(s)}\right) \Big|_{s=\alpha}$$

Exemples

1. $\dfrac{1}{s^4+s^2}$
2. $\dfrac{s^2+3}{s^4-s^3-s^2+s}$

Índex

Introducció

Definició. Exemples. Teorema d'existència

Propietats operacionals de la transformada

Altres propietats

Inversió per descomposició en fraccions simples
- α arrel de multiplicitat r de $Q(s)$
- $\alpha + \beta j$ arrel de $Q(s)$

Funció de Heaviside

La funció δ de Dirac

Convolució

Funció de Heaviside

Considerem el PVI:

$$y'' + y = f(t),\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1,$$

on $f(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 \leq t < a; \\ f_2(t), & a \leq t < b; \\ f_3(t), & b \leq t. \end{cases}$ Aleshores,

$$F(s) = \int_0^a e^{-st} f_1(t)dt + \int_a^b e^{-st} f_2(t)dt + \int_b^{+\infty} e^{-st} f_3(t)dt.$$

Per treballar amb aquest tipus de funcions introduïm:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t. \end{cases}$$

D'aquí $u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a; \\ 1, & a \leq t. \end{cases}$.

Exemples

1. La funció $g(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t < b; \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$ es pot descriure com

$$g(t) = u(t-a) - u(t-b).$$

2. La funció $f(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 \leq t < a; \\ f_2(t), & a \leq t < b; \\ f_3(t), & b \leq t, \end{cases}$ es pot descriure com:

$f(t) =$

$$f_1(t)(u(t)-u(t-a))+f_2(t)(u(t-a)-u(t-b))+f_3(t)(u(t-b))$$

$$= f_1(t) + (f_2(t) - f_1(t))u(t-a) + (f_3(t) - f_2(t))u(t-b).$$

La seva transformada:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-sa}}{s}.$$

En particular,

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}.$$

Ara bé, per la propietat de translació,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-sa}F(s).$$

Exemples

1. La funció $f(t) = \begin{cases} 8, & 0 \leq t < 2; \\ t^2, & 2 \leq t. \end{cases}$ es pot descriure com:

$$\begin{aligned} f(t) = &\ 8(u(t) - u(t-2)) + t^2 u(t-2) \\ = &\ 8u(t) + (t^2 - 8)u(t-2) \\ = &\ 8u(t) + ((t-2+2)^2 - 8)u(t-2) \\ = &\ 8u(t) + ((t-2)^2 + 4(t-2) - 4)u(t-2). \end{aligned}$$

D'aquí, la transformada és:

$$F(s) = \frac{8}{s} + e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s}\right).$$

2. Quina funció $f(t)$ té transformada $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+1}e^{-\pi s}$. Com

$$\frac{s+3}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\cos t + 3\sin t\},$$

obtenim

$$F(s) = \mathcal{L}\{(\cos(t-\pi) + 3\sin(t-\pi))u(t-\pi)\}.$$

És a dir,

$$f(t) = (-\cos t - 3\sin t)u(t-\pi).$$

3. Considerem el PVI:

$$y'' - y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

on $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ 1 + e^{2t}, & 1 \leq t. \end{cases}$

Plantegem $f(t) = 1 + e^{2t}u(t-1) = 1 + e^{2(t-1)+2}u(t-1) =$

$$= 1 + e^{2}e^{2(t-1)}u(t-1).$$

D'aquí,

$$F(s) = \frac{1}{s} + e^{2}\frac{e^{-s}}{(s-2)}.$$

Índex

Introducció

Definició. Exemples. Teorema d'existència

Propietats operacionals de la transformada

Altres propietats

Inversió per descomposició en fraccions simples
- α arrel de multiplicitat r de $Q(s)$
- $\alpha + \beta j$ arrel de $Q(s)$

Funció de Heaviside

La funció δ de Dirac

Convolució

La funció δ de Dirac

Considerem el PVI:

$$y'' + y = f_\epsilon(t), \; y(0) = 2, \; y'(0) = 1,$$

on $f_\epsilon(t)$ és una funció que s'anul·la llevat un cert interval $I_\epsilon = [a, a+\epsilon]$, on agafa valors molt alts.
La funció $f_\epsilon(t)$ és desconeguda, però en canvi, si que es coneix el valor de la integral:

$$A = \int_\alpha^\beta f_\epsilon(t)dt,$$

si $\alpha \leq a < a + \epsilon \leq \beta$.

Exemples

1. Considerem un massa lligada a un resort elàstic, que és colpejada per un martell en l'instant $t = 0$, i li comunica un impuls total de A, durant l'interval $[a, a + \epsilon]$.
2. En un circuit senzill en sèrie, és produeix un canvi brusc de tensió en l'interval $[a, a + \epsilon]$.

$$e(t) = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(u)du.$$

Si derivem:

$$f_\epsilon(t) = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C}I(t).$$

El canvi de tensió en $[a, a + \epsilon]$ és igual a A.

D'ara en endavant assumirem que $A = 1$.
La funció $f_0(t)$, no és una funció en el sentit de les estudiades en cursos anteriors, ja que la seva descripció passaria per a fer límit $f_\epsilon(t)$ quan $\epsilon \to 0$, és a dir,

$$\begin{cases} f_0(t) = 0, & t \neq a; \\ \int_\alpha^\beta f_0(y)dt = 1, & \alpha \leq a < \beta. \end{cases}$$

Ara bé, per treballar amb funcions impulsives no és necessari conèixer la funció. El que cal és poder integrar productes on aparegui com a factor.

Lema

Si $g(t)$ és contínua en $[\alpha, \beta]$, aleshores

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f_{\epsilon}(t) dt = \begin{cases} g(a), & \text{per } \alpha \leq a < \beta; \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

demostració Estudiem el cas $\alpha \leq a < \beta$. Com $\alpha < \beta$ existeix ϵ tal que $\alpha < a < a + \epsilon \leq \beta$, per tant,

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) f_{\epsilon}(t) dt = \int_{a}^{a+\epsilon} g(t) f_{\epsilon}(t) dt.$$

Considerant: $m_{\epsilon} = \min_{[a,a+\epsilon]} g(t)$ i $M_{\epsilon} = \max_{[a,a+\epsilon]} g(t)$, acotem:
$m_{\epsilon} \int_a^{a+\epsilon} f_{\epsilon}(t) dt \leq \int_a^{a+\epsilon} g(t) f_{\epsilon}(t) dt \leq M_{\epsilon} \int_a^{a+\epsilon} f_{\epsilon}(t) dt$.
Però, per la continuïtat de $g(t)$: $\lim_{\epsilon \to 0} m_{\epsilon} = g(a) = \lim_{\epsilon \to 0} M_{\epsilon}$.
En els altres casos, sempre podrem trobar un ϵ pel qual la funció f_{ϵ} s'anul·la en el domini d'integració.

Definició

La funció $\delta(t-a)$ és la funció que fa que per a tota funció contínua $g(t)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\delta(t-a)dt = \begin{cases} g(a), & \text{per } \alpha \leq a < \beta; \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

D'aquí,

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\delta(t-a)dt = e^{-sa}.$$

En particular, per $a = 0$ obtenim:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Exemple

Per resoldre el PVI:

$$y'' + y = 3\delta(t-\pi),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0,$$

transformem l'equació (usant les c.i.):

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = 3e^{-\pi s},$$

aillant $Y(s)$ obtenim:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$

Identificant la transformada inversa:

$$y(t) = \cos t + 3\sin(t-\pi)u(t-\pi) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < \pi; \\ \cos t - 3\sin t, & t \ge \pi. \end{cases}$$

Dividir i multiplicar per s

Dividir per s:

$$\frac{F(s)}{s} = \mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\}.$$

Multiplicar per s:

$$sF(s) = \mathcal{L}\{f'(t) + f(0)\delta(t)\}.$$

Exemples

1. Troba una antitransformada de $\dfrac{s+3}{s(s^2+4)}$.
2. Troba una antitransformada de $\dfrac{s(s+3)}{s^2+4}$.

Índex

Introducció

Definició. Exemples. Teorema d'existència

Propietats operacionals de la transformada

Altres propietats

Inversió per descomposició en fraccions simples
- α arrel de multiplicitat r de $Q(s)$
- $\alpha + \beta j$ arrel de $Q(s)$

Funció de Heaviside

La funció δ de Dirac

Convolució

Convolució

Quan la transformada d'una funció $y(t)$ és producte de dues transformades conegudes: $Y(s) = H(s)F(s)$, on $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ i $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, a partir de la convolució de f i g és possible calcular y.

Definició La convolució de f amb g es defineix:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

Exemples

1. $f(t) = t^2$ i $g(t) = 1$. Calculem $(f * g)(t) =$

$$= \int_0^t (t-u)^2 du = \int_0^t (u-t)^2 du = [\frac{1}{3}(u-t)^2]_{u=0}^{u=t} = \frac{1}{3}t^3.$$

2. $f(t) = \cos t$ i $g(t) = \cos t$. Calculem $(f * g)(t) =$

$$= \int_0^t \cos(t-u)\cos u du \underbrace{=}_{F.Trig} \frac{1}{2}\int_0^t (\cos t + \cos(t-2u)du =$$

$$= \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{4}sin(t-2u)\Big|_0^t = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t).$$

Algunes fórmules trigonomètriques:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$$

$$\sin A \sin B = \frac{-1}{2}(\cos(A+B) - \cos(A-B))$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$$

Propietats

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $f * 0 = 0 * f = 0$

   Ara bé, compte perquè en general.
5. $f * 1 \neq f$ (Exemple 1.)
6. $f * f \neq f^2$ (Exemple 2.)

Teorema de convolució

Teorema

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Exemples

1. Considerem $H(s) = \dfrac{a}{s^2(s^2+a)}$, és a dir, $H(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$, on $f(t) = t$ i $g(t) = \sin(at)$. D'aquí,

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t (t-u)\sin(au)du = \ldots = \frac{at - \sin(at)}{a^2}.$$

2. Considerem el grup de PVI:

$$y'' + y' = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

transformem l'equació (usant les c.i.):

$$s^2 Y(s) + sY(s) = F(s),$$

aillant $Y(s)$ obtenim:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s} F(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) F(s).$$

$$Y(s) = \tfrac{1}{s^2+s}F(s) = \left(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{s+1}\right)F(s).$$

Com $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{1 - e^{-t}\}$. La transformada inversa és

$$y(t) = (h * f)(t) \int_0^t (1 - e^{t-u}) f(u) du,$$

on $h(t) = 1 - e^{-t}$. Expressió que dóna de forma compacta les solucions del PVI a partir de la funció $f(t)$.

Observació

La funció $\dfrac{1}{s^2+s}$ s'anomena funció de transferència del sistema i la seva transformada inversa, s'anomena funció resposta a l'impuls.