Tema 4. Aplicacions lineals i diagonalització.

Algebra i Geometria. EETAC

S.C. López. Matemàtica Aplicada IV. UPC

Índex

Aplicació lineal

Una aplicació $f : E \to F$ entre dos K-ev ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) és lineal si:

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$, per a tota parella $u, v \in E$, i
- $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, per a tota $\alpha \in K$, i per a tot $u \in E$.

Equivalentment,

- $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, per a tota $\alpha, \beta \in K$ i per a tota parella $u, v \in E$.

Exemples

1. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ definida per $f(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$
2. $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definida per $f(p(x)) = p(0)$.
3. $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida per $f(A) = \mathrm{Tr}\, A$.
   Però no ho és l'aplicació que a cada matriu quadrada li assigna el seu determinant (si $n > 1$).
4. $f : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{n\times m}$ definida per $f(A) = A^t$.
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y) = (x + y, x - 2y, 0)$.

Propietats

1. $f(0_E) = 0_F$ i $f(-v) = -f(v)$
2. E_1 és un s.v. de E aleshores $f(E_1)$ és un s.v. de F.

   De fet, si $E_1 =< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ aleshores,

   $$f(E_1) =< f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k) > .$$

   $\Rightarrow f(E)$ s'anomena imatge de f i s'escriu $\mathrm{Im} f$.
3. F_1 és un s.v. de F aleshores $f^{-1}(F_1)$ és un s.v. de E, on $f^{-1}(F_1) = \{u \in E : \ f(u) \in F_1\}$.

   $\Rightarrow f^{-1}(\{0_F\})$ s'anomena nucli de f i s'escriu $\mathrm{Nuc}\ f$.

L'espai vectorial de les aplicacions lineals

El conjunt de les aplicacions lineals de E en F (com K-ev) es denota amb $\mathcal{L}_K(E,F)$. Considerem $f,g \in \mathcal{L}_K(E,F)$ i $\lambda \in K$.

Suma $f+g$ és l'aplicació (lineal) definida per

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u).$$

Producte per escalar $\lambda \cdot f$ és l'aplicació (lineal) definida per

$$(\lambda \cdot f)(u) = \lambda f(u).$$

Aquestes dues operacions defineixen una estructura d'espai vectorial en $\mathcal{L}_K(E,F)$.

Unicitat de l'aplicació

Proposició

Donada una base $B = \{u_i : \; i \in I\}$ de E i un conjunt (qualsevol) de vectors $\{w_i : \; i \in I\}$ de F, existeix una única aplicació lineal $f : E \to F$ tal que $f(u_i) = w_i$, $i \in I$.

Observacions

1. Per trobar la imatge de qualsevol altre vector $u \in E$, considerem la combinació lineal (única) $u = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i$. Aleshores,
$$f(u) = \sum_{i \in I} \alpha_i w_i.$$
2. És a dir, l'aplicació lineal queda determinada si coneixem les imatges d'una base de l'espai E.

Matriu d'una aplicació lineal

Sigui $B_1 = \{u_i\}_{i=1}^n$ una base de E i $B_2 = \{v_j\}_{j=1}^m$ una base de F.
Les imatges de B_1 per f expressades en B_2:

$$f(u_i) \in F: \; f(u_i) = \sum_{j=1}^m a_i^j v_j \to f(u_i) = (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^m)_{B_2}.$$

La matriu associada a f en les bases B_1 de E i B_2 de F és:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$$

(la columna i-èssima són les coordenades de $f(u_i)$ en la base de F.)

Propietat

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

on $u \in E$,
$u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{B_1}$
$f(u) = (\beta_1, \ldots, \beta_m)_{B_2}$.

Demostració Com l'aplicació f és lineal $f(u) =$

$$= f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sum_{j=1}^{m} a_i^j v_j) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^j) v_j.$$

Exemples

1. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ definida per $f(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$
   La matriu associada a f en les bases $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\{1, x\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$ és: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida per $f(p(x)) = p(0)$.
   La matriu associada a f en les bases $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ és: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida per $f(A) = \mathrm{Tr}\, A$. La matriu associada a f en les bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ i $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ és: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $f : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ definida per $f(A) = A^t$. La matriu associada a f en la base (sortida i arribada)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ és: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y) = (x + y, x - 2y, x - y)$. La matriu associada a f en les bases $\{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}_2$ i $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}_3$ és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

.

Observació Si A és la matriu associada a f en les bases B_1 de E i B_2 de F i té inversa, aleshores, A^{-1} és la matriu associada a f^{-1} en les bases B_2 de F i B_1 de E.

Matriu de la suma/producte per escalar

Propietats

Donats dos K-e.v. E i F, i
dues bases, $B_1 = \{u_i\}_{i=1}^n$ de E i $B_2 = \{v_j\}_{j=1}^m$ de F.
Considerem

$$f, g \in \mathcal{L}_K(E, F), \text{ i } A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

Si A és la matriu associada a f i B la matriu associada a g en les bases B_1 de E i B_2 de F, aleshores

(i) $A + B$ és la matriu associada a $f + g$,

(ii) λA és la matriu associada a λf,

en les bases B_1 de E i B_2 de F.

Matriu de la composició

Propietats

Donats tres K-e.v. E, F i G i les bases $B_1 = \{u_i\}_{i=1}^n$ de E, $B_2 = \{v_j\}_{j=1}^m$ de F i $B_3 = \{e_k\}_{k=1}^l$ de G. Considerem

$$f \in \mathcal{L}_K(E, F),\ g \in \mathcal{L}_K(F, G), \text{ i } A \in \mathcal{M}_{m\times n},\ B \in \mathcal{M}_{l\times m}.$$

Si A és la matriu associada a f en les bases B_1 de E i B_2 de F, B és la matriu associada a g en les bases B_2 de F i B_3 de G aleshores,

(i) $g \circ f$ és una aplicació lineal de E en G, i

(ii) BA és la matriu associada a $g \circ f$ en les bases B_1 de E i B_3 de G.

Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Donada $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$:

$$\text{Nuc } f = \{u \in E : \ f(u) = 0\} \text{ i } \text{Im } f = \{f(u) : \ u \in E\}.$$

Proposició $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$ i E un e.v. de dimensió finita, aleshores

$$\dim E = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.$$

Demostració Considerem una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ del Nuc f (si aquest és diferent de 0) i l'ampliem a una base $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ de E.

Aleshores, $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ és una base de Im f. (Cal demostrar que són s.generadors i l.independents).

Proposició
$f \in \mathcal{L}_K(E,F)$ f és injectiva si i només si Nuc $f = 0$.

Notació La dimensió de Im f s'anomena rang de f (rg f).
Una aplicació lineal:

- injectiva s'anomena *monomorfisme*.
- exhaustiva s'anomena *epimorfisme*.
- bijectiva s'anomena *isomorfisme*.
- d'un espai en si mateix s'anomena *endomorfisme*.

Un *automorfisme* és un endomorfisme bijectiu.

Proposició
$f \in \mathcal{L}_K(E, F)$, $\{u_i\}_{i=1}^n$ una base de E. Aleshores,

- Si f és monomorfisme $\{f(u_i)\}_{i=1}^n$ són l. independents.
- Si f és epimorfisme $\{f(u_i)\}_{i=1}^n$ són un s. de generadors de F.
- Si f és isomorfisme $\{f(u_i)\}_{i=1}^n$ és una base de F.

Corol·lari Si existeix un isomorfisme entre E i F (escriurem $E \simeq F$), aleshores, dim $E =$ dim F. En cas de dimensió finita, si dim $E =$ dim $F < +\infty$, aleshores $E \simeq F$.

Proposició Si dim E i dim $F < +\infty$

$$\dim \mathcal{L}_K(E,F) = \dim E \cdot \dim F.$$

Exercicis $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$. Considerem $\{u_i\}_{i=1}^k \subset E$ un conjunt (qualsevol) de vectors.

1. $\{u_i\}_{i=1}^k$ són l.d. aleshores, $\{f(u_i)\}_{i=1}^k$ són l.d. Per tant, si $\{f(u_i)\}_{i=1}^k$ són l.i. es té que $\{u_i\}_{i=1}^k$ són l.i.
2. Suposem que f és un monomorfisme. Si $\{u_i\}_{i=1}^k$ són l.i. aleshores, $\{f(u_i)\}_{i=1}^k$ són l.i. Per tant, $\{f(u_i)\}_{i=1}^k$ són l.d. implica que $\{u_i\}_{i=1}^k$ són l.d.
3. Suposem que $S \subset E$. Aleshores, $f(< S >)) =< f(S) >$. En particular, $E =< S >$ implica Im $f =< f(S) >$. (Les imatges d'un sistema de generadors de E són un sistema de generadors del subespai imatge.)

Canvis de base i aplicacions lineals

Fixades B_1 base de E i B_2 una base de F, a tota $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ li correspon una matriu associada A. Si canviem les bases (una o les dues) obtindrem una nova matriu associada B.

Objectiu: Veure que les matrius A i B estan relacionades a través de les matrius de canvi de base dins de cada e.v.

Considerem el diagrama següent:

$$E \xrightarrow{Id_E} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{Id_F} F$$

la composició d'aquestes aplicacions:

$$Id_F \circ f \circ Id_E = f$$

ja que: $(Id_F \circ f \circ Id_E)(u) = Id_F(f(Id_E(u))) = Id_F(f(u)) = f(u)$.

Donades B_1, B_1' bases de E i B_2, B_2' bases de F, considerem:

- P la matriu associada a Id_E en les bases B_1' de sortida i B_1 d'arribada. És a dir, la matriu que té per columnes els vectors de la base de B_1' expressats en la base B_1. Observem que aquesta és la matriu de canvi de base de B_1' a B_1 en l'espai E.
- A la matriu associada a f en les bases B_1 de sortida i B_2 d'arribada. És a dir, la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base de B_1 expressats en la base B_2.
- Q la matriu associada a Id_F en les bases B_2' de sortida i B_2 d'arribada. És a dir, la matriu que té per columnes els vectors de la base de B_2' expressats en la base B_2. Observem que aquesta és la matriu de canvi de base de B_2' a B_2 en l'espai F.

Aleshores, la matriu associada a f en les bases B_1' de E i B_2' de F és:

$$Q^{-1}AP.$$

$$\text{ja que, } E_{B_1'} \xrightarrow{Id_E} E_{B_1} \xrightarrow{f} F_{B_2} \xrightarrow{Id_F} F_{B_2'} \Leftrightarrow Id_F \circ f \circ Id_E = f.$$

Donades B_1, B_1' bases de E i B_2, B_2' bases de F, considerem:

- P la matriu associada a Id_E en les bases B_1' de sortida i B_1 d'arribada. És la matriu de canvi de base de B_1' a B_1 en l'espai E. És a dir,
$$Pu_{B_1'} = u_{B_1}.$$
- A la matriu associada a f en les bases B_1 de sortida i B_2 d'arribada. És a dir,
$$Au_{B_1} = f(u)_{B_2}.$$
- Q la matriu associada a Id_F en les bases B_2' de sortida i B_2 d'arribada. És la matriu de canvi de base de B_2' a B_2 en l'espai F. En particular,
$$Q^{-1}f(u)_{B_2} = f(u)_{B_2'}.$$

Aleshores, la matriu associada a f en les bases B_1' de E i B_2' de F és: $Q^{-1}AP$. Ja que,

$$(Q^{-1}AP)u_{B_1'} = Q^{-1}A(Pu_{B_1'}) = Q_{-1}(Au_{B_1}) = Q^{-1}f(u)_{B_2} = f(u)_{B_2'}.$$

La matriu associada a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + y)$, en les bases $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}_3$ i $B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}_2$ és: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Introduïm les bases
$B'_1 = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}_3$ i
$B'_2 = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)$ de $\mathbb{R}_2$.
Per trobar la matriu associada en les bases B'_1 de $\mathbb{R}_3$ i B'_2 de $\mathbb{R}_2$, podem optar per dues opcions:

Opció A

Trobem $\left\{ \begin{array}{l} f(u_1) = (3, 2) = \frac{5}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) = \frac{5}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \\ f(u_2) = (0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \\ f(u_3) = (1, 1) = (1, 1) = v_1 + 0v_2 \end{array} \right.$.

Aleshores, la matriu és: $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Opció B

Trobem la matriu P de canvi de base en $\mathbb{R}_3$ de B_1' a B_c i la matriu Q de canvi de base en $\mathbb{R}_2$ de B_2' a B_c.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Aleshores, la matriu associada a f en les bases B_1' de $\mathbb{R}_3$ i B_2' de $\mathbb{R}_2$ és:

$$Q^{-1}AP = Q^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicacions lineals i sistemes

Donat un sistema d'equacions lineals a coeficients en K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$):

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

Podem identificar-lo amb una aplicació lineal de K^n en K^m que en les bases canòniques té matriu associada A.

$$Ax = b : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

D'aquí que, les solucions del sistema són les antiimatges de b per l'aplicació lineal.

Existència de solucions

Existeix un vector $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $f(x) = b$ si i només si $b \in \mathrm{Im}\ f$.
És a dir, si i només si,

$$< f(e_1), \dots, f(e_n) > = < f(e_1), \dots, f(e_n), b >,$$

on $\{e_i\}_{i=1}^n$ és la base canònica de $\mathbb{K}^n$. Però com,

$$< f(e_1), \dots, f(e_n) > \subset < f(e_1), \dots, f(e_n), b >$$

això passa, si i només si, $\mathrm{rg}\ f = \dim < f(e_1), \dots, f(e_n), b >$.
És a dir, si i només si,

$$\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}(A|b).$$

En aquest cas, es té que f és

- injectiva si i només si $\mathrm{rg}\ A = n$ (solució única).
- exhaustiva si i només si $\mathrm{rg}\ A = m$.
- bijectiva si i només si $\mathrm{rg}\ A = n = m$.

Principi de superposició

En una aplicació lineal f dos vectors x, y tenen la mateixa imatge:

$$f(x) = f(y) \text{ si i només si, } x - y \in \text{Nuc } f.$$

Així, donada una solució x del sistema $f(x) = b$, qualsevol altra solució y del mateix s'expressa com:

$$y = x + u, u \in \text{Nuc } f.$$

Exemple

El sistema $\left\{\begin{array}{ccc} x + y + z & = & 2 \\ x - z & = & 2 \\ x + 2y + 3z & = & 2 \end{array}\right.$ té matriu ampliada (intercanviant les equacions 1a i 2a)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

D'aquí obtenim el sistema equivalent:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & 2 \\ y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \to \{z = -14y; x = -11z\}.$$

És a dir, $\{(2+z, -2z, z) = (2,0,0) + z(1,-2,1) : \ z$ qualsevol$\}$.
Observem que:

- $(2,0,0)$ és una solució, i que
- Nuc $A =< (1,-2,1) >$.

Índex

Diagonalització de matrius

$f \in End(E)$ amb dim $E < +\infty$ és diagonalitzable si existeix una base $B' = \{u_i\}_{i=1}^n$ tal que la matriu associada és diagonal:

$$f \overset{\{u_i\}}{\leftrightarrow} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

És a dir, si existeixen uns vectors $B' = \{u_i\}_{i=1}^n$ linealment independents i unes constants $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ tals que $f(u_i) = \lambda_i u_i$, per a tota $i = 1, \dots, n$.

Si A és la matriu associada a f en la base B, i P és la matriu de canvi de base de B' a B, aleshores $P^{-1}AP$ és una matriu diagonal.

Direm que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ és una matriu diagonalitzable si existeix una matriu $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $P^{-1}AP$ és una matriu diagonal.

Valors i vectors propis

Donada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ i un vector $v \in K^n$, $v \neq 0$, direm que v és un vector propi de valor propi $\lambda \in K$ si $Av = \lambda v$.

Exemple

El vector $v = (-11, -1, 14)$ és un vector propi de valor propi -2 de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, ja que

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \\ -28 \end{pmatrix}.$$

És a dir,

$$Av = -2v.$$

Observació $v \neq 0$. Les frases següents són equivalents.

- v és un vector propi de valor propi λ de la matriu A.
- $Av = \lambda v$.
- $Av - \lambda v = 0$.
- $(A - \lambda Id)v = 0$. És a dir, si i només si, $v \in \mathrm{Nuc}(A - \lambda Id)$.

D'aquí obtenim:

Proposició
λ és un valor propi de A si i només si, $\det(A - \lambda Id) = 0$.
Demostració
λ és un valor propi de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ si i només si, $\mathrm{Nuc}(A - \lambda Id) \neq 0$. És a dir, si i només si, $\dim \mathrm{Im}(A - \lambda Id) < n$. I això passa, si i només si, $\det(A - \lambda Id) = 0$.

Polinomi característic

Donada una matriu $A = (a_i^j) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ construïm el polinomi:

$$\det(A - xId) = \begin{vmatrix} a_1^1 - x & a_2^2 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - x & \dots & a_n^2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - x \end{vmatrix}.$$

S'anomena polinomi característic de la matriu i es denota amb $c_A(x)$. Les seves arrels són els valors propis de la matriu.

Exemple El polinomi característic de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$:

$$c_A(x) = det(A - xId) = \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 3 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 3 & -1-x \end{vmatrix}.$$

D'aquí, substituïm $F_3 \to F_3 - F_2$ obtenim

$$= \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 3 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 2+x & -2-x \end{vmatrix} = (2+x) \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 3 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

I substituint la C_2 per $C_3 + C_2$ obtenim:

$$= (2+x) \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(2+x)((2-x)^2 - 1) =$$

$$c_A(x) = -(2+x)(3-x)(1-x).$$

Els valors propis de la matriu són les arrels de $c_A(x)$: $\{-2, 1, 3\}$.

Proposició

Vectors propis de valors propis diferents són l. independents.

demostració Per inducció. Suposem que v_i és un vep de vap λ_i de A, per $i = 1, \dots, m$, i que $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$.

- Si $m = 1$, v_1 és l. ind., ja que per definició $v_1 \neq 0$.
- Suposem cert el resultat si tenim r vap's diferents. Considerem: $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = 0$. D'aquí, $(A - \lambda_{r+1} Id)(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1}) = 0$. És a dir,

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})v_1 + \ldots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})v_r = 0,$$

una comb. lineal igualada a zero de vectors, que per h.i. són l. ind. Per tant, els seus coeficients han de ser tots zero:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = \ldots = \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

$\rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$. De retruc, també $\alpha_{r+1} = 0$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ és diagonalitzable, ja que el seu polinomi característic $c_A(x) = -(2+x)(3-x)(1-x)$, té tres arrels diferents. És a dir, A té tres vap's diferents: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 3$. Com cada vap aporta un vep, i vep's de vap's diferents són l. ind., podem completar una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ (on u_i representa un vep de vap λ_i).

D'aquí, $P^{-1}AP = D$, on:

- P és la matriu que té per columnes els vectors de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$,
- D és la matriu diagonal $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

A partir dels vap's trobem una base de vep's.

Vector propi de valor propi $\lambda_1 = -2$.

Plantegem:

$$A{+}2Id = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -14 & -1 \end{pmatrix}.$$

El nucli de $A + 2Id$ són els vectors solució del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y + z & = & 0 \\ -14y - z & = & 0 \end{array} \right. \to \{z = -14y; x = -11z\}.$$

És a dir, $\mathrm{Nuc}(A + 2Id) =< (-11, 1, -14) >$ i $u_1 = (-11, 1, -14)$ és un vector propi de valor propi -2.

Vector propi de valor propi $\lambda_2 = 1$.

Plantegem: $A - Id = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$
$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. El nucli de $A - Id$ són els vectors solució del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right. \rightarrow \{z = y; x = -z\}.$$

És a dir, $\mathrm{Nuc}(A - Id) =< (-1, 1, 1) >$ i $u_2 = (-1, 1, 1)$ és un vector propi de valor propi 1.

Vector propi de valor propi $\lambda_3 = 3$.

Plantegem: $A - 3Id = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. El nucli de $A - 3Id$ són els vectors solució del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x - 2y + 3z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right. \rightarrow \{z = y; x = z\}.$$

És a dir, $\mathrm{Nuc}(A - Id) =< (1, 1, 1) >$ i $u_3 = (-1, 1, 1)$ és un vector propi de valor propi 3. D'aquí, la matriu:

$$P = \begin{pmatrix} -11 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -14 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ té polinomi característic:

$$c_A(x) = (3-x)^2(5-x).$$

D'entrada, no podem afirmar que la matriu sigui diagonal perquè només tenim dos valors propis diferents: 3 (amb multiplicitat algebraica 2) i el 5 (amb multiplicitat algebraica 1).

Hem d'estudiar si és possible completar una base amb tres vep's l.independents.

Vector propi de valor propi $\lambda_1 = 3$.

Plantegem:

$$A - 3Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El nucli de $A - 3Id$ són els vectors solució del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \end{array} \right. \to \{z = x + y\}.$$

És a dir,
$\mathrm{Nuc}(A - Id) = \{(x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ i $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1)$ són dos vectors propis l.i. de valor propi 3.

Vector propi de valor propi $\lambda_2 = 5$.

Plantegem: $A - 5Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. El nucli de $A - 5Id$ són els vectors solució del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right. \to \{z = y; x = z\}.$$

És a dir, $\mathrm{Nuc}(A - 5Id) =< (1,1,1) >$ i $u_3 = (1,1,1)$ és un vector propi de valor propi 5. D'aquí, la matriu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Multiplicitat algebraica i geomètrica

Notació

Si λ és un valor propi de A, aleshores $c_A(x) = (x-\lambda)^m q(x)$, amb $q(\lambda) \neq 0$, implica, $1 \leq m$. A més,

- ✓ L'exponent m s'anomena *multiplicitat algebraica* i
- ✓ la dimensió del Nuc $(A - \lambda Id)$ s'anomena *multiplicitat geomètrica* del valor propi.

Lema

Si λ és un valor propi de A amb $c_A(x) = (x-\lambda)^m q(x)$ i $q(\lambda) \neq 0$, aleshores

$$\dim \mathrm{Nuc}(A - \lambda Id) \leq m.$$

Teorema de diagonalització

Teorema de diagonalització
Una matriu $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ és diagonalitzable en K, si i només si, el seu polinomi característic descompon en factors lineals i la multiplicitat de cada arrel (multiplicitat algebraica) coincideix amb la multiplicitat geomètrica del valor propi.

Exemples

1. La matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no és diagonalitzable.

2. La matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ no és diagonalitzable en $\mathbb{R}$, però si en $\mathbb{C}$.
És a dir, existeix una matriu $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tal que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & -j \end{pmatrix}.$$

Diagonalització d'endomorfismes

Lemma

Si $P^{-1}AP = B$ aleshores, $c_A(x) = c_B(x)$.

Observació

Per decidir si un endomorfisme és diagonalitzable, estudiem si la matriu associada a l'endomorfisme (en una base fixada) és diagonalitzable.