Tema 3. Espais Vectorials.

Algebra i Geometria. EETAC

S.C. López. Matemàtica Aplicada IV. UPC

Índex

L'espai vectorial $\mathbb{R}^2$

Denotem amb $\mathbb{R}^2$ el conjunt:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

que geomètricament s'identifica amb els vectors del pla amb origen a l'origen de coordenades. Els seus elements s'anomenen **vectors**.

Suma de vectors (operació interna)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Producte per escalar (operació externa)

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

genera un altre vector que té la mateixa direcció; el mateix sentit si $\lambda > 0$, (o sentit contrari per $\lambda < 0$) i té mòdul $|\lambda \overrightarrow{v}| = |\lambda||\overrightarrow{v}|$.

$(\mathbb{R}^2, +)$ és un grup commutatiu, ja que la suma verifica les propietats:

- Associativa i commutativa.
- Existeix l'element neutre: $\overrightarrow{0} = (0,0)$.
- Cada vector té un simètric (o oposat): $\overrightarrow{v} = (x,y) \rightarrow -\overrightarrow{v} = (-x,-y)$.

I el producte per escalar compleix les propietats:

- $\lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ i
- $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$ (Doble propietat distributiva)
- $(\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{u})$ (Propietat associativa)
- $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ (Element neutre)

Qualsevol altre conjunt, amb una suma (operació interna) i un producte per escalar, real, (operació externa) que compleixi les mateixes propietats que $\mathbb{R}^2$ direm que és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$. Per exemple, els polinomis $\mathbb{R}[x]$ i les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Habitualment treballarem amb $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,|x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

amb suma

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

i producte per escalar

$$\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

K-espai vectorial

Donat un grup commutatiu $(E, +)$, un cos K (que serà $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) direm que E és un K-espai vectorial, o bé, E és un espai vectorial (e.v.) sobre K, si existeix una operació externa:

$$\begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, \overrightarrow{v}) & \mapsto & \lambda \cdot \overrightarrow{v} \in E \end{array}$$

complint les propietats següents:

- $\lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ i
- $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$ (Doble propietat distributiva)
- $(\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{u})$ (Propietat associativa)
- $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ (Element neutre)

Exemples

Amb el producte $\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$,

1. $\mathbb{C}^3$, és un $\mathbb{C}$-e.v. i també un $\mathbb{R}$-e.v.
2. $\mathbb{R}^3$ és un $\mathbb{R}$-e.v. però no un $\mathbb{C}$-e.v.

Observació

D'ara endavant, quan parlem de **constants** entendrem constants del cos sobre el que es defineix l'estructura d'espai vectorial. Anomenarem **vectors** als elements de l'espai.

Propietats

E un K-e.v. Aleshores,

1. $0 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, \forall \overrightarrow{v} \in E$.
2. $\alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}, \forall \alpha \in K$.
3. $\alpha \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ implica, o bé $\alpha = 0$ o bé, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
4. $-1 \cdot \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$.

Subespais vectorials

Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$. $\emptyset \neq F \subset E$ és un subespai vectorial de E sobre sobre $\mathbb{K}$ (o bé, un $\mathbb{K}$-subespai vectorial) si

$$\begin{array}{ll} \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F & \Rightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \overrightarrow{u} \in F & \Rightarrow \alpha \overrightarrow{u} \in F \end{array}$$

En particular, $0 \in F$, (s'obté quan $\alpha = 0$;) i si $\overrightarrow{v} \in F$ aleshores $-\overrightarrow{v} \in F$ (s'obté quan $\alpha = -1$).

Exemples

- El conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x + y = 0\}$.
- El conjunt $\{\alpha(1, 2, -1) + \beta(0, 2, 0), \text{ on } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- El conjunt de polinomis reals, $\mathbb{R}[x]$, que s'anulen $x = 1$.

Combinació lineal

Un vector $\overrightarrow{v}$ és **combinació lineal** de $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ si existeixen uns nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tals que:

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{u_k}.$$

Notació

$$< \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k} >= \{\overrightarrow{v} | \ \overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{u_k}\}.$$

Exemples

1. En $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v} = (-2, 5, -4)$ és combinació lineal de $\{\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 2), \overrightarrow{u_2} = (-1, 1, -2)\}$, ja que:

$$(-2, 5, -4) = 3(1, 0, 2) + 5(-1, 1, -2).$$

2. En $\mathbb{R}^2$, és $\overrightarrow{v} = (2, 3)$ combinació lineal de $\{\overrightarrow{u_1} = (1, 1), \overrightarrow{u_2} = (2, -1)\}$?

2. En $\mathbb{R}^2$, és $\overrightarrow{v} = (2,3)$ combinació lineal de $\{\overrightarrow{u_1} = (1,1), \overrightarrow{u_2} = (2,-1)\}$?

Plantegem l'equació:

$$(2,3) = \alpha(1,1) + \beta(2,-1) \to (2,3) = (\alpha + 2\beta, \alpha - \beta),$$

és a dir,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta & = & 2 \\ \alpha - \beta & = & 3 \end{array} \right.$$

que té solució perquè:

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2| & 2 \\ 1 & -1| & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

Per tant, $\overrightarrow{v}$ combinació lineal de $\overrightarrow{u_1}$ i $\overrightarrow{u_2}$ i la resolució del sistema ens dóna els coeficients de la combinació: $\alpha = 8/3$ i $\beta = -1/3$.

Observació
La matriu de coeficients del sistema té com elements, els vectors $\overrightarrow{u_1}$ i $\overrightarrow{u_2}$ posats en columna.

De l'exemple anterior, és dedueix el següent criteri:

Caracterització
Donats $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k} \in \mathbb{K}^n$:
$\overrightarrow{v}$ és combinació lineal de $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ si i només si

$$\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}) = \mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}, \overrightarrow{v})$$

3. En $\mathbb{R}^3$, $\{(\lambda + \mu, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ és

$$< (1,1,0), (1,0,1) > .$$

Dependència lineal

Un conjunt de vectors $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ és **linealment dependent** si un dels vectors del conjunt és combinació lineal dels altres. Per contra, si cap dels vectors del conjunt és combinació lineal dels altres direm que és **linealment independent**.

Exemples

- El conjunt $\{(-2, 5, -4), (1, 0, 2), (-1, 1, -2)\}$ és linealment dependent, perquè $(-2, 5, -4) = 3(1, 0, 2) + 5(-1, 1, -2)$.
- També és l.d. el conjunt $\{(2, 3), (1, 1), (2, -1)\}$.
- El conjunt $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ és linealment independent.

Definició alternativa

Observacions

- Dos vectors són l.d. si i només si, són proporcionals.
- De l'expressió: $(-2,5,-4) = 3(1,0,2) + 5(-1,1,-2)$, es dedueix:

$$(-2,5,-4) - 3(1,0,2) - 5(-1,1,-2) = \overrightarrow{0}$$

és a dir, una combinació lineal de vectors igualada a zero, amb algun coeficient diferent de zero.

Criteri

El conjunt de vectors $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ és **linealment dependent** si i només si, existeix alguna combinació:

$$\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + \lambda_k u_k = \overrightarrow{0} \text{ amb almenys una } \lambda_i \neq 0.$$

Anàlogament,

el conjunt de vectors $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ és **linealment independent** si i només si, l'existència d'una combinació lineal igualada a zero:

$$\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + \lambda_k u_k = \overrightarrow{0} \textbf{ implica } \lambda_i = 0, \ \forall i.$$

Observació

$$\overrightarrow{u} \text{ és } \textit{l.dependent} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = 0.$$

Exemples

1. Donats $\{\overrightarrow{u_1} = (1, 1, -3), \overrightarrow{u_2} = (2, -2, 1), \overrightarrow{u_3} = (3, -1, -2)\}$, plantegem: $\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + \lambda_3 \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0}$. És a dir,

$$\lambda_1(1, 1, -3) + \lambda_2(2, -2, 1) + \lambda_3(3, -1, -2) = \overrightarrow{0}.$$

Operant i igualant components, s'arriba al sistema:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

que té per matriu ampliada: $(A|0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3|0 \\ 1 & -2 & -1|0 \\ -3 & 1 & -2|0 \end{pmatrix}$.

Com el det $A = 0$, el rg (A)=2, el sistema és compatible INDETERMINAT, i existeix una solució on no totes les λ's són zero. $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ són l.dep.

2. Donats $\{\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{v_2} = (0, 3, 1), \overrightarrow{v_3} = (-2, 1, 4)\}$, plantegem $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \lambda_3 \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$. És a dir,

$$\lambda_1(1, -1, 2) + \lambda_2(0, 3, 1) + \lambda_3(-2, 1, 4) = \overrightarrow{0}$$

Operant i igualant components, s'arriba al sistema:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 - 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

que té per matriu ampliada: $(A|0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2|0 \\ -1 & 3 & 1|0 \\ 2 & 1 & 4|0 \end{pmatrix}$.

Com el det $A \neq 0$, el rg(A)=3, el sistema és compatible DETERMINAT, i la solució és única: totes les λ's són zero. És a dir, els vectors són linealment independents.

Caracterització amb el rang

Donats $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_k} \in \mathbb{K}^n$. El conjunt de vectors $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}\}$ és **linealment dependent** si i només si,

$$\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}) < k$$

Anàlogament,

el conjunt de vectors $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}\}$ és **linealment independent** si i només si,

$$\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}) = k$$

Sistema de generadors

El conjunt de vectors $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ és un **sistema de generadors** de l'espai E si tot vector de E és pot escriure com a combinació lineal dels vectors de S.

Exemples

1. En $\mathbb{R}^3$, el conjunt $\{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\}$ és un sistema de generadors, ja que:
$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$
2. També ho és el conjunt:
$\{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1), \overrightarrow{e_4} = (1,1,1)\}$ és un sistema de generadors, ja que:
$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) + 0(1,1,1).$$

Base d'un espai vectorial

Els vectors $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ són **base** d' E si es compleix:

- $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ és un sistema de generadors de E
- $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ és un conjunt linealment independent.

Exemples

1. En $\mathbb{R}^2$, el conjunt $\{\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)\}$ és un base, s'anomena **la base canònica** de $\mathbb{R}^2$.
2. En $\mathbb{R}^3$, el conjunt $\{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\}$ és un base, s'anomena **la base canònica** de $\mathbb{R}^3$.
3. En $\mathbb{R}^2$, el conjunt $\{\overrightarrow{u_1} = (1,1), \overrightarrow{u_2} = (-1,1)\}$ és un base:
   - ✓ és un conjunt l.i. ja que els vectors no són proporcionals, i a més,
   - ✓ és un sistema de generadors, ja que per a tot (x, y) existeixen constants α, β:

$$(x, y) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1).$$

Bases i dimensió d'un espai

Teorema de Steinitz
Donada una base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ i un conjunt de vectors linealment independents $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}\}$ d'un espai vectorial E. Aleshores, $m \leq n$, i es pot completar els vectors $\{\overrightarrow{v_i}\}_{i=1,\ldots,m}$ amb vectors de la base fins obtenir una nova base de l'espai.

Teorema
Totes les bases d'un espai vectorial E tenen el mateix nombre de vectors, a aquest nombre se l'anomena **dimensió** de l'espai.

Exemples
La $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ mentre que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Observació
Si n és la dimensió d'un espai vectorial, qualsevol conjunt de n vectors linealment independents d'aquest espai forma una base.

Coordenades d'un vector en una base

Fixada una **base** $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ d'un espai vectorial, qualsevol vector $\overrightarrow{u}$ de l'espai és pot escriure, de forma única, com a combinació lineal dels vectors de la base:

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}.$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_B$ són les **coordenades** de $\overrightarrow{u}$ en la base B.

Exemples

1. En $\mathbb{R}^2$, les coordenades del vector $(1,5)$ en la base $B_c = \{\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)\}$ són $(1,5)_{B_c}$, ja que:

$$(1,5) = \mathbf{1}(1,0) + \mathbf{5}(0,1) \to (1,5) = (1,5)_{B_c}.$$

2. En $\mathbb{R}^2$, les coordenades del vector $(1,5)$ en la base $B' = \{\overrightarrow{u_1} = (1,1), \overrightarrow{u_2} = (-1,1)\}$ són $(3,2)_{B'}$ ja que:

$$(1,5) = \mathbf{3}(1,1) + \mathbf{2}(-1,1) \to (1,5) = (3,2)_{B'}.$$

Subespais vectorials

Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$. $\emptyset \neq F \subset E$ és un subespai vectorial de E sobre sobre $\mathbb{K}$ si

$$\begin{array}{ll} \forall \vec{u}, \vec{v} \in F & \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \vec{u} \in F & \Rightarrow \alpha \vec{u} \in F \end{array}$$

En particular, $0 \in F$, (s'obté quan $\alpha = 0$;) i si $\vec{v} \in F$ aleshores $-\vec{v} \in F$ (s'obté quan $\alpha = -1$).

Proposició

En un espai vectorial E de dimensió finita $(\dim E < +\infty)$ per a qualsevol subespai F de E es té:

$$\dim F \leq \dim E.$$

A més, si $\dim F = \dim E$ aleshores $E = F$.

Operacions entre subespais

Donats dos supespais vectorials F, G de E. Definim:
Intersecció

$$F \cap G = \{\overrightarrow{u} \in E : \ \overrightarrow{u} \in F, \ \overrightarrow{u} \in G\}.$$

Suma

$$F+G = \{\overrightarrow{w} \in E | \text{ existeixen } \overrightarrow{u} \in F, \ \overrightarrow{v} \in G \text{ tals } \ \text{que } \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\}.$$

Proposició

1. $F \cap G$ és un subespai vectorial de E (però també de F i de G).
2. $F + G$ és un subespai vectorial de E (el més petit dels subespais d'E que contenen F i G).

Fórmula de Grassmann

Juntant una base de F amb una base de G s'obté un sistema de generadors de $F+G$. És a dir, si $F = < \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_r >$ i $G = < \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s >$ aleshores:

$$F+G = < \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_s > .$$

Si del sistema de generadors triem un conjunt format pel màxim nombre de vectors linealment independents obtindrem una base.

Fórmula de Grassmann

Donats dos supespais vectorials F, G d'un espai vectorial E de dimensió finita és té que:

$$\dim\, F + \dim\, G = \dim\, (F \cap G) + \dim\, (F+G).$$

Suma directa

La suma de dos subespais F, G és directa quan $F \cap G = 0$. En aquest cas, escriurem $F \oplus G$

Proposició

$F + G$ és directa si i només si, qualsevol vector de la suma es pot escriure de manera única com a suma d'un vector de F més un vector de G.

Observació

Si la dimensió de l'espai és finita, usant la fórmula de Grassmann deduïm que:

$$F + G \text{ és directa} \Leftrightarrow \dim(F + G) = \dim F + \dim G.$$

Si la suma és directa, podem obtenir una base de la suma, unint una base de cada subespai.

Canvi de base i coordenades

$B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$, $B' = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ dues bases d'un espai E. Donat un vector $\overrightarrow{v} \in E$ considerem:

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}; \qquad \overrightarrow{v} = \mu_1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + \mu_n \overrightarrow{u_n}.$$

Suposem que les coordenades en l'altra base són, respectivament:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{u_1} = \alpha_1^1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_1^n \overrightarrow{e_n} \\ \ldots \\ \overrightarrow{u_n} = \alpha_n^1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_n^n \overrightarrow{e_n} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} = \beta_1^1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + \beta_1^n \overrightarrow{u_n} \\ \ldots \\ \overrightarrow{e_n} = \beta_n^1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + \beta_n^n \overrightarrow{u_n} \end{array} \right.$$

De forma compacta, podem introduir dues matrius:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix}; \qquad Q = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \ldots & \beta_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^n & \ldots & \beta_n^n \end{pmatrix}.$$

La matriu de canvi de base de B' a B: $P = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$,

(cada columna d'aquesta matriu conté les coordenades del vector corresponent de la base B' expressat en la base B).

La matriu de canvi de base de B a B': $Q = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^n & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix}$

(cada columna d'aquesta matriu, conté les coordenades del vector corresponent de la base B expressat en la base B').

Teorema

$$\begin{pmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^n & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{B'} .$$

La matriu de canvi de base de B a B', per les coordenades del vector en la base B, retorna les coordenades del vector en la base B'.

Demostració Considerem $\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\sum_{j=1}^{n} \beta_i^j \overrightarrow{u_j}) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \beta_i^j \lambda_i) \overrightarrow{u_j}.$$

És a dir, fixant-nos en les coordenades en la base B' deduïm:

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^1 \lambda_i;\ \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \lambda_i; \ldots; \mu_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^n \lambda_i.$$

Teorema La matriu de canvi de base de B a B' és inversa de la matriu de canvi de base de B' a B, i viceversa. És a dir,

$$PQ = QP = Id.$$

Combinació lineal i coordenades

Fixada una base $B = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E i donats $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k} \in E$: amb:

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}, \qquad \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{u_1} = \alpha_1^1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_1^n \overrightarrow{e_n} \\ \ldots \\ \overrightarrow{u_k} = \alpha_k^1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_k^n \overrightarrow{e_n} \end{array} \right. .$$

$\overrightarrow{v}$ és combinació lineal de $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ si i només si

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_k^n \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_k^1 & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_k^n & \lambda_n \end{array} \right).$$

Independència lineal i coordenades

Fixada una base $B = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E i donats $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k} \in E$: amb:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{u_1} = \alpha_1^1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_1^n \overrightarrow{e_n} \\ \ldots \\ \overrightarrow{u_k} = \alpha_k^1 \overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_k^n \overrightarrow{e_n} \end{array} \right. .$$

El conjunt de vectors $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ és **linealment dependent** si i només si, $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_k^n \end{pmatrix} < k$.

Anàlogament, el conjunt de vectors $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ és **linealment independent** si i només si, $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_k^n \end{pmatrix} = k$.