Tema 2. Matrius, determinants i sistemes d'equacions lineals.

Algebra i Geometria. EETAC

S.C. López. Matemàtica Aplicada IV. UPC

Índex

Index

Matrius

S'anomena matriu de dimensió $m \times n$, a tota distribució de $m \times n$ nombres de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

on a_{ij} és l'element que es troba en la fila i i en la columna j.

$\mathcal{M}_{m\times n}$ denota el conjunt de totes les matrius de dimensió $m \times n$.

Dues matrius són iguals, si són de la mateixa dimensió i tenen tots els elements iguals.

Casos especials, per la forma

- $n = 1$ matriu columna $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.
- $m = 1$ matriu fila $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.
- $n = m$ matriu quadrada (d'ordre n) $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Els elements a_{ii} constitueixen la diagonal principal de la matriu.
- Si $a_{ij} = a_{ji}$ s'anomena matriu simètrica, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i si $a_{ij} = -a_{ji}$ matriu antisimètrica, $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Casos especials, pels elements

- La matriu nul·la és la matriu que té tots els elements iguals a zero.
- Una matriu diagonal és una matriu quadrada on tots els elements de fora de la diagonal principal són zero. Si a més, tots són iguals s'anomena matriu escalar. Un cas concret de matriu escalar, és la matriu identitat, amb tots els elements de la diagonal iguals a 1.
- Si en una matriu tots els elements que es troben per sobre o per sota de la diagonal principal són zero, s'anomena matriu triangular, inferior o superior respectivament.

Suma

Donades dues matrius, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, amb $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, la seva suma és: $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Propietats

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Propietat associativa)
2. $A + B = B + A$ (Propietat commutativa)
3. $A + 0 = A$ (Element neutre)
4. Donada una matriu A, $-A$ indica la matriu que s'obté canviant els signes de tots els seus elements. S'anomena matriu oposada, i verifica: $A + (-A) = 0$

Producte per escalar

El producte d'una matriu $A = (a_{ij})$ per un nombre λ:
$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij})$.

Exemple

$$7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 21 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquesta operació verifica, respecte la suma, les propietats següents:

1. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
2. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (Doble propietat distributiva)
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$ (Propietat associativa)
4. $1 \cdot A = A$ (Element neutre)

Producte de dues matrius

Donades dues matrius, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times m}$, amb $A = (a_{kj}), B = (b_{ik})$, el producte BA és una altra matriu C de dimensió $p \times n$, on cada element c_{ij} es calcula segons la fórmula:

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{im}a_{mj}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{7} & 2 \\ \mathbf{3} & -2 \\ -\mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & 3 \\ 18 & 8 \end{pmatrix}.$$

Propietats

1. $A(BC) = (AB)C$ (Propietat associativa)
2. $A(B + C) = AB + AC$, i $(A + B)C = AC + BC$ (Propietat distributiva del producte respecte la suma)
3. Si A és una matriu quadrada , i $Id = diag(1, \ldots, 1)$ del mateix ordre, aleshores $A \cdot Id = Id \cdot A = A$ (Element neutre)

Ara bé, en general:

- El producte **no** és commutatiu $AB \neq BA$
- $AB = 0$ **no implica** necessàriament, $A = 0$ o $B = 0$
- $AB = AC$ **no implica** necessàriament, $B = C$
- $(A + B)^2$ **no és** necessàriament igual a $A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2$ **no és** necessàriament igual a $A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)(A - B)$ **no és** necessàriament igual a $A^2 - B^2$

Rang d'una matriu

Una fila F_i(o columna) és linealment dependent de les altres, si existeixen uns nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tals que:

$$F_i = \alpha_1 F_1 + \ldots + \overset{\wedge}{F_i} + \ldots + \alpha_m F_m,$$

on $\overset{\wedge}{F_i}$ vol dir que la fila F_i no hi surt. En cas contrari, es diu que és linealment independent.

Definició S'anomena rang d'una matriu al nombre màxim de files (o columnes) linealment independents.

Exemples

El $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$. En canvi, $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2$.

Transformacions elementals

El rang d'una matriu no canvia si:

1. Es permuten dues files (o columnes).
2. Si es multiplica una fila (o columna) per un nombre diferent de zero.
3. Si a una fila (o columna) se li suma una altra multiplicada per un nombre.
4. Si es suprimeix una fila (o columna) de zeros.

Exemple

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Index

Determinants

Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{M}_n$, s'anomena determinant de A al nombre que es calcula a partir dels elements de la matriu, tal com segueix:

- Si $n = 1$
- Si $n = 2$, $\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
- Si $n = 3$, $\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$
  $a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$
  (Regla de Sarrus)
- Per n (anomenat ordre del determinant) superiors, cal fer-ho de manera recursiva (o utilitzar permutacions).

Menor complementari. Menor adjunt

Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, el menor complementari de l'element a_{ij} és el determinant d'ordre $n-1$ que s'obté a partir de A quan es suprimeix la fila i la columna on es troba l'element.

Exemple

El menor complementari de 5 en la matriu $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ és el determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$.

S'anomena adjunt de l'element a_{ij} al menor complementari multiplicat per $(-1)^{i+j}$, el denotarem per A_{ij}.

Exemple

L'adjunt de 5 en l'exemple anterior és $(-1)^{1+2}5 = -5$, en canvi, l'adjunt de -1 és $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$.

Determinants d'ordre superior

El determinant d'una matriu $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, és igual a la suma dels productes dels elements de qualsevol fila (o columna) pels seus menors adjunts.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n} = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{11}A_{11} + \dots + a_{n1}A_{n1} = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \dots$$

(desenvolupant per la primera columna).

Però també,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \dots$$

(desenvolupant per la tercera fila).

Observació

Si una matriu és triangular, el seu determinant és el producte dels elements de la diagonal principal.

Exemple

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{5} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{vmatrix} = -100.$$

Propietats

1. El $\det A = \det A^t$, on A^t és la matriu transposada de A obtinguda intercanviant files per columnes. Totes les propietats per files, també seran vàlides per columnes.
2. Si es multiplica una fila (o columna) per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.
3. Si una matriu té dues files (o columnes) iguals, el determinant és zero.
4. Si s'intercanviem dues files (o columnes), el determinant canvia de signe.
5. Si hi ha una fila (o columna) de zeros, el determinant és zero.
6. Si una fila (columna) és una suma d'altres files (columnes) multiplicades per un nombre, aleshores el determinant és zero. En particular, si una matriu té dues files (columnes) proporcionals el seu determinant és zero.

8. Si a una fila (o columna) se li suma una altra fila (columna) multiplicada per un nombre, el determinant no canvia.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_2 \to F_2 - 5F_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -17 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_1 \to F_1 - 3F_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -11 & -17 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{C_3 \to C_3 - 2C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -20.$$

Rang de matrius per determinants

Teorema

En una matriu quadrada, les files (columnes) són linealment dependents si i només si, el seu determinant és igual a zero.

Proposició

El rang d'una matriu és el més gran dels ordres dels determinants, diferents de zero, obtinguts a partir de submatrius quadradades de la matriu.

Exemple

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \mathrm{rg}(A) = 3, \text{ ja que } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ i}$$

$$\det A = 0.$$

Inversa d'una matriu

Donada A una matriu quadrada, s'anomena inversa de A, a la matriu A^{-1} (si existeix, és única!) que compleix

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id \quad \text{on} \quad Id = diag(1, ..., 1)$$

Teorema

A té inversa si i només det $A \neq 0$.

Càlcul de la matriu inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^t$$

on A^* és la matriu dels adjunts de cada element.

Justificació

$$A (A^*)^t = \det A \cdot \; Id$$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = -2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = 1;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Equacions matricials

Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, amb determinant diferent de zero, aleshores, l'equació matricial $AX = B$ (la incògnita és una matriu X), té solució:

$$X = A^{-1}B.$$

Anàlogament, $XA = B$ té solució $X = BA^{-1}$.

Exemple

Siguin $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, altres equacions que poden considerar-se són, p.ex.:

- $XA = B + Id$
- $AX + B = C$
- $XA + B = 2C$
- $AX + BX = C$
- $XAB - XC = 2Id$

Index

Sistemes d'equacions lineals

Un sistema d'equacions lineals, és tota expressió de la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

on $x_1, \ldots, x_n$ són les incògnites, els a_{ij} són els coeficients, i els b_i són els termes independents.

En notació matricial, el sistema anterior s'expressa:

$$Ax = b : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

o equivalentment,

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Un sistema que admet solució s'anomena **compatible**:

- si la solució és única, s'anomena sistema **compatible deteminat**,
- si no és única, s'anomena sistema **compatible indeteminat**,

Els sistemes que no tenen cap solució, s'anomenen sistemes **incompatibles**.

Sistemes equivalents

Dos sistemes d'equacions són equivalents si tenen les mateixes solucions. Les següents transformacions elementals, permeten obtenir sistemes equivalents:

1. Intercanviar dues equacions.
2. Multiplicar una equació per un nombre diferent de zero.
3. Sumar a una equació una altra del sistema.

Teorema de Rouché-Frobenius

Donat el sistema $Ax = b$, denotem amb $(A|b)$ la matriu que s'obté a partir de A afegint com a darrera columna els termes independents, ($(A|b)$ s'anomena matriu ampliada). Aleshores:

1. El sistema és compatible si i només si $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(A|b)$.
   A més,
2. Si $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(A|b) = n^o$ d'incògnites, el sistema és compatible determinat; si en canvi $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(A|b) < n^o$ d'incògnites, és compatible indeterminat.

(n^o d'incògnites -$\mathrm{rg}A$ = *graus de llibertat*.)

Mètode de Gauss

Consisteix en resoldre el sistema triangular equivalent obtingut aplicant transformacions elementals al sistema original. El sistema triangular es resol fent servir subtitució endarrera, és a dir, començant per la darrera equació.

Exemple

Sistema compatible determinat

$$\left\{ \begin{array}{ccr} x + y + z & = & 2 \\ 2x + 3y + 5z & = & 11 \\ x - 5y + 6z & = & 29. \end{array} \right.$$

Sistema compatible indeterminat

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 2 \\ x-z & = & 2 \\ x+2y+3z & = & 2. \end{array}\right.$$

Sistema incompatible

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 2 \\ x-z & = & 2 \\ x+2y+3z & = & 24. \end{array}\right.$$

Mètode de Cramer

Donat el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

amb $\det A \neq 0$.

Resolució

La i-èssima incògnita surt del quocient entre el determinant de la matriu obtinguda a partir de la matriu de coeficients una vegada substituïda la columna i-èssima pel terme independent, i el determinant de la matriu de coeficients.

Exemple

Donat el sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 21 \\ 4x + 5y = 5 \end{cases}$, equivalent $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Les incògnites, que de forma independent, es calculen pel mètode de Cramer són:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{21} & -2 \\ \mathbf{5} & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{115}{23} = 5; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & \mathbf{21} \\ 4 & \mathbf{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-69}{23} = -3.$$

Exemple

El sistema $\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ x-y-2z=-2 \\ 3x-2y-3z=-1 \end{array}\right.$, equivalent $Ax=b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

té solució:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ -\mathbf{2} & -1 & -2 \\ -\mathbf{1} & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\det A};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & -\mathbf{2} & -2 \\ 3 & -\mathbf{1} & -3 \end{vmatrix}}{\det A};\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{1} \\ 1 & -1 & -\mathbf{2} \\ 3 & -2 & -\mathbf{1} \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Amb el determinant dels coeficients zero

També es pot fer servir el mètode de Cramer, quan el determinant és zero, si el sistema és compatible:

El sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ x-z & = & 2 \\ x+2y+3z & = & 2 \end{array}\right.$

és compatible indeterminat (es comprova!), per tant, podem eliminar la darrera equació i plantejar: $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2-z \\ x & = & 2+z \end{array}\right.$, a partir d'aquí

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ 2+z & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = 2+z; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 1 & 2+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -2z.$$

Mitjançant matriu inversa

Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, amb determinant diferent de zero, aleshores, l'equació matricial $Ax = b$ té solució:

$$x = A^{-1}b.$$

Exemple

Donat el sistema $\left\{ \begin{array}{r} 3x - 2y = 21 \\ 4x + 5y = 5 \end{array} \right.$, equivalent $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix}$, la solució és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

És a dir, $\{x = 5;\ y = -3\}$.