Geometria

Tema 6: Varietats parametritzades (8 h)

Adaptat per Marta Casanellas dels resums de Geometria de J. Amorós i M. Casanellas i de les transparències de J. Puig.

Primavera 2024

Outline

Corbes parametritzades

Definició

Una **corba parametritzada** C és una aplicació $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$, injectiva (o localment injectiva) on $I \subseteq \mathbb{R}$ és un interval. L'aplicació γ s'anomena **parametrització**.

Exemples:

- Corbes planes ($n = 2$). Ex: a $\mathbb{R}^2$, cercle de radi $R > 0$ centrat un punt (a, b):

$$\gamma(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t)\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Corbes a l'espai ($n = 3$). Ex: una *hèlice* és la corba de l'espai parametritzada per

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)\,, \quad t \in \mathbb{R},\ a, b > 0.$$

Notació: $\dot{\gamma}(t)$ és el vector de derivades $\dot{\gamma}(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$.

Parametritzacions regulars

Definició

Una parametrització γ d'una corba C és **regular en** t_0 si $\dot{\gamma}(t_0) \neq \vec{0}$ (i γ que és **regular** si ho és en tots els seus punts). Si γ és regular en t_0 i $P = \gamma(t_0) \Rightarrow$

$$T_P C = P + [\dot{\gamma}(t_0)] \qquad N_P C = P + [\dot{\gamma}(t_0)]^{\perp}.$$

Per exemple, la **gràfica d'una funció** $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, és la corba plana parametritzada C

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (x, h(x))$$

i és també la corba implícita $y - h(x) = 0$.
En $P = \gamma(x_0) = (x_0, h(x_0)) \in C$ tenim $\dot{\gamma}(x_0) = (1, h'(x_0)) \Rightarrow$ és corba regular i $T_P C = P + [(1, h'(x_0)]$, $N_P C = P + [(-h'(x_0), 1)]$.

Relació amb el teorema de la funció implícita

- Pel Ta. funció implícita, si $C \subset \mathbb{R}^2$ ve definida per equació implícita $f(x, y) = 0 \Rightarrow C$ també és corba parametritzada, al menys al voltant d'un punt P no singular. En efecte, si $P \in C$ és no singular $\Rightarrow$
  - o bé $f_x(P) \neq 0$; llavors podem posar x en funció de y en un entorn de P, i fem servir y de paràmetre.
  - o bé $f_y(P) \neq 0$; llavors podem posar y en funció de x en un entorn de P, i fem servir x de paràmetre.
  - Com es posa una variable en funció de l'altra? O bé resolent $f(x, y) = 0$ si es pot, o bé usant derivació implícita (càlcul II).
- Així, al voltant dels punts llisos, les corbes implícites C són la gràfica d'una funció en una de les dues variables i per tant són una corba parametritzada (a trossos, potser) *regular*.

Exemple: C la circumferència $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

- $f_y = 2y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$. Llavors al voltant dels punts $P \neq (\pm 1, 0)$ podem posar y en funció de x: $y = +\sqrt{1 - x^2}$ si $y > 0$ o $y = -\sqrt{1 - x^2}$ si $y < 0$.
- $f_x = 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Llavors al voltant dels punts $P \neq (0, \pm 1)$ podem posar x en funció de y: $x = +\sqrt{1 - y^2}$ si $x > 0$ o $x = -\sqrt{1 - y^2}$ si $x < 0$.

Outline

Còniques

- Les **còniques** són les corbes amb equació implícita $f(x, y) = 0$, on $f(x, y)$ és un polinomi de grau 2.
- Veurem que també són corbes parametritzades.
- S'anomenen així perquè són seccions d'un con per un pla i n'hi ha de tres tipus:
  - el·lipse (en particular circumferència),
  - paràbola
  - hipèrbola.
- El tipus de cònica es preserva si li fem un moviment/canvi de referència ortonormal.

La circumferència.

Té equació implícita: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, on el centre és el punt (a,b), i el radi és r, i admet una parametrització trigonomètrica

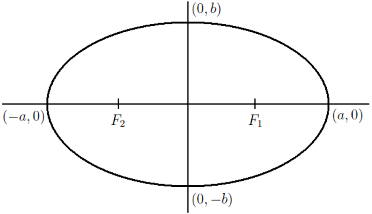
$$\gamma(\theta)=(a,b)+r(\cos\theta,\sin\theta), \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

És un cas particular de l'el·lipse.

L'El·lipse

- En certa referència ortonormal adaptada té equació implícita $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Admet una parametrització com a deformació d'una circumferència:

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$



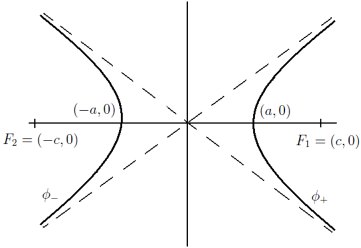
Propietats de l'el·lipse:

- Si $a = b$, és una circumferencia de radi a.
- Si $a > b$, l'**eix major** és la recta $y = 0$ i l'**eix menor** és $x = 0$ (si $a < b$, al revés). Els eixos són les rectes de simetria de l'el·lipse.
- Els **focus** són els punts de l'eix major $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, on $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si $a > b$ (i $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ si $a < b$).
- El **centre** de l'el·lipse és el punt d'intersecció dels dos eixos i coincideix amb el punt mig dels focus, en aquest cas el $(0, 0)$. És també el centre de simetria de l'el·lipse.
- Un punt $P \in \mathbb{R}^2$ és de l'el·lipse $\Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.
- Si apliquem un moviment a una el·lipse, la corba resultant segueix sent una el·lipse.

La hipèrbola

- En certa referència ortonormal adaptada té equació implícita

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



- Com s'observa a la figura, la hipèrbola té dues **branques:** la formada pels punts amb $x > 0$ i la formada pels punts amb $x < 0$.

Parametrització de la hipèrbola

Les branques positiva i negativa admeten parametritzacions respectives

$$\phi_+(t) = (a\cosh(t), b\sinh(t))$$
$$\phi_-(t) = (-a\cosh(t), b\sinh(t))$$

Totes dues parametritzacions tenen domini $t \in \mathbb{R}$.

Propietats de la hipèrbola:

- Quan $x \to \pm\infty$, les branques de la hipèrbola tendeixen cap a les **rectes asímptotes** $bx \pm ay = 0$.
- Definim els **focus** de la hipèrbola com els punts $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, on $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- El **centre** de la hipèrbola és el punt mig dels focus i coincideix amb el punt d'intersecció de les asímptotes.
- Per tant, un punt $P \in \mathbb{R}^2$ és de la hipèrbola $\Leftrightarrow$

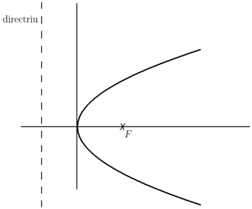
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

- Si apliquem un moviment a una hipèrbola, la corba resultant segueix sent una hipèrbola.

La paràbola

- En referència ortonormal adaptada, té equació implícita

$$y^2 = 2px$$



(o intercanviant els eixos, l'equació queda $y = x^2/2p$).

- La paràbola admet una parametrització: $\phi(y) = (\frac{y^2}{2p}, y)$, per $y \in \mathbb{R}$.

Propietats de la paràbola:

- El **focus** de la paràbola $y^2 = 2px$ és $F = (\frac{p}{2}, 0)$.
- La **directriu** de la paràbola és la recta $x = -\frac{p}{2}$.
- L'**eix** de la paràbola $y^2 = 2px$ és la recta OX.
- El **vèrtex** de la paràbola és el punt d'intersecció de l'eix amb la paràbola, en aquest cas $(0, 0)$.
- Un punt $P \in \mathbb{R}^2$ és de la paràbola $\Leftrightarrow d(P, F) = d(P, directriu)$
- Si apliquem un moviment a una paràbola, la corba resultant segueix sent una paràbola.

Outline

Splines

- Les corbes que el disseny industrial usa cada cop més són els **splines**.
- Són corbes parametrizades però definides a trossos, per a que passin per punts especificats i/o tinguin direccions tangents especificades.
- Els programes de disseny per ordenador moderns (SolidWorks, ...) usen splines per fer passar corbes/superfícies per les posicions indicades des del ratolí.
- Podem usar la comanda `bspligui()` de Matlab per explorar-ho.

Splines de Bézier

Definició

La **corba de Bézier cúbica** determinada per 4 **punts de control** $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$, i **parametrizada per** $t \in [0,1]$ s'obté així:

1. Assignem a cada punt de control un pes, que varia per $t \in [0,1]$: $m_0(t) = (1-t)^3, m_1(t) = 3t(1-t)^2, m_2(t) = 3t^2(1-t), m_3(t) = t^3$.
2. La corba de Bézier és la corba parametritzada donada per

$$\gamma(t) = m_0(t)P_0 + m_1(t)P_1 + m_2(t)P_2 + m_3(t)P_3$$

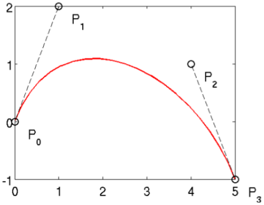
per $t \in [0,1]$ (i $\gamma(t)$ és el baricentre de P_0, P_1, P_2, P_3 amb els pesos $m_0(t), m_1(t), m_2(t), m_3(t)$).

Propietats de la corba de Bézier cúbica

Un spline com aquest compleix les propietats

- $\gamma(0) = P_0$, $\gamma(1) = P_3$,
- $\dot{\gamma}(0) = 3\vec{P_0 P_1}$,
- $\dot{\gamma}(1) = 3\vec{P_2 P_3}$.

És a dir: la corba passa pels punts de control P_0, P_3, amb recta tangent $\overline{P_0 P_1}, \overline{P_2 P_3}$ respectivament. En canvi, la corba de Bézier *no* sol passar pels punts de control P_1, P_2.



Splines en $[t_0, t_1]$

Una complicació necessària per enganxar corbes de Bézier es que convé usar corbes de Bézier cúbiques **parametritzades per un interval de temps $[t_0, t_1]$ qualsevol**, enlloc de per $[0, 1]$. Per a fer això definim els

- pesos per l'interval $[t_0, t_1]$:
  $m_0(t) = \frac{(t_1-t)^3}{(t_1-t_0)^3}, m_1(t) = \frac{3(t-t_0)(t_1-t)^2}{(t_1-t_0)^3}, m_2(t) = \frac{3(t-t_0)^2(t_1-t)}{(t_1-t_0)^3},$
  $m_3(t) = \frac{(t-t_0)^3}{(t_1-t_0)^3}$ (continuen sent positius i sumant 1),
- corba de Bézier: $\gamma(t) = m_0(t)P_0 + m_1(t)P_1 + m_2(t)P_2 + m_3(t)P_3$.

La nova corba de Bézier $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ verifica encara que $\gamma(t_0) = P_0, \gamma(t_1) = P_3, \dot{\gamma}(t_0) = 3\overrightarrow{P_0P_1}, \dot{\gamma}(t_1) = 3\overrightarrow{P_2P_3}$.

Enganxant Splines (I)

Definició

Un **spline** és una corba parametritzada $\gamma : [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^2$ que obtenim enganxant arcs de corba parametritzats $\gamma_1 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2, \ldots, \gamma_n : [t_{n-1}, t_n] \to \mathbb{R}^2$. El spline és un **spline cúbic de Bézier** si les corbes $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ que enganxem són corbes cúbiques de Bézier.

En principi podríem definir cada corba de Bézier cúbica γ_i per 4 punts de control independents: γ_i per punts de control $P_{i,0}, P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}$.
Normalment volem que la corba spline resultant sigui contínua i llisa:

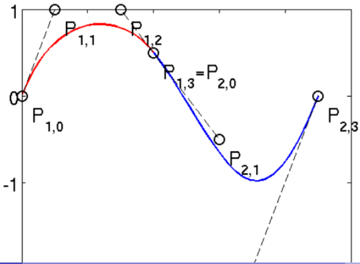
Enganxant Splines (II)

Proposició

L'spline cúbic de Bézier és continu exactament quan el punt de control final de cada corba de Bézier és el punt de control inicial de la següent:

$$P_{j,3} = P_{j+1,0} \qquad \textit{per } j = 1, 2, \ldots, n-1$$

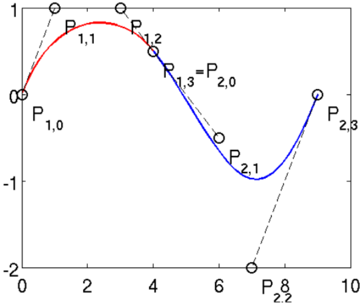
I admet a més una parametrització $\mathcal{C}^1$ *exactament quan els punts* $P_{j,2}, P_{j,3} = P_{j+1,0}, P_{j+1,1}$ *estan alineats per* $j = 1, 2, \ldots, n-1$*, i apareixen en la recta amb* $P_{j,3} = P_{j+1,0}$ *al mig dels altres dos.*



Exemple

Sigui $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ el spline de Bézier cúbic donat per 2 corbes $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$, amb punts de control

$$P_{1,0} = (0, 0), P_{1,1} = (1, 1), P_{1,2} = (3, 1), P_{1,3} = (4, 0.5)$$
$$P_{2,0} = (4, 0.5), P_{2,1} = (6, -0.5), P_{2,2} = (7, -2), P_{2,3} = (9, 0)$$



Exemple (cont.)

- Com $P_{1,3} = P_{2,0}$ la corba és continua.
- Els punts $P_{1,2}, P_{1,3}, P_{2,1}$ estan alineats, i per tant la corba admet parametrització $\mathcal{C}^1$.
- La recta tangent en el punt d'enllaç dels 2 arcs $P_{1,3} = P_{2,0} = (4, 0.5)$ és la recta $\overline{P_{1,2}P_{1,3}P_{2,1}}$, perquè la condició per a que el spline sigui llis és precisament que les dos rectes tangents per cada costat (la tangent a γ_1 que és la recta $\overline{P_{1,2}P_{1,3}}$ i la tangent a γ_2 que és la recta $\overline{P_{2,0}P_{2,1}}$) siguin la mateixa recta.
- Així doncs, si pensem el spline com una corba implícita $W \subset \mathbb{R}^2$, la seva recta tangent en $P_{1,3} = (4, 0.5)$ és

$$T_P W = (4, 0.5) + [(1, -0.5)]$$

Exemple (cont.)

- Noteu però que la corba implícita es $\mathcal{C}^1$ però la parametrització donada pel spline no és $\mathcal{C}^1$, ja que $\dot{\gamma_1}(1) = 3(P_{1,3} - P_{1,2}) = (3, 1.5)$, mentre que $\dot{\gamma_2}(1) = 3(P_{2,1} - P_{1,3}) = (6, 3)$ (per cada costat surten vectors directors diferents de la mateixa recta tangent).
- Si volem una parametrització que sigui $\mathcal{C}^1$ (en que la velocitat varia contínuament) cal triar una altra parametrització de la corba, per exemple una de les parametritzacions locals per x o per y que dona el Teorema de la Funció Implícita.

Exemple (cont.)

- Finalment, si volem calcular la posició i recta tangent de l'spline en temps $t = 1.2$ hem de tenir en compte que $\gamma(1.2) = \gamma_2(1.2)$ (el spline és γ_2 per $t \in [1, 2]$), aplicar la parametrització

$$\gamma_2(t) = (2-t)^3 P_{2,0} + 3(2-t)^2(t-1)P_{2,1} + \\ 3(2-t)(t-1)^2 P_{2,2} + (t-1)^3 P_{2,3}$$

  i calcular que $\gamma(1.2) = \gamma_2(1.2) = (4.712, 0.064)$.

- Per obtenir la recta tangent: calcular $\dot{\gamma_2}(t)$ derivant γ_2 respecte de t i avaluar en $t = 1.2$. Surt $\dot{\gamma_2}(1.2) = (4.08, -2.64)$ i per tant

$$T_{\gamma(1.2)}\gamma = \gamma_2(1.2) + [(4.08, -2.64)]$$

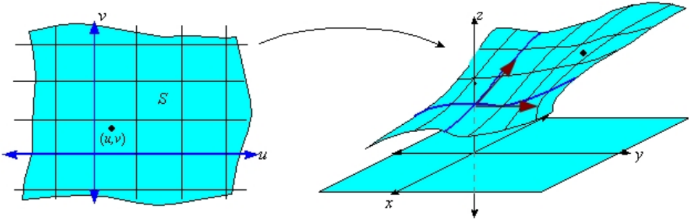
Outline

Superfícies

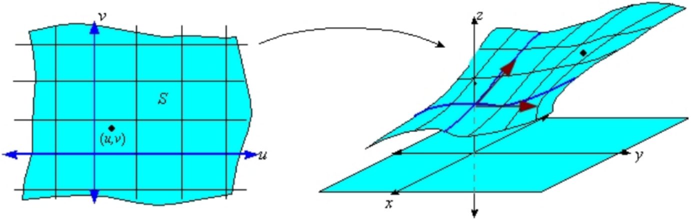
- Una **superfície parametritzada** S és la imatge d'una aplicació (en general, localment injectiva) $\mathcal{C}^1$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, on U és un obert de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)). \end{array}$$

- L'aplicació φ s'anomena **parametrització** de S i és *regular* si $D\varphi$ té rang 2 (màxim) en tots els seus punts.
- Les corbes parametritzades $\varphi(u,c)$ i $\varphi(c,v)$ per c constant estan dins de la superfície S i s'anomenen **corbes coordenades**.



Superfícies



- Si φ és regular, aleshores els vectors tangents a les corbes coordenades coincideixen amb

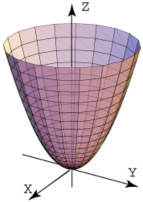
$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

respectivament, i en un punt $P = \varphi(\mathbf{u})$ tenim

  - $T_P S = P + \mathrm{Im} D\varphi(\mathbf{u}) = P + [\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathbf{u})]$
  - $N_P S = P + (\mathrm{Im} D\varphi(\mathbf{u}))^{\perp} = P + [\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathbf{u})]$.

Exemple: Gràfica d'una funció

- Si tenim una funció $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, aleshores la seva gràfica és la superfície S parametritzada per



$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) = (x,y,h(x,y)) \end{array}$$

  i és també la superfície implícita $z = h(x,y)$.

- Les corbes coordenades són la imatge de $x = c$, $y = c$ on c és constant. En un punt $P = (x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ de S el pla tangent és

$$T_P S = P + [(1, 0, h_x(x_0, y_0)), (0, 1, h_y(x_0, y_0))].$$

- La recta normal és $N_P S = P + [(-h_x(x_0, y_0), -h_y(x_0, y_0), 1)]$ i la seva projecció sobre el pla X, Y indica la direcció de màxim pendent de pujada (∇h) i la direcció de màxim pendent de baixada en S (-∇h).

Exemple: Varietats implícites

- Gràcies al teorema de la funció implícita les superfícies definides per equacions implícites $f(x, y, z) = 0$ també són superfícies parametritzades (al menys al voltant d'un punt llis).
- En efecte, si P és un punt llis, aleshores o bé $f_x(P) \neq 0$, o $f_y(P) \neq 0$, $f_z(P) \neq 0$. En el primer cas podem fer servir les variables y, z de paràmetre, és a dir podem posar x en funció de y, z en un entorn de P (anàlogament en els altres dos casos). Així, en els punts llisos, la superfície és la gràfica d'una funció de dues variables.

Exemple: el pla

El pla $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ es pot parametritzar per les coordenades cartesianes

$$(x = u, y = v, z = 0)$$

o també per **coordenades polars**:

$$\varphi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(\rho, \theta) = (\underbrace{\rho \cos \theta}_{x}, \underbrace{\rho \sin \theta}_{y}), \text{ on}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta \text{ angle t.q. } \cos \theta = x/\rho, \quad \sin \theta = y/\rho.$$

Exemple: l'esfera

- L'esfera centrada en el $(0,0,0)$ i de radi R $x^2+y^2+z^2=R^2$ es pot parametritzar localment per $(x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2})$ en els punts amb $z>0$ i per $(x,y,-\sqrt{R^2-x^2-y^2})$ en $z<0$.
- També en tenim una parametrització per **coordenades esfèriques**:

$$\begin{array}{rcl}[0,2\pi)\times[-\pi/2,\pi/2] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\alpha,\beta) & \mapsto & (R\cos\alpha\cos\beta, R\sin\alpha\cos\beta, R\sin\beta).\end{array}$$

- Perquè sigui regular, hauríem de considerar els intervals oberts i evitar els pols.
- Els paràmetres α,β s'anomenen **longitud i latitud**, respectivament, i les corbes coordenades $\alpha=c$ i $\beta=c$ s'anomenen **meridians** i **paral·lels** respectivament.
- En termes geogràfics, la longitud α es pren en $(-\pi,\pi]$.

Coordenades esfèriques

les **coordenades esfèriques** d'un punt (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ són els valors $(\rho, \alpha, \beta) \in [0, \infty,) \times [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2]$ tals que

$$(x, y, z) = (\underbrace{\rho \cos\beta \cos\alpha}_{x}, \underbrace{\rho \cos\beta \sin\alpha}_{y}, \underbrace{\rho \sin\beta}_{z}), \text{ on}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\beta = asin(z/\rho),$$

$$\alpha \text{ tal que } \cos\alpha = \frac{x}{\rho\cos\beta}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{\rho\cos\beta}.$$

Coordenades cilíndriques

- El cilindre infinit $x^2 + y^2 = R^2$ es pot parametritzar per

$$\varphi(\alpha, z) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, z).$$

- Les **coordenades cilíndriques** d'un punt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ són els valors (ρ, α, z) tals que

$$(x, y, z) = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, z)$$

- Per tant, (ρ, α) són les coordenades polars de la projecció ortogonal del punt sobre $z = 0$, i z és l'alçada del punt.

Superfícies de revolució

- Una **superfície de revolució** la que s'obté girant una corba plana al voltant d'un eix.
- Si fixem l'eix en OZ i la corba que fem girar és una corba parametritzada $\gamma(u) = (x(u), z(u))$ en el pla X, Z aleshores obtenim la superfície parametritzada

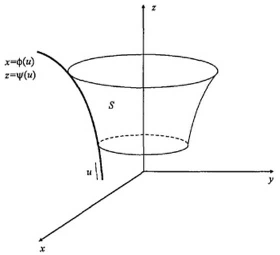
$$\varphi(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)).$$

- Així, els meridians $v = c$ constant donen la corba C girada, i les corbes coordenades $u = c$ constant són cercles al voltant de l'eix.
- L'esfera, el cilindre són exemples de superfícies de revolució.

Exemples notables de superfícies de revolució

1. El con $x^2 + y^2 = z^2$.
2. L'hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
3. El paraboloide $z = x^2 + y^2$ (i també és la gràfica d'una funció).

Superfícies de revolució. Eq implícita



Lema

Si la corba C que girem ve definida per una equació implícita $f(x, z) = 0$ i

- *o bé C és simètrica respecte l'eix de revolució Z $((x, z) \in C \Leftrightarrow (-x, z) \in C)$,*
- *o bé C només té punts amb $x > 0$,*

aleshores la superfície de revolució ve definida implícitament per l'equació

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Outline

Problema 1

Problema 1

Demostreu que, donat $\omega \neq 0 \in \mathbb{R}$, la corba $\gamma(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ és una parametrització regular de la circumferència unitat centrada en el 0.

Problema 5 I

Problema 5

La *tractriu* és la corba que fa un gos que vol agafar un os situat en un punt fixat i és arrossegat pel seu amo que camina al llarg d'una línia recta (l'eix y, vegeu la figura 1). La tractriu admet la parametrització:

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right),\ t \in (0, \pi).$$

1. Proveu que és un corba regular excepte en $t = \pi/2$.
2. Proveu que el segment determinat per un punt de la corba i la intersecció de la seva recta tangent amb l'eix y té longitud 1 (és a dir, que la corretja no és de les extensibles!).

Problema 5 II

Figura: Tractriu

Problema 5 III

La derivada de α és

$$\alpha'(t) = \left(\cos(t)\,,\ \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\,t\right)^2 + 1}{2\,\tan\left(\frac{1}{2}\,t\right)} - \sin(t)\right) = \left(\cos(t)\,,\ \frac{\cos t}{\tan t}\right)$$

D'aquí que $\alpha'(t) = 0$ si, i només si, $\cos t = 0$, és a dir, $t = \pi/2$.
En un punt $(x_0, y_0) = \alpha(t_0)$, la recta tangent ve donada per

$$\alpha(t_0) + [\alpha'(t_0)].$$

Aquesta s'interseca amb l'eix $x = 0$ per al valor de λ_0 tal que

$$\sin t_0 + \lambda_0 \cos t_0 = 0, \quad \lambda_0 = -\tan t_0.$$

En aquest punt, la coordenada y serà

$$y_1 = \log\tan\frac{t}{2}$$

Problema 5 IV

Així doncs,

$$\|(x_0, y_0) - (0, y_1)\| = \|(\sin(t), \cos(t))\| = 1.$$

Problema 6 I

Problema 6.1

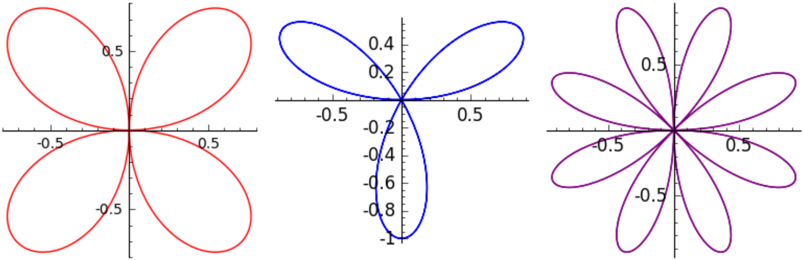
Diem que una corba plana C està expressada en coordenades polars $(\rho(t), \theta(t))$ si està parametritzada per

$$\alpha(t) = (\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t)),$$

és a dir $\rho(t)$, indica la distància radial a l'origen i $\theta(t)$ és l'angle que forma $\alpha(t)$ amb l'eix OX.

1. Les *roses* són les corbes que tenen equació $\rho = \sin(n\theta)$ en coordenades polars. Doneu-ne una parametrització en cordenades cartesianes i feu-ne el dibuix per $n = 2, 3, 4$. Proveu que per $n = 2$, la corba és regular cada cop que passa per l'origen.

Problema 6 II

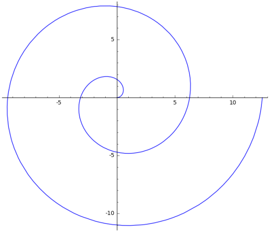


Dibuix de $\rho = |\sin(n\theta)|$ per $n = 2, 3, 4$. Si $\alpha(t) = (0, 0)$, aleshores $\|\alpha'(t)\| = n \neq 0$.

Problema 6 I

Problema 6.2

2 L'*espiral d'Arquímedes* és la corba que en coordenades polars té equació $\rho = a\theta$, $a > 0$, $\theta \in (0, \infty)$. Doneu-ne una parametrització en cordenades cartesianes i fes-ne el dibuix. És una corba regular?



En coordenades cartesianes:

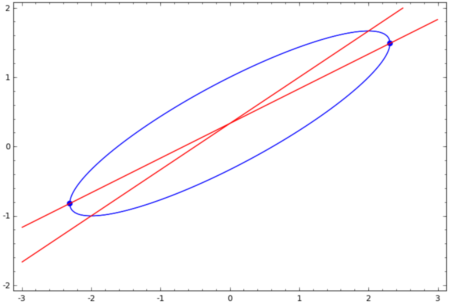
$$\alpha(t) = (at\cos\theta(t), at\sin\theta(t)), t \in (0, +\infty)$$

de manera que és regular sempre.

Problema 7 I

Problema 7

Sigui C la corba amb equació $x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 2y - 1 = 0$. En quins punts podem parametritzar-la posant y com a funció de x?



Problema 7 II

El gradient de la funció és

$$(2\,x - 3\,y + 1,\, -3\,x + 6\,y - 2)$$

i, per tant, $\partial_y f$ s'anul·la només quan som sobre la corba i, a més, $-3\,x + 6\,y - 2 = 0$. D'aquesta darrera equació,

$$x = 2y - 2/3$$

i substituint-la a l'equació de la corba, obtenim

$$y^2 - \frac{2}{3}\,y - \frac{11}{9} = 0$$

d'on trobem les solucions

$$y = -\frac{2}{3}\,\sqrt{3} + \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}\,\sqrt{3} + \frac{1}{3}$$

Problema 7 III

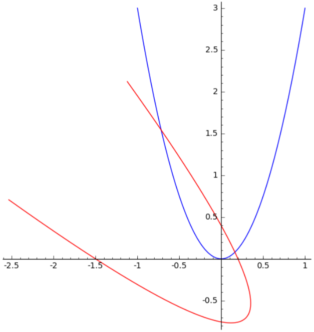
D'aquí que els punts on no podem parametritzar y en funció de x són

$$\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)$$

Problema 12 I

Problema 12

A la paràbola $y = 3x^2$ li fem un gir de centre $(1, 0)$ i angle $\pi/4$. Troba el vèrtex, eix i focus de la nova paràbola.



- Els elements de la paràbola es giren segons el moviment.

Problema 12 II

- La paràbola $y = 3x^2$ és de la forma $x^2 = 2py$ amb $p = 1/6$, per tant, el vèrtex és $(0, 0)$, el focus és a l'eix OY, $(0, 1/12)$, la directriu de la paràbola és la recta $y = -1/12$, i l'eix la recta OY (que conté vèrtex i focus).
- Cal que apliquem el gir a aquests elements. Podem fer-ho usant les equacions

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(x-1) - \frac{1}{2}\sqrt{2}y + 1, \frac{1}{2}\sqrt{2}(x-1) + \frac{1}{2}\sqrt{2}y\right)$$

- Per tant, els nous elements són:
  - Focus: $F(0, 1/12) = \left(-\frac{13}{24}\sqrt{2} + 1, -\frac{11}{24}\sqrt{2}\right)$.
  - Vèrtex: $F(0, 0) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

Problema 12 III

- El nou eix passa per $F(0,0)$ i té direcció $f(0,1)$ (on f és la isometria associada a F). Calculem $f(0,1)$:

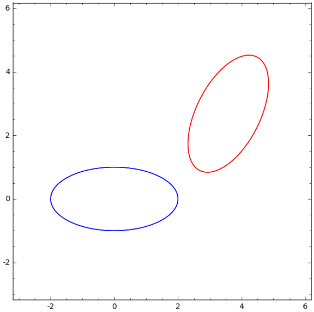
$$f(0,-1) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

i el nou eix és $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + [(-1,1)]$.

Problema 13 I

Problema 13

Donada l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ en referència natural, considerem la nova referència $\bar{R} = \{P = (-4, 2); u_1 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}), u_2 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$. Doneu l'equació de l'el·lipse en coordenades $\bar{x}, \bar{y}$.



Problema 13 II

El canvi de coordenades associat és

$$x = -4 + \bar{x}/\sqrt{5} + 2\bar{y}/\sqrt{5}, \quad y = 2 - 2\bar{x}/\sqrt{5} + \bar{y}/\sqrt{5}$$

Substitim a l'equació de l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$:

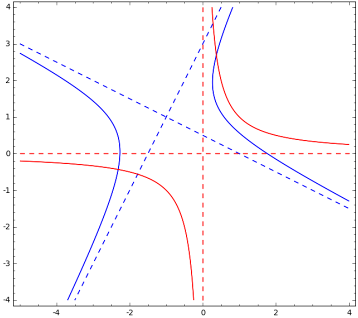
$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = \frac{17}{20}\,\bar{x}^2 - \frac{3}{5}\,\bar{x}\bar{y} + \frac{2}{5}\,\bar{y}^2 - 2\sqrt{5}\bar{x} + 7 = 0$$

que és l'equació de la nova el·lipse.

Problema 14 I

Problema 14

La hipèrbola $2x^2 - 2y^2 + 3xy + x + 7y = 8$ té asímptotes $2x - y = -3$, $x + 2y = 1$. Troba una referència ortonormal positiva $\bar{R}$ de manera que en la nova referència la hipèrbola tingui equació $\bar{x}\bar{y} = 1$.



Problema 14 II

- El canvi ha de portar les asímptotes $2x - y = -3$ i $x + 2y = 1$ als eixos $x = 0$ i $y = 0$ (en algun ordre).
- En particular, el punt d'intersecció de les dues asímptotes, $P = (-1, 1)$ va a l'origen.
- A més, els vectors directors de les dues hipèrboles van a $(1, 0)$ i a $(0, 1)$. Aquests vectors són $(2, -1)$ i $(1, 2)$ normalitzats a 1, és a dir

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$$

- Així doncs, la referència ortonormal $\bar{R}$ és

$$P = (-1, 1), \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$$

Problema 14 III

- aquesta referència és positiva perquè

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{vmatrix} = 1.$$

- En la nova referència, es comprova que l'equació és $\bar{x}\bar{y} = 1$.
- **Observació:** Ja que ens donen les asímptotes, observem que el producte de les asímptotes val

$$(2x - y + 3)(x + 2y - 1) = 2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 7y - 3$$

En particular, l'equació de la hipèrbola la podem escriure com

$$(2x - y + 3)(x + 2y - 1) = 5$$

o, normalitzant

$$\frac{(2x - y + 3)}{\sqrt{5}} \frac{(x + 2y - 1)}{\sqrt{5}} = 1.$$

Problema 14 IV

- Per tant, directament obtenim que el canvi de variables ortonormal directe (això es comprova)

$$\bar{x} = \frac{2\,x - y + 3}{\sqrt{5}}, \quad \bar{y} = \frac{x + 2\,y - 1}{\sqrt{5}}$$

passa la hipèrbola a $\bar{x}\bar{y} = 1$.

Problema 23 I

Problema 23

Un excursionista es troba en el punt de coordenades $E = 10, N = 10$ (E : est, N : nord) d'una muntanya de la forma $z = 3500 - 0.1E^2 - 0.02N^2$ (on z denota l'alçada).

1. En quina direcció (E, N) s'ha de moure per aconseguir anar en la direcció de màxim pendent?
2. Si es posa a ploure intensament, quina direcció ha d'evitar l'excursionista per no baixar pel torrent d'aigua que es formarà?

En un punt (E, N) qualsevol el gradient de l'alçada és

$$\left(-\frac{1}{5}\,E,\ -\frac{1}{25}\,N\right)$$

Problema 23 II

i en el punt $(10, 10)$ aquest gradient val

$$\left(-2, -\frac{2}{5}\right)$$

que marca la direcció de màxim pendent. En cas de pluja ha de separar-se el màxim d'aquesta direcció, cosa que s'aconseguirà la direcció perpendicular, és a dir, la direcció donada per

$$\left(-\frac{2}{5}, 2\right).$$

Problema 25 I

Problema 25

Sigui S la superfície amb equació

$$(x+y-z)^2+(x-y+z)^2=1$$

1. Dibuixeu-la aproximadament per a comprovar que és una mena de canonada.
2. Comproveu que el punt $P=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ és de la superfície, i llis.
3. Podem parametritzar S posant $z=z(x,y)$ entorn al punt P? En quins punts valdrà aquesta parametrització de S? Calculeu $z(\frac{1}{2},0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(\frac{1}{2},0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(\frac{1}{2},0)$.
4. Doneu una equació paramètrica pel pla tangent a S en P.

Solució:

Problema 25 II

1. Fent el canvi de coordenades (no ortogonal)

$$\bar{x} = x + y - z, \bar{y} = x - y + z, \bar{z} = z$$

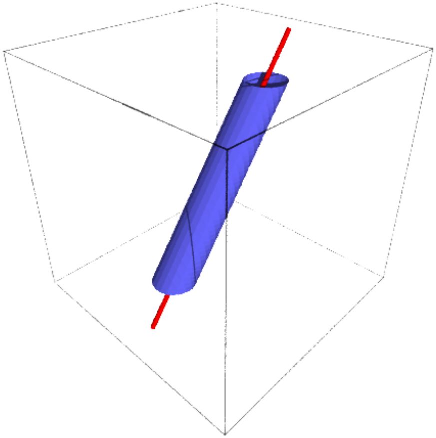
l'equació de la superfície queda

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$$

i, per tant és una mena de cilindre al llarg de l'eix

$$x + y - z = 0, y = x - y + z = 0.$$

Problema 25 III



Problema 25 IV

2. El gradient de la funció és

$$(4\,x,\ 4\,y - 4\,z,\ -4\,y + 4\,z)$$

   que en $P = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ val

$$(2,\ -2,\ 2)$$

   i per tant es tracta d'un punt regular.

3. Sí que es pot parametritzar $z = z(x, y)$ en P:

$$z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2},\ \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -1,\ \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 1.$$

4. $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, 1).$

Problema 26 I

Problema 29

Passeu de coordenades rectangulars a esfèriques els següents punts de l'esfera de radi unitat:

$$P_1 = (-1, 0, 0) \quad P_2 = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2}) \quad P_3 = (-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

i de coordenades esfèriques a rectangulars els punts

$$Q_1 = (\tfrac{4\pi}{3}, -\tfrac{\pi}{4}) \quad Q_2 = (\pi, \tfrac{\pi}{8}) \quad Q_3 = (\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{\pi}{6})$$

$$(x, y, z) = (R\cos\alpha\cos\beta, R\sin\alpha\cos\beta, R\sin\beta)$$

$P_1 : \rho = 1, \alpha = \pi, \beta = 0,\ P_2 : \rho = 1, \alpha = 3\pi/4, \beta = \pi/6,$
$P_2 : \rho = 1, \alpha = 4\pi/3, \beta = \pi/4.$
$Q_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}),\ Q_2 = (-0.9239, 0, 0 - 3827),\ Q_3 = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}).$

Problema 28 I

Problema 28

L'aeroport de Barcelona a El Prat es troba en les coordenades $41^\circ 17' 49'' N, 2^\circ 4' 42'' E$, i l'aeroport JFK de Nova Iork es troba en les coordenades $40^\circ 38' 23'' N, 73^\circ 46' 44'' W$. El radi mitjà de la Terra és de $6371 km$. Quina és la distància entre els dos aeroports?

Solució: Calcul en Matlab:

```
>> alfabcn=(2+4/60+42/3600)*pi/180
alfabcn =  0.036274
>> betabcn=(41+17/60+49/3600)*pi/180
betabcn =  0.72077
%Projeccio sobre l'esfera unitat
>> ubcn=[cos(alfabcn)*cos(betabcn),...
  sin(alfabcn)*cos(betabcn),sin(betabcn)]'
ubcn =
   0.750805
```

Problema 28 II

```
   0.027246
   0.659962
>> alfajfk=(-73-46/60-44/3600)*pi/180
alfajfk = -1.2877
>> betajfk=(40+38/60+23/3600)*pi/180
betajfk =  0.70930
%Projeccio sobre l'esfera unitat
>> ujfk=[cos(alfajfk)*cos(betajfk),...
  sin(alfajfk)*cos(betajfk),sin(betajfk)]'
ujfk =
   0.21197
  -0.72861
   0.65130
>> cosang=dot(ubcn,ujfk)
cosang =  0.56913
>> angbcnjfk=acos(cosang)
angbcnjfk =  0.96535
>> angbcnjfk*6371 %arc= 2*pi*angbcnjfk
ans =  6150.2
```

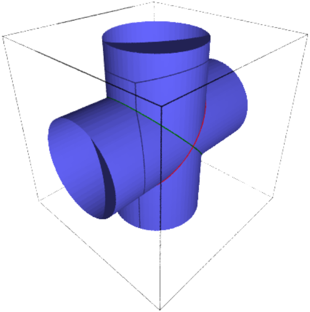
Problema 28 III

Angle entre el centre de la terra i els dos aeroports: 0.96535, distància entre els aeroports: $0.96535 * 6371 = 6150.2$ Km.

Problemes 29, 30, 31 I

Problema 29

Considerem els cilindres de $\mathbb{R}^3$, $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ i $C_2 : x^2 + z^2 = 25$. Useu coordenades cilíndriques en C_1 per parametritzar la corba $C_1 \cap C_2$.



Problemes 29, 30, 31 II

- El cilindre C_1 es pot parametritzar per cilíndriques com

$$r = 5, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}$$

- En aquestes coordenades,

$$x = 5\cos\theta, y = 5\sin\theta$$

i, per tant, l'equació de C_2 s'expressa com

$$25\cos^2\theta + z^2 = 25 \Leftrightarrow z^2 = 25(1 - \cos^2\theta) = 25\sin^2\theta$$

que dóna com a parametrització en cilíncriques de la corba:

$$z = \pm 5\sqrt{\sin^2\theta} = \pm 5\|\sin\theta\|, \theta \in [0, 2\pi).$$

Problemes 29, 30, 31 III

- Observant que θ pren valors positius o negatius obtenim dues corbes regulars:

$$(5\cos\theta, 5\sin\theta, 5\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$$

i l'altra

$$(5\cos\theta, 5\sin\theta, -5\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$$

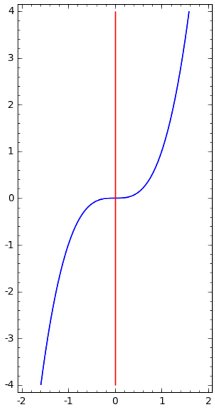
Problemes 29, 30, 31 IV

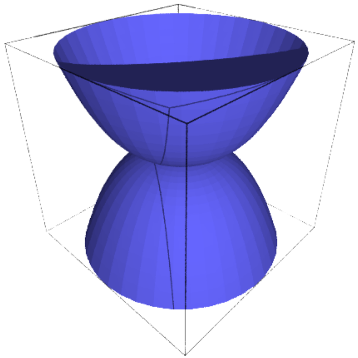
Problema 30

1. Fem girar la corba $z = y^3$ al voltant de l'eix OZ. Doneu una parametrització i una equació implícita de la superfície de revolució resultant. Té algun punt singular?
2. Si fem girar la corba $\gamma(t) = (t, 0, t)$ al voltant de l'eix OZ, doneu una parametrització i una equació implícita de la superfície de revolució resultant.
3. Sigui C una corba en el pla Y, Z donada per equació $f(y, z) = 0$, i sigui S la superfície de revolució obtinguda en fer girar C al voltant de l'eix Z. Demostra que si P és un punt llis de C i la corba C està inclosa en $y > 0$, aleshores els punts del cercle format al girar P són punts llisos de S.

1. Es tracta de fer girar la corba $z = y^3$ al voltant de l'eix OZ.

Problemes 29, 30, 31 V





Problemes 29, 30, 31 VI

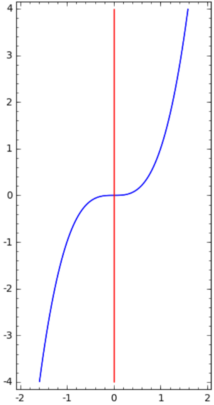
Aquesta correspon a la corba parametritzada:

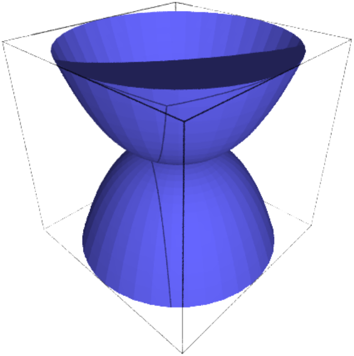
$$\gamma(u) = (y(u), z(u)) = (u, u^3), \quad u \in \mathbb{R}^3.$$

Així doncs, la superfície de revolució és

$$\phi(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, u^3\right)$$

Problemes 29, 30, 31 VII





Problemes 29, 30, 31 VIII

La matriu jacobiana de la parametrització és

$$\begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \\ 3u^2 & 0 \end{pmatrix}$$

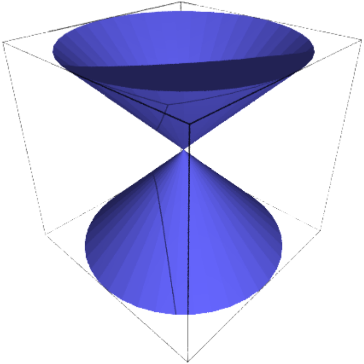
que només té rang inferior a 2 quan $u = 0$:

$$\begin{pmatrix} \cos(v) & 0 \\ \sin(v) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i aquest és l'únic 'punt' singular.

2. Com que la coba és
$$\gamma(u) = (u, 0, u),$$
una parametrització de la superfície de revolució resultant és
$$\phi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$$

Problemes 29, 30, 31 IX



que és equivalent a l'equació del con

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Problemes 29, 30, 31 X

3. Recordem que l'equació implícita ve donada per

$$g(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

i, si (x_0, y_0, z_0)compleix que $y_0 > 0$.

Problema 31

Anomenem *hiperboloïde d'un full* a les superfícies amb equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1. Fes-ne un dibuix (prova de tallar-la amb els plans coordenats)
2. Comprova que és una superfície de revolució si $a = b$ i dóna'n una parametrització.