Geometria

Tema 5: Varietats implícites (6 h)

Adaptat per Marta Casanellas dels resums de Geometria de J. Amorós i M. Casanellas i de les transparències de J. Puig.

Primavera 2024

Outline

Varietats implícites

Definició de varietat implícita

$W \subset \mathbb{R}^n$ és una **varietat implícita** $\mathcal{C}^1$ si és el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions $\mathcal{C}^1$ (en general no lineals)

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Observació

Suposarem $m < n = \dim \mathbb{R}^n$, on $m =$ nombre d'equacions, i $n \geq 2$.

La **dimensió** de W és $\dim W = n - m$ (dimensió 1: corbes, dimensió 2: superfícies).

Exemples

- les varietats lineals donades per equacions són varietats implícites.
- L'esfera unitat $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ ($m = 1$ equacions, $n = 3$, $\dim W = 2$).
- Un con $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ ($m = 1$ equacions, $n = 3$, $\dim W = 2$).
- Una circumferència a $\mathbb{R}^3$:
  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 4 = 0, z = 1\}$ ($m = 2$ equacions, $n = 3$, $\dim W = 1$).
- Una circumferència de radi R a $\mathbb{R}^2$:
  $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0\}$ ($m = 1$ equacions, $n = 2$, $\dim W = 1$).
- Una corba implícita a $\mathbb{R}^3$:
  $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 - e^{x_1^2 + x_2^2} = 0, 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5 = 0\}$ ($m = 2$ equacions, $n = 3$, $\dim W = 1$).

Exemple: recta a $\mathbb{R}^3$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{2x_1 - x_2 + x_3 + 2}_{f_1} = 0, \underbrace{x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 1}_{f_2} = 0\} \subset \mathbb{R}$$

$$W = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\},$$

$$\text{on } F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{array}.$$

El sub. director es pot escriure com el nucli de la Jacobiana de F:

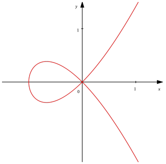
$$V = \{2x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0\} = \{\mathbf{x} \mid DF(\mathbf{x}) = 0\}$$

i $V^{\perp} = [(2, -1, 1), (1, 3, -3)] = [\nabla f_1, \nabla f_2]$ és el subespai director del pla ortogonal a la recta.

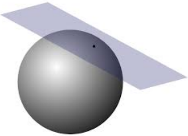
Recordem que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció $\Rightarrow$ el *gradient* de f en un punt $P \in \mathbb{R}^n$ és el vector format per les derivades parcials

$$\nabla f(P) = (\partial_1 f(P), \dots, \partial_n f(P)).$$

Punts llisos i varietat tangent



un punt singular



Varietat tangent

- $P \in W$ és un punt **llis** (o **regular**) si la jacobiana

$$DF(P) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(P) \\ \vdots \\ \nabla f_m(P) \end{pmatrix}$$

  té rang màxim m. Si $DF(P)$ no té rang màxim, o no existeix, diem que P és **singular**.

- Si $P \in W$ és un punt llis, la **varietat tangent** a W en P és

$$T_P W := P + \mathrm{Nuc}(DF(P))$$

Exemple: recta a $\mathbb{R}^3$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{2x_1 - x_2 + x_3 + 2}_{f_1} = 0, \underbrace{x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 1}_{f_2} = 0\}$$

$$\Rightarrow \text{ per qualsevol } \; P \in W, \nabla f_1(P) = (2, -1, 1), \nabla f_2(P) = (1, 3, -3)$$

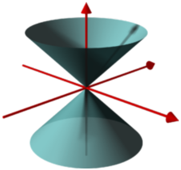
$$DF(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \nabla f_1 P \\ \leftarrow \nabla f_2 P \end{array}$$

té rang 2 (màxim) en qualsevol $P \Rightarrow$ tots els punts de W són llisos.
L'espai tangent en un punt P és

$$T_P W := P + \mathrm{Nuc}(DF(P)) = P + \{2x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0\}$$

i per tant la varietat tangent és tota la recta.

Exemple: el con



- El con de revolució

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

  és una superfície a $\mathbb{R}^3$.
- Reescribim la seva equació com $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
- Així podem calcular la jacobiana $Df = \nabla f$ en un punt (x, y, z)

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \end{pmatrix}$$

  que té rang 0 quan $x = y = z = 0$ (el vèrtex del con), i rang 1 pels altres punts.
- Per tant el vèrtex $V = (0, 0, 0)$ és un punt singular del con, mentre que la resta de punts són llisos.

Exemple: el con (cont.)

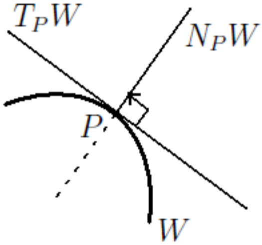
- El punt $P = (3,4,5)$, per exemple, pertany al con perquè és solució de la seva equació. Té $Df(P) = (6,8,-10)$, de manera que el pla tangent a P és

$$T_P W = (3,4,5) + \mathrm{Nuc}\,(6\ 8\ \ -10) =$$
$$(3,4,5) + [(4,-3,0),(5,0,3)] = \{3x + 4y - 5z = 0\}$$

Varietat normal

- Si $P \in W$ és un punt llis, la **varietat normal** a W en P és

$$N_P W := P + \mathrm{Nuc}(DF(P))^{\perp} = P + [\nabla f_1(P), \dots \nabla f_m(P)]$$



Exemples (cont.)

- En la recta anterior, en qualsevol P la varietat normal és el pla per P ortogonal a la recta:

$$N_P W = P + [\underbrace{(2,-1,1)}_{\nabla f_1}, \underbrace{(1,3,-3)}_{\nabla f_2}]$$

- En el punt $P = (3,4,5)$ del con W anterior, la recta normal és

$$N_P W = (3,4,5) + (\mathrm{Nuc}\,(6\ 8\ -10))^{\perp} = (3,4,5) + [\underbrace{(3,4,-5)}_{\nabla f(P)}].$$

Cas particular: una sola equació (hipersuperfícies)

- Si $W \subset \mathbb{R}^n$ ve definida per una sola equació $f = 0$, aleshores en qualsevol punt llis $P \in W$ ($f(P) = 0$) es té

$$N_P W = P + [\nabla f(P)],$$

  i la varietat tangent en x és (**Q.** per què?)

$$T_P W = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \,|\, \langle \nabla f(P), \mathbf{x} - P \rangle = 0\}.$$

- Per exemple, per una superfície $W = \{f = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, el pla tangent en un punt llis $P = (x_0, y_0, z_0)$ ve definit per l'equació

$$\{(x, y, z) \,|\, \partial_x f \cdot (x - x_0) + \partial_y f \cdot (y - y_0) + \partial_z f \cdot (z - z_0) = 0\}$$

Exemple: con (cont.)

En el punt $P = (3,4,5)$ del con $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$, la recta normal és

$$N_P W = (3,4,5) + (\mathrm{Nuc}\,(6\ 8\ \ -10))^{\perp} = (3,4,5) + [\underbrace{(3,4,-5)}_{\nabla f(P)}].$$

i el pla tangent és

$$T_P W = \{(x,y,z) \,|\, \langle \underbrace{(3,4,-5)}_{\nabla f(P)}, (x,y,z) - \underbrace{(3,4,5)}_{P} \rangle = 0\} =$$

$$\{(x,y,z) \,|\, 3 \cdot (x-3) + 4 \cdot (y-4) - 5 \cdot (x-5) = 0\}.$$

Cas particular: Gràfiques de funcions

- Si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{C}^1$, la seva **gràfica** es defineix com el conjunt

$$W = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \,|\, x_{n+1} = h(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- W és la varietat implícita de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida per l'equació $f = 0$ on $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1} - h(x_1, \ldots, x_n)$.
- Si $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, el punt $P = (\mathbf{x}_0, h(\mathbf{x}_0))$ pertany a W i

$$\nabla f(P) = (\partial_1 f(P), \ldots, \partial_n f(P), \partial_{n+1} f(P)) = (-\nabla h(\mathbf{x}_0), 1)$$

- Tots els punts de W són llisos (**Q.** per què?).
- **Exemple**, si h és una funció definida a $\mathbb{R}^2$, i $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, el pla tangent a W en $P = (x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ ve definit per

$$z = h(x_0, y_0) + \partial_x h(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_y h(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Q. per què? **Q.** Feu probl.5

Exemple: paraboloide

$h(x,y) = x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; la seva gràfica és

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = h(x,y) = x^2 + y^2\} = \{\underbrace{z - x^2 - y^2}_{f} = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

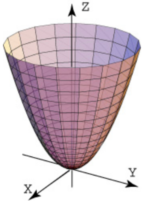
Si $(x_0, y_0) = (1,1) \Rightarrow \quad h(1,1) = 2, P = (1,1,2) \in W$ i

$$N_P W = (1,1,2) + [\nabla f(P)] = (1,1,2) + [(-2,-2,1)],$$

$$T_P W = \{\{(x,y,z) \,|\, \langle(-2,-2,1),(x-1,y-1,z-2)\rangle = 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \,|\, -2(x-1) - 2(y-1) + z - 2 = 0\} =$$

$$\{(x,y,z) \,|\, z = \underbrace{2}_{h(1,1)} + \underbrace{2}_{\partial_x h(1,1)} (x-1) + \underbrace{2}_{\partial_y h(1,1)} (y-1)\rangle\}.$$



Exemple: hipersuperfícies de nivell

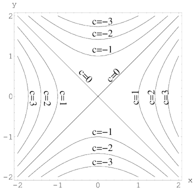
- Donada una funció $\mathcal{C}^1$ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la *hipersuperfície de nivell* $g(\mathbf{x}) = c$ (on c és una constant) és la varietat implícita W_c definida per aquesta equació.
- Equivalentment, per $f_c = 0$ on $f_c(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - c$.
- Aleshores, si $\mathbf{x}_0$ satisfà $g(\mathbf{x}_0) = c$ (i.e. $\mathbf{x}_0 \in W_c$), tenim que el seu espai normal ve donat per la direcció del gradient de g

$$N_{\mathbf{x}_0} W_c = \mathbf{x}_0 + [\nabla g(\mathbf{x}_0)],$$

i que l'espai tangent és (**Q.** per què?)

$$T_{\mathbf{x}_0} W_c : \langle \nabla g(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0.$$

(compareu-ho amb la fórmula del gradient de Calcul II).



$$\overbrace{x^2 - y^2}^{g(x,y)} = c$$ **Q.** Feu probl. 4

Propietats de les varietats tangent i normal

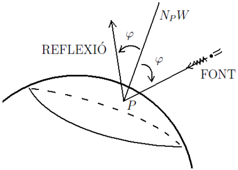
Si W és una varietat implícita, i $P \in W$ punt llis, aleshores:

(1) $T_P W$ és la varietat lineal que millor aproxima a W prop de P.

(2) Si W ve donada per una sola equació $f = 0 \Rightarrow$ la recta normal $N_P W = P + [\nabla f(P)]$ assenyala la direcció de màxim creixement de f en P.

(3) **Principi de Fermat**: Si un raig (de llum) es reflecteix en $P \in W \Rightarrow$ $N_P W$ bisseca els raigs entrant i sortint i

$$\begin{array}{c} \text{raig reflectit} \\ \text{en } W \end{array} = \begin{array}{c} \text{raig reflectit} \\ \text{en } T_P W \end{array} = \begin{array}{c} \text{raig simètric} \\ \text{resp. } N_P W \\ \text{(en l'altre sentit)} \end{array}$$



Exemple: el con (cont.)

Considerem el con de $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$.

- Si un raig de llum amb vector director $u = (-1, -1, 2)$ incideix en el punt llis $P = (3, 4, 5)$, la reflexió està continguda en el pla per P amb subespai director $[u, n]$, on $n = (3, 4, -5)$ és un vector normal al con en P.
- Per tant el raig reflectit té vector director $=$ el simètric de u respecte de la recta $[n]$.
- Com hem vist al tema 4, aquesta reflexió és

$$r = 2\frac{\langle u, n\rangle}{\langle n, n\rangle} n - u = \frac{1}{50}(-52, -86, 70)\,.$$

- Per tant el raig reflectit des de P segueix la recta $P + [(26, 43, -35)]$ (el canvi de signe en el vector director indica el rebot del raig).

Outline

Extrems Lligats

- **Problema:** Donada una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, volem trobar els extrems (maxims i mínims) locals i/o globals de f entre els punts P d'una varietat implícita $W \subset \mathbb{R}^n$ definida per equacions $g_1 = \cdots = g_m = 0$.
- Les equacions de W són els **lligams o restriccions**: condicions que han de complir els punts entre els que busquem els extrems, i aquests extrems s'anomenen **extrems de f en W** o **extrems de f restringida** a W, $f_{|W}$.

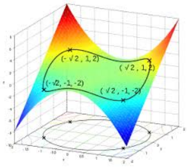


Figura: Extrems de $f(x, y) = x^2 y$ restringida a $W : g(x, y) = x^2 + y^2 - 3$.

[Wikipedia, Lagrange multipliers]

Exemple

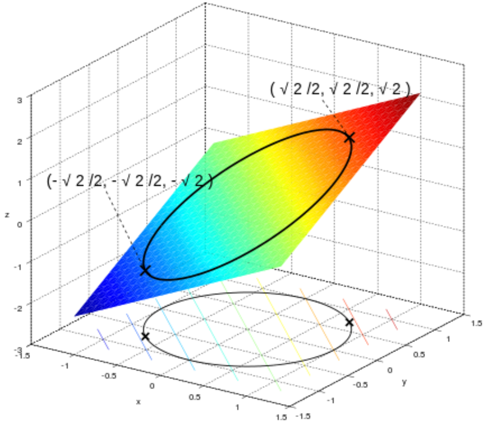


Figura: Extrems de $f(x, y) = x + y$ en la corba $C : x^2 + y^2 = 1$.
En el els punts on f té un màx. o mín. en W, la corba de nivell $f(x, y) = c$ és tangent a W (veure el pla horitzontal).

[Wikipedia, Lagrange multipliers]

Extrems Lligats II

Lema

Si $P \in W$ és un extrem (local o global) de f en W aleshores

$$\nabla f(P) \in [\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)].$$

Equivalentment

$$\nabla f(P) \in N_P W \quad (\text{ i } \nabla f(P) \perp T_P W).$$

Observació

En la figura anterior, això implica que les corbes de nivell de f són tangents a la varietat W en els extrems lligats.

Punts Crítics i Multiplicadors de Lagrange

- P és un **punt crític de f en W** si $P \in W$ i
$$\nabla f(P) \in [\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)].$$
- Si P és un punt crític de f en W, s'anomenen **multiplicadors de Lagrange** a les constants $\lambda_1, \dots \lambda_m$ tal que
$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(P).$$
- Es té que $P = (x_1, \dots, x_n)$ és punt crític de f en $W \Leftrightarrow$ per alguna tria de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, el punt $(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{P}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ és un punt crític de la **funció de Lagrange** (i.e. gradient $= 0$):
$$L(x_1, \dots, x_n\ ,\ \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \dots - \lambda_m g_m.$$
- **No tots els punts crítics són extrems** de f en W.

Teorema (Multiplicadors de Lagrange)

Si $P \in W$ és punt crític de f en W que és punt llis i té multiplicadors de Lagrange $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, considerem la funció de Lagrange

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f - \lambda_1 g_1 - \ldots - \lambda_m g_m,$$

la seva matriu Hessiana en P, $H(L)_P = D^2L(P)$ (derivades segones), i el subespai director E de $T_P W$. Aleshores:

- $DL(P) = \nabla L(P) = (0, \ldots, 0)$ *(i.e. P és punt crític de L).*
- *Si $H(L)_{P_{|E}}$ és definida positiva $\Rightarrow$ P és mínim (local) de f en W.*
- *Si $H(L)_{P_{|E}}$ és definida negativa $\Rightarrow$ P és màxim (local) de f en W.*
- *Si $H(L)_{P_{|E}}$ és indefinida (té VAPs > 0 i VAPs < 0) $\Rightarrow$ P és punt de sella (no és extrem de f en W).*

Explicació: pàgina següent

Observacions sobre el Ta. multiplicadors de Lagrange

- Aquí, $H(L)_{P_{|E}}$ és la restricció de la forma quadràtic $H(L)_P$ a $E=$ subespai director de $T_P(W)$, la varietat tangent a W en P.
- Recíprocament també es té que
  - P mínim de f en $W \Rightarrow H(L)_{P_{|E}}$ és semidefinida positiva (VAPs ≥ 0, $i_- = 0$).
  - P màxim de f en $W \Rightarrow H(L)_{P_{|E}}$ és semidefinida negativa (VAPs ≤ 0, $i_+ = 0$).
- Els punts singulars ens surten com a punts crítics però no són en general extrems (no els considerem en el Ta.).
- A la pràctica podem seguir el següent algoritme per trobar els extrems d'una funció en una varietat:

Algoritme dels Multiplicadors de Lagrange. I

1. Trobem els **punts crítics llisos** P de f en W imposant

$$\text{rang } (\nabla f(P), \nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)) = \mathbf{m}$$

$$\text{i} \quad g_1(P) = \ldots = g_m(P) = 0.$$

2. Per cada punt crític P trobat fem:
    1. Calculem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ t.q. $\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(P)$ (multipl. Lagrange)
    2. Calculem $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \ldots - \lambda_m g_m(\mathbf{x})$ (funció Lagrange) i la seva Hessiana $H(L)_P$.
    3. Calculem generadors $u_1, \ldots, u_d$ del subespai director E de $T_P W$, $E = [\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)]^\perp$.
    4. Mirem si la restricció és definida positiva, negativa o indefinida:

$$H(L)_{P_{|E}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \left(H(L)_P \right) \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_d \end{pmatrix}$$

Algoritme dels Multiplicadors de Lagrange. II

Observacions

- La Hessiana del punt (2.1) es pot calcular per λ_i genèrics i així no hem de repetir els càlculs per tots els punts crítics.
- Els apartats (1) i el (2.1) es poden resoldre alhora trobant punts crítics de la funció

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f - \lambda_1 g_1 - \ldots - \lambda_m g_m.$$

tot i que el sistema $\nabla L = (0, \ldots, 0)$ pot ser difícil de resoldre (no ho farem així).

Exemple: Extrems de $x^2 + y^2$ en $(x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$ I

Exemple

Calculeu els extrems de $f(x,y) = x^2 + y^2$ en l'el·lipse C:

$$g(x,y) = (x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

- Calculem $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ i $\nabla g(x,y) = (2(x-1), 8y)$
- I trobem els (x,y) que compleixen:

$$\begin{cases} \operatorname{rang}(\nabla f(x,y), \nabla g(x,y)) = 1 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2x & 2(x-1) \\ 2y & 8y \end{vmatrix} = 0 \ (1) \\ (x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0 \ (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 4xy - y(x-1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ o $4x - (x-1) = 3x + 1 = 0$.
$\boxed{\text{y=0}} \Rightarrow$ en (2) tenim $(x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = 1$. Així obtenim de moment 2 punts crítics:

$$P_1 = (3,0) \qquad P_2 = (-1,0).$$

Exemple: Extrems de $x^2 + y^2$ en $(x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$ II

$\boxed{3x+1=0} \Leftrightarrow x = -1/3$, aleshores en (2) tenim $(-1/3-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. Així obtenim 2 punts crítics més:

$$P_3 = (-1/3, \frac{\sqrt{5}}{3}) \qquad P_4 = (-1/3, -\frac{\sqrt{5}}{3}).$$

- Per a tots els punts crítics P existeix un λ t.q. $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$. El calculem i obtenim

P	$(3,0)$	$(-1,0)$	$(-1/3, \frac{\sqrt{5}}{3})$	$(-1/3, -\frac{\sqrt{5}}{3})$
λ	$3/2$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

- Encara no sabem que aquests punts siguin extrems; cal seguir l'algorisme. Les funcions de les que necessitem les derivades són:

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y), \quad Hf = D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,y) = (2(x-1), 8y), \quad Hg = D^2 g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Exemple: Extrems de $x^2 + y^2$ en $(x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$ III

La funció de Lagrange és $L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ i la seva Hessiana en un punt P és

$$H(L)_P = D^2 f(P) - \lambda D^2 g(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}.$$

- Anem a veure el càracter de la restricció de $H(L)$ a l'espai tangent en els punts crítics:
  - Per a $P_1 = (3,0)$: com que $\nabla g(P_1) = (4,0)$, $E = [(0,1)]$:

$$H(L)_{P_1} = D^2 f(P_1) - \tfrac{3}{2} D^2 g(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

    Com que $H(L)_{P_1}$ és definida negativa a tot arreu, en particular també ho és a $E \Rightarrow P_1$ màxim local, amb $f(P_1) = 9$.

Exemple: Extrems de $x^2 + y^2$ en $(x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$ IV

- Per a $P_2 = (-1, 0)$, com que $\nabla g(P_2) = (-4, 0)$, $E = [(0,1)]$:

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x,y) - \tfrac{1}{2} g(x,y) \\ H(L)_{P_2} &= D^2 f(P_2) - \tfrac{1}{2} D^2 g(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$H(L)_{P_2}$ és indefinida en $\mathbb{R}^2$ i, per tant, no podem usar el raonament del punt anterior. En el subespai director de l'espai tangent $E = [(0,1)]$ la forma quadràtica és definida negativa ja que

$$(0,1) H(L)_{P_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.$$

Per tant P_2 és màxim local de f en C, amb $f(P_2) = 1$.

Exemple: Extrems de $x^2 + y^2$ en $(x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$ V

- En $P_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$, $\nabla g(P_3) = \left(-\frac{8}{3}, \frac{8\sqrt{5}}{3}\right)$, i $E = [(\sqrt{5}, 1)]$:

$$L(x,y) = f(x,y) - \frac{1}{4} g(x,y)$$

$$H(L)_{P_3} = D^2 f(P_3) - \frac{1}{4} D^2 g(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma quadràtica és degenerada ($i_0 > 0$), però la restricció a E és def. positiva:

$$(\sqrt{5}, 1) H(L)_{P_2} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{2} > 0.$$

Per tant P_3 és un mínim local de f amb $f(P_3) = \frac{2}{3}$.

Exemple: Extrems de $x^2 + y^2$ en $(x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$ VI

- En $P_4 = (-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3})$, $\nabla g(P_4) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{8\sqrt{5}}{3}\right)$, per tant l'espai tangent a la varietat en P_4 és $E = [(\sqrt{5}, -1)]$ i

$$L(x,y) = f(x,y) - \frac{1}{4}g(x,y)$$

$$H(L)_{P_4} = D^2 f(P_4) - \frac{1}{4}D^2 g(P_4) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que és degenerada ($i_0 \neq 0$) però en canvi la restricció a E

$$(\sqrt{5}, -1) H(L)_{P_3} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{15}{2} > 0$$

és definida positiva en la recta tangent $T_{P_4}C$, i P_4 és un mínim local de f amb $f(P_4) = \frac{2}{3}$.

- Resum del càlcul:
  - $P_1 = (3,0)$ màxim (local), $f(P_1) = 9$.
  - $P_2 = (-1,0)$ màxim (local), amb $f(P_2) = 1$.

Exemple: Extrems de $x^2 + y^2$ en $(x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$ VII

- $P_3, P_4 = (-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3})$ mínims (locals) amb $f = \frac{2}{3}$.

- De fet, com que C és una el·lipse, és una varietat compacta i llavors existeixen màxims i mínims **globals** de f en C (pàg. seg.). El màxim global ha de ser un dels dos màxims locals que hem trobat; com $f(P_1) > f(P_2) \Rightarrow P_1$ és max. global. I tenim dos mínims globals perquè la funció val igual en els dos mínims locals que havíem trobat.

Max i mínims globals (=absoluts): varietats compactes

- Ta. Weiertrass: Si W és una varietat **compacta** (és a dir, és un subconjunt tancat i *acotat*) $\Rightarrow f$ té algun **màxim global** i algun **mínim global** en W. Com saber si una varietat és compacta?
- Com que W és varietat implícita, aleshores és **compacta** $\Leftrightarrow$ **és acotada**. Mirant les equacions de W podem deduir si és acotada (si les equacions són senzilles).
- Si W és compacta, podem veure quins dels punts crítics són màx./mín globals (avaluant la f) i així ens estalviem el pas (2) per a uns quants punts.

Exemple: Extrems de z en l'esfera S^2 I

Exemple

Calculeu els extrems de la funció

$$f(x, y, z) = z$$

restringida a l'esfera unitària de $\mathbb{R}^3$ centrada a l'origen

$$S^2 = \{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 1}_{g(x,y,z)} = 0\}$$

A simple vista es veu que el resultat ha de ser $(0, 0, 1)$ màxim (pol nord) i $(0, 0, -1)$ mínim absoluts (pol sud).

Exemple: Extrems de z en l'esfera S^2 II

- Trobem punts crítics (llisos) P de f en S^2 imposant

$$\text{rang }(\nabla f(P), \nabla g(P)) = m \text{ i } g(P) = 0:$$

en aquest cas

$$\text{rang }\begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 2y \\ 1 & 2z \end{pmatrix} = 1 \text{ i } x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

- D'aquí traiem $x = y = 0$ (condició de l'esquerra) i en posar-ho a l'equació de la dreta obtenim $P = (0, 0, \pm 1)$.
- Els multiplicadors de Lagrange són $\lambda = \frac{1}{2}$ per $P = (0, 0, 1)$ i $\lambda = -\frac{1}{2}$ per $P = (0, 0, -1)$ (perquè $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$).

Exemple: Extrems de z en l'esfera S^2 III

- Com que S^2 és varietat implícita acotada $\Rightarrow$ és **compacta** i per tant $f_{|W}$ ha de tenir màxim i mínim globals per tota f contínua. Només han aparegut 2 punts crítics, així que, com

$$f(0,0,1) = 1 > f(0,0,-1) = -1,$$

  $(0,0,1)$ és màxim (global) i $(0,0,-1)$ és mínim (global).
- Alternativa: en aquests 2 punts crítics podem procedir mirant la Hessiana....(seguint l'algorisme) i deduiríem igualment que $(0,0,1)$ és màxim i $(0,0,-1)$ és mínim.

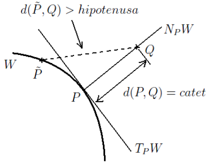
Aplicació a la mínima distància a un punt

En el cas de la funció distància a un punt Q fora de W, busquem extrems de la funció $f(x) = \|x - Q\|^2$ restringits a W (elevem al quadrat per estalviar-nos arrels, i llavors f té gradient $\nabla f(x) = x - Q$).

Corol·lari (La direcció de mínima distància és normal)

Si $Q \notin W$, i $P \in W$ és el punt de W més proper o més llunyà a Q, aleshores la recta $\overline{PQ}$ és normal a W en P,

$$\vec{QP} = P - Q \in [\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)].$$



Q. Per què?

Outline

Problema 1 I

Problema 1

Sigui C la corba plana amb equació $y^2 - 2xy - x^3 + 2x^2 + 9 = 0$.

1. Busqueu els punts singulars de la corba.
2. Calculeu $T_P C, N_P C$ per $P = (3, 0)$.

Solució:

1. Tots els punts són llisos (no singulars). En efecte, el seu gradient és

$$\left(-3\,x^2 + 4\,x - 2\,y,\; -2\,x + 2\,y\right)$$

i, perquè s'anul·lin simultàniament les dues components cal, que $x = y$ i que, a més,

$$-3\,x^2 + 4\,x - 2\,x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ o bé } x = y = 2/3.$$

Problema 1 II

i cap d'aquests dos punts no pertany a la corba perquè

$$f(0,0) = 9 \neq 0, \quad f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 247/27 \neq 0.$$

2. Observem que en $(3,0)$, el gradient de f val

$$\nabla f(3,0) = (-15, -6) \parallel (5,2)$$

i per tant, la varietat normal és

$$N_P C : (3,0) + [(5,2)],$$

i la varietat tangent $T_P C : 5x + 2y = 15$.

Problema 3 I

Problema 3

Sigui C la corba donada per les equacions $z = e^{-x^2-y^2},\ x - 2y - z = -1$.

1. Té C algun punt singular en el semiespai $x \geq 0$?
2. Calculeu $T_P C, N_P C$ en $P = (0,0,1)$.

Solució:

- La varietat es pot escriure com els zeros de la següent funció F

$$(x, y, z) \mapsto \left(z - e^{\left(-x^2-y^2\right)}, x - 2\,y - z + 1\right)$$

que té com a matriu de derivades (jacobiana)

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2\,xe^{\left(-x^2-y^2\right)} & 2\,ye^{\left(-x^2-y^2\right)} & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 II

- Perquè el rang d'aquesta matriu no sigui 2 ha de passar que

$$2\,xe^{-x^2-y^2} = -1, \quad 2\,ye^{-x^2-y^2} = 2$$

  en particular si $x \geq 0$ tots els punts tenen rang 2.
- En el punt $P = (0, 0, 1)$ la matriu de derivades és

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

  i el seu nucli ve donat per la direcció

$$\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Problema 3 III

- Per tant, la varietat tangent en $(0,0,1)$ és

$$(0,0,1)+[(2,\ 1,\ 0)]$$

i en equacions implícites

$$T_P C: \quad \begin{array}{rrrl} & & z = & 1 \\ x & -2y & -z = & -1, \end{array}$$

- Per altra banda, la varietat normal té sub. director generat pels gradients:

$$N_P C = (0,0,1)+[(0,0,1),(1,-2,-1)]$$

Problema 4 I

Problema 4

Sigui $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció $g(x, y) = x^2/4 + y^2$. Dibuixa les corbes de nivell $W_c : g(x, y) - c = 0$ per tot $c > 0$. Calcula els punts singulars de W_c, i la recta tangent i normal en els punts de $W_c \cap \{x = y\}$.

Solució:

- Corbes de nivell:

```
[X , Y ]= meshgrid ( -1:.1:1); % x = y
Z = (X .^2)/2+ Y .^2;
contour (X ,Y , Z ); axis square
```

- El gradient de g és

$$\left(\frac{1}{2}\,x,\, 2\,y\right)$$

- L'únic punt singular és l'origen.

Problema 4 II

- En un punt de la forma $x = y = a$, el gradient val

$$\left(\frac{1}{2}\,a,\ 2\,a\right)$$

Problema 5 I

Problema 5

Sigui $W \subset \mathbb{R}^3$ la gràfica de la funció $h(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Calculeu els punts singulars de W i la recta normal i el pla tangent en el punt $(0, 1, e^{-1})$.

Solució:

- La gràfica és una superfície de $\mathbb{R}^3$:

```
[X , Y ]= meshgrid ( -1:.1:1); % x = y
Z = exp(-X.^2- Y.^2);
surf(X ,Y , Z );
```

- El gradient de h és

$$\nabla h(x,y) = \left(-2\,xe^{\left(-x^2-y^2\right)},\ -2\,ye^{\left(-x^2-y^2\right)}\right)$$

- W no té cap punt singular perquè la funció és C^1.

Problema 5 II

- El punt $P = (0, 1, e^{-1})$ de la superfície correspon a $z = h(0, 1)$ i el el gradient val
$$\nabla h(x, y) = \left(0,\ -2\, e^{(-1)}\right)$$
- La varietat normal en P ve donada per
$$N_P W = (\mathbf{x}_0, h(\mathbf{x}_0)) + [(-\nabla h(\mathbf{x}_0), 1)],$$
que en el nostre cas és
$$N_P W = (0, 1, e^{-1})) + [(0, 2e^{-1}, 1)],$$
- La varietat tangent en P ve donada per
$$T_P W = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \,|\, x_{n+1} = h(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla h(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\rangle\},$$
que en el nostre cas ve donada, implícitament, per
$$z = e^{-1} - 2e^{-1}(y - 1)$$

Problema 12 I

Problema 12

Trobeu els extrems (absoluts i locals) de $f(x, y) = 1 - x^2$ en la hipèrbola $x^2 - 2y^2 = 1$.

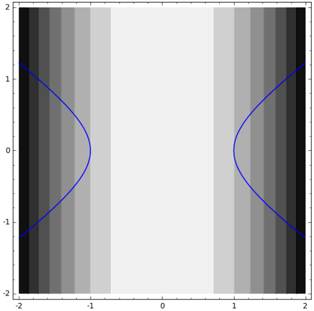


Figura: Les línies verticals són corbes de nivell $1 - x^2 = c$ i en els extrems de $f_{|W}$, son tangents a W.

Problema 12 II

Solució:

1. Gradient de f i de g

$$\nabla f(x,y) = (-2\,x, 0)\,, \quad \nabla g(x,y) = (2\,x,\ -4\,y)$$

2. Imposem rang $(\nabla f(P), \nabla g_1(P), g_2(P)) \leq 2$ i obtenim que $y = 0$ d'on $x = \pm 1$.
3. Observem que tant f com g son simètriques respecte x i y, per tant, només ho veurem per a $P = (2,0)$ que té multiplicador de Lagrange $\lambda = -1$. La funció de Lagrange corresponent és

$$L(x,y) = f(x,y) - (-1)g(x,y) =$$

que té per Hessiana (constant)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Problema 12 III

4. És definida negativa a tot arreu $\Rightarrow (1, 0)$, és màxim local.
5. Per simetria el punt $(-1, 0)$ també és un màxim local.
6. A més són màxims absoluts. En efecte, $f(P_1) = f(P_2) = 0$ i $f(x, y) = 1 - x^2$ és ≥ 0 en tot $(x, y) \in W$ perquè

$$(x, y) \in W \Rightarrow 1 - x^2 = -2y^2 \leq 0.$$

Problema 14 I

Problema 14

Volem trobar el màxim absolut, si existeix, de la funció $f(x, y, z) = 2x + 3y - z - 1$,

- en la superfície S d'equació $g_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$,

Solució:

1. En la superfície S,

$$\nabla f(x, y, z) = (2, 3, -1), \quad \nabla g(x, y, z) = (2\,x,\ 4\,y,\ 0)\,.$$

   Com que aquests dos vectors no poden ser mai paral·lels i $\nabla g(x, y, z)$ no s'anul·la mai sobre S, f restringida a S no té cap punt crític i, per tant, f no té extrems .

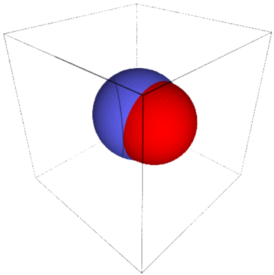
Problema 15 I

Problema 15 Determineu els extrems locals de:

1. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ lligats per
$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$
2. $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ lligats per
$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$$
3. $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ lligats per
$$g(x,y,z) = \cos(\pi xyz) = 0\,, \quad 0 < xyz < 1$$
4. $f(x,y,z,t) = -\frac{3}{4}x^2 - 3\frac{y^2}{2} + \frac{3}{4}z^2 + \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}xy + zt$ lligats per
$$\begin{cases} x + t = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Solució: Apartat (i). $W : g_1 = g_2 = 0$ és una circumferència $\Rightarrow$ és var. compacta:

Problema 15 II



Amb les eq. de W no es veu clar que sigui una circumferència, però només necessitem veure que és acotada (i així sabrem que és compacta). Que està acotada és immediat perquè W està inclosa en l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0$.

Problema 15 III

Gradients:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(3\,x^2,\, 3\,y^2,\, 3\,z^2\right)$$

$$\nabla g_1(x,y,z) = (2\,x,\, 2\,y,\, 2\,z)\,, \quad \nabla g_2(x,y,z) = (2\,x-2,\, 2\,y,\, 2\,z)$$

Els punts crítics són aquells per als que el rang de la següent matriu no és 3:

$$\begin{pmatrix} 3\,x^2 & 3\,y^2 & 3\,z^2 \\ 2\,x & 2\,y & 2\,z \\ 2\,x-2 & 2\,y & 2\,z \end{pmatrix}.$$

El seu determinant val

$$-12\,y^2 z + 12\,yz^2$$

que s'anul·la en els plans

$$y = 0, \quad z = 0, \quad y = z.$$

Problema 15 IV

La intersecció d'aquests plans amb les equacions de W determinarà els punts crítics:

$$
\begin{aligned}
&y = 0, g_1 = 0, g_2 = 0 \Rightarrow P_1 = (1, 0, 2), P_2 = (1, 0, -2)\\
&z = 0, g_1 = 0, g_2 = 0 \Rightarrow P_3 = (1, 2, 0), P_4 = (1, -2, 0)\\
&y = z, g_1 = 0, g_2 = 0 \Rightarrow P_4 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2}), P_5 = (1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Com que W és compacta, existeixen màx. i mín. globals (i han d'estar entre aquests pts. crítics) $\Rightarrow$ avaluem f en els P_i per trobar-los:

$$f(P_1) = f(P_3) = 9, f(P_2) = f(P_4) = -7, f(P_5) = 1+4\sqrt{2}, f(P_6) = 1-4\sqrt{2}.$$

Per tant, P_1 i P_3 són màxims globals i P_2, P_4 són mínims globals. Només ens falta estudiar P_5 i P_6. En P_5 i P_6, el gradient de f val, respectivament,

Problema 15 V

$$(3,\, 6,\, 6)\,,(3,\, 6,\, 6)$$

el gradient de g_1 val

$$\left(2,\, 2\sqrt{2},\, 2\sqrt{2}\right),\left(2,\, -2\sqrt{2},\, -2\sqrt{2}\right)$$

i el gradient de g_2 val

$$\left(0,\, 2\sqrt{2},\, 2\sqrt{2}\right),\left(0,\, -2\sqrt{2},\, -2\sqrt{2}\right)$$

i d'aquí obtenim que els multiplicadors de Lagrange són

$$P_5: \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{2}$$

$$P_6 \quad \lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = -\frac{3(\sqrt{2}+1)}{2}.$$

Problema 15 VI

Les Hessianes en un punt (x, y, z) són

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6\,x & 0 & 0 \\ 0 & 6\,y & 0 \\ 0 & 0 & 6\,z \end{pmatrix}$$

$$H(g_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(g_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i finalment

$$H(L) = \begin{pmatrix} 6x - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, $T_{P_5}W$ i $T_{P_6}W$ tenen subespai director, respectivament:

$$E = [u_5 = (0, -1, 1)], E = [u_6 = (0, -1, 1)]$$

Problema 15 VII

- $P_5 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$, $H(L)_{P_5|E} =$

$$(0, -1, 1) \begin{pmatrix} 6x - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{pmatrix}_{|P_5} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\sqrt{2} > 0$$

  $\Rightarrow$ mínim local de f en W.

- $P_6 = (1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(\sqrt{2} + 1)$,

$$H(L)_{P_5|E} = -6\sqrt{2} > 0$$

  $\Rightarrow$ màxim local de f en W.