Geometria

Tema 4: Moviments (8 h)

Adaptat per Marta Casanellas dels resums de Geometria de J. Amorós i M. Casanellas i de les transparències de J. Puig.

Primavera 2024

Outline

Moviments. Definició

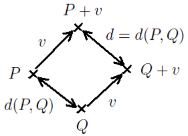
Definició

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és un *moviment* (o *desplaçament*) si conserva les distàncies entre punts: si $P, Q \in \mathbb{R}^n$

$$d(F(P), F(Q)) = d(P, Q)$$

Exemple. Translació: Si fixem un vector $v \in \mathbb{R}^n$, la *translació* per v és l'aplicació $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donada per $T_{\vec{v}}(P) = P + v$ per tot P. Conserva distàncies i per tant és un moviment.

Ex: A $\mathbb{R}^2$ si $v = (2, 3)$,
$T_{\vec{v}}((x, y)) = (x, y) + (2, 3) = (x + 2, y + 3)$



Q. Comproveu que és un moviment

Exemples de moviments

A $\mathbb{R}^2$

- la simetria respecte l'eix de les x's, $F(x, y) = (x, -y)$ és un moviment.
- una simetria respecte una recta qualsevol és un moviment.
- un gir respecte un punt és un moviment.

A $\mathbb{R}^3$

- la simetria respecte el pla $z = 0$, $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ és un moviment.
- una simetria respecte un pla qualsevol (*simetria especular*) és un moviment.
- un gir respecte un eix (recta) és un moviment.

Moviments. Propietats

Propietats

- *Si F és un moviment, aleshores F és una bijecció, és una aplicació contínua i envia punts alineats a punts alineats.*
- *Si F i G són moviments de $\mathbb{R}^n$, aleshores F^{-1}, $F \circ G$ i $G \circ F$ també ho són.*

Isometries de $\mathbb{R}^n$

Definició (Isometria)

Un moviment s'anomena *isometria* si és una aplicació lineal.

Observacions:

- f isometria $\Rightarrow f(0) = 0$.
- Si M és una matriu de canvi de base entre b.o.n.'s (és una matriu ortogonal), aleshores l'aplicació

$$X \mapsto MX$$

  és una isometria.
- Totes les isometries són d'aquest tipus ja que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és una aplicació lineal, es pot veure que són equivalents:
  - f és una isometria (conserva distàncies)
  - $\|f(v)\| = \|v\| \ \forall v$ (conserva normes)
  - $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ (conserva productes escalars)
  - f envia la base canònica a una b.o.n. $u_1, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$
  - f té matriu *ortogonal* en base canònica: M tal que $M^t M = \mathrm{Id}$.

Isometries directes/inverses.

En particular, si f és una isometria $\Rightarrow \det(f) = \pm 1$ i

- Si $\det f = +1$ diem que la isometria és *directa*, o que *conserva l'orientació* (vegeu apartat 2).
- Si $\det f = -1$ diem que la isometria és *inversa*, o que *canvia l'orientació* (vegeu apartat 2).

El teorema d'estructura

Teorema (Teorema d'estructura)

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és un moviment si, i només si, F es pot escriure com

$$F(X) = f(X) + v \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

amb f una isometria (isometria associada a F) i v un vector fixat.
És a dir: els moviments són isometries f (que canvien els eixos i conserven l'origen) seguides de translacions T_v (que canvien l'origen), $F = T_v \circ f$.

Conseqüència

Donat F moviment, la imatge de qualsevol $X \in \mathbb{R}^n$ ve determinada per la isometria f i la imatge d'un P_0 qualsevol:

$$F(X) = f(X - P_0) + F(P_0). \tag{2}$$

El teorema d'estructura. Conseqüències

$F(X) = f(X) + v \quad \forall X$ (com en (1)), aleshores:

- v està determinat per F: $v = F(0)$ (o també $v = F(P_0) - f(P_0)$ per qualsevol P_0),
- la isometria f queda determinada per F: qualsevol $u \in \mathbb{R}^n$ es pot escriure com $u = \overrightarrow{P, Q}$, $\Rightarrow f(u) = \overrightarrow{F(P)F(Q)} = F(Q) - F(P)$.
- La isometria f reflecteix com es transformen els vectors mitjançant F i en canvi per transformar punts hem d'usar tota la F.
- Un moviment F és una isometria $\Leftrightarrow F(0) = 0$.

Més conseqüències

$F(X) = f(X - P_0) + F(P_0)$ (com en (2)), aleshores:

- Amb matrius: si $M = M_{e_i}(f)$, aleshores

$$\boxed{F(X) = M \cdot (X - P_0) + F(P_0).}$$

  Així podem escriure les "equacions" del moviment F i podem recuperar la forma d'expressar-lo com a (1):

$$= \underbrace{M \cdot X}_{f(X)} + \underbrace{F(P_0) - M \cdot P_0}_{v}$$

  per tot punt X i per qualsevol P_0.

- En concret, si P_0 és un punt fix per F ($F(P_0) = P_0$), aleshores

$$F(X) = M \cdot (X - P_0) + P_0.$$

- Si $V = a + G$ és una varietat lineal $\Rightarrow F(V)$ és la varietat lineal $F(a) + f(G)$.

Outline

Orientacions a $\mathbb{R}^2$

Una base u_1, u_2 de $\mathbb{R}^2$ té orientació

- *directa o positiva* si el sentit del gir més curt de u_1 a u_2 és el sentit directe (antihorari),
- *inversa* si el sentit del gir més curt de u_1 a u_2 és el sentit invers (horari).

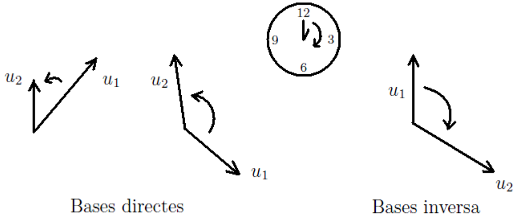


Figura: Bases orientades del pla

Q. La base e_2, e_1 és directa o inversa?

Orientacions

A $\mathbb{R}^n$ diem que la base estàndard $e_1, \ldots, e_n$ és *directa o positiva* i per les altres bases definim:

Definició

Una base $u_1, u_2, \ldots$ de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ té *orientació directa o positiva*, si

$$\det(u_1, u_2, \ldots u_n) > 0$$

(el determinant es calcula en base estàndard). Altrament es diu que la base té *orientació inversa*, és *inversa*, o és *indirecta*.

Orientacions a $\mathbb{R}^3$

A $\mathbb{R}^3$ per veure si una base és directa usem la *regla de la mà dreta* (o del vis, o del llevataps): Una base u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^3$ és directa quan en posar el polze de la mà dreta estirat apuntant cap al tercer vector u_3, el sentit de gir que fem en tancar la mà recorre l'angle més curt entre u_1 i u_2.

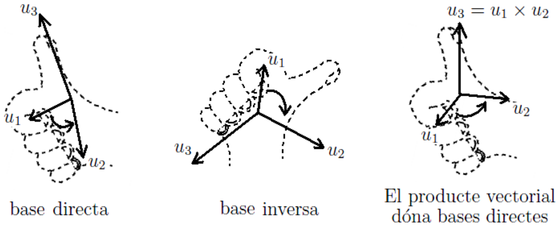


Figura: Bases orientades de l'espai

- Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ són vectors l.i. $\Rightarrow$ la base $u, v, u \times v$ és directa,

$$\det(u, v, u \times v) > 0.$$

Outline

Exemples d'isometries a $\mathbb{R}^2$

f isometria $\Leftrightarrow$ f lineal amb matriu ortogonal.

gir de centre 0

- $f =$ gir de centre $(0,0)$ d'angle α (en sentit antihorari),

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Q. Per què té aquesta matriu el gir?

Simetria respecte una recta pel 0

- f = simetria respecte una recta $r = [v] \ni 0$. Si u és ortogonal a $v \Rightarrow$

$$\underbrace{f(X)}_{\text{simetric de X resp.}r} = 2\pi_{[v]}(X) - X = X - 2\pi_{[u]}(X).$$

Q. Deduiu aquestes formules del que sabeu del Tema 2.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\frac{u^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{u^t u}u$$

I la matriu en base estàndard és

$$M_e(f) = Id - 2\frac{uu^t}{u^t u}.$$

Q. Per què té aquesta matriu?

Classificació d'isometries de $\mathbb{R}^2$

Teorema

Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometria. Aleshores tenim 2 possibilitats:

det	Descripció	$M_{e_i}(f)$	Càlcul d'elements característics
$\det(f) = 1$	gir/rotació de centre $(0,0)$ i angle α en sentit positiu	$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ (i en qualsevol b.o.n.)	$\alpha = \widehat{v, f(v)}$ per qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$
$\det(f) = -1$	simetria/reflexió respecte $r = [v] \ni 0$	$\mathrm{Id} - \frac{2}{u^t u} u u^t$, si $u \perp v$ qualsevol	$r = [w - f(w)]^\perp$ per qualsevol $w \in \mathbb{R}^2$.

Si f és una simetria ($\det f = -1$) respecte $r = [v]$, i u és un vector ortogonal a v, aleshores per qualsevol vector w:

$$\boxed{f(w) = w - 2\frac{\langle u,w\rangle}{\langle u,u\rangle} u.}$$

Exemple de simetria

Calculeu la imatge vector $w = (2,5)$ per una reflexió f respecte la recta $r : x + 3y = 0$.

- La recta r té vector normal $u = (1,3)$.
- Usant la formula:

$$f(w) = (2,5) - 2\frac{2\cdot 1 + 5\cdot 3}{1^2 + 3^2}(1,3) = (2,5) - \frac{34}{10}(1,3) = (-1.4, -5.2)$$

- O trobant la matriu d'aquesta reflexió en base estàndard:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(w) = M\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple de classificació d'isometria

Donada l'aplicació $f(x,y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$, digueu si és una isometria i quin tipus és.

- f és aplic. lineal amb matriu $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- M és matriu ortogonal $\Rightarrow$ f és isometria
- $det(M) = 1 \Rightarrow$ pel Ta. classificació, f és un gir.
- Element característic: l'angle α; el podem trobar perquè segons el Ta. M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = 1/2, \sin\alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- O també podem trobar α sabent $\alpha = \widehat{v, f(v)}$ $\forall v \Rightarrow$ prenent $v \in \mathbb{R}^2$ qualsevol podem calcular $\cos\alpha = \frac{<v,f(v)>}{|||v|||||f(v)|||}$ i si $det(v, f(v)) > 0$ (resp. $det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exercicis

- **Q.** Donada l'aplicació $f(x, y) = (-y, -x)$, digueu si és una isometria, classifiqueu-la i trobeu els elements característics.
- Problemes d'aquesta part: 1,4

Outline

Recordem:

Isometries

f isometria

$$\Updownarrow$$

f aplicació lineal amb matriu ortogonal (en base canònica o en qualsevol b.o.n.)

$$\Updownarrow$$

f moviment que deixa el 0 fix.

Exemples d'isometries de $\mathbb{R}^3$: Rotació

Exemple: $f =$ *rotació* d'un cert angle respecte d'una recta r que passa per l'origen; r s'anomena l'*eix de rotació*

- Per a distingir les rotacions d'angle θ i $-\theta$ $(= 2\pi - \theta)$ cal orientar la recta r.
- Escollim un vector u de r, orientem $r = [u]$ per aquest vector i usem la regla de la mà dreta: posem el polze en direcció de u i el sentit positiu de gir és el que fa tancar la mà (mirant des de la punta de u, el gir positiu és antihorari en el pla ortogonal a l'eix). Si v és un vector ($\notin r$), aleshores l'angle θ està $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons:

$$\begin{array}{lcl} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow & \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{array} \tag{3}$$

- Una rotació no canvia el sentit de les bases i per tant és una isometria directa ($\det(f) = 1$).

Exemple: Rotació (cont.)

Per ex., considerem $f =$ gir amb eix de rotació $r =$ eix de les z's i angle $\pi/3$. Aleshores,

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Q. Per trobar aquesta matriu només cal veure on va a parar cada vector de la base; comproveu que la matriu és correcta!

A la p.35 donem una fórmula per a trobar la matriu d'una rotació qualsevol.

Exemple: Simetria axial (rotació d'angle π)

Exemple: $f =$ una *simetria axial* respecte d'una recta r que passa per l'origen.

- De fet f és un gir d'angle π respecte la recta r (i per tant $\det(f) = 1$).
- Com que $\pi = -\pi$, no cal precisar l'orientació que donem a l'eix.
- Per ex. $f =$ simetria axial respecte l'eix de les $z's$, llavors, **Q.** $f(x, y, z) =?$

Exemple: simetria especular

Exemple $f =$ *simetria especular* (o reflexió) respecte un pla Π que passa per l'origen.

- La simetria especular canvia l'orientació de les bases (mireu com es transforma la vostra mà dreta davant un mirall), $\Rightarrow \det(f) = -1$.
- Per ex., si $\Pi = \{z = 0\}$, aleshores **Q.** $f(x, y, z) =?$
- A la p. 35 donem una fórmula per calcular la matriu d'una simetria especular (o la imatge d'un vector concret) i és la mateixa que teníem a $\mathbb{R}^2$ per la simetria respecte una recta (tot es basa en calcular el simètric d'un punt/vector).

Exemple: simetria central

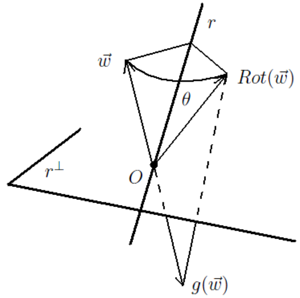
Exemple: $f =$ *simetria central* respecte el $(0,0,0)$,

$$f(x,y,z) = (-x,-y,-z).$$

- De fet, $f = -Id$ ($\Rightarrow \det(f) = -1$) i f equival a fer un gir d'angle π respecte un eix qualsevol que contingui el $(0,0,0)$ seguit d'una simetria especular respecte un pla ortogonal a l'eix de gir i que passa pel $(0,0,0)$.

Exemple: Rotació seguida de Simetria especular

Exemple: $g =$ rotació R d'eix $r = [u]$ i angle θ seguida d'una simetria respecte el pla ortogonal a r, $[u]^\perp$



A la p. 37 donem una fórmula per a trbar la matriu de la isometria en aquest cas.

Anem a veure que les rotacions, simetries especulars i simetries especulars seguides de rotació son de fet els únics tipus possibles d'isometries a $\mathbb{R}^3$.

Teorema: Classificació d'isometries a $\mathbb{R}^3$

Teorema

Classificació d'isometries a $\mathbb{R}^3$ *Si* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *és una isometria tenim dues possibilitats:*

- **Cas 1:** $\det f = +1$ **Isometria directa:** f *és una rotació respecte d'un eix* $r = [u]$ *que passa per l'origen (*r *és l'*eix de rotació*).*
- **Cas 2:** $\det f = -1$ **Isometria indirecta** $f =$ *és una rotació* R *d'angle* θ *respecte de recta* $r = [u] \ni O$*, seguida de simetria especular* S *respecte del pla* $[u]^{\perp}$, $f = S \circ R$.

Qualsevol isometria de $\mathbb{R}^3$ es pot escriure d'una d'aquestes dues maneres (com cas 1 si $\det f = 1$, com cas 2 si $\det f = -1$). És important notar que en el cas 2, la simetria és respecte un pla *ortogonal a l'eix de rotació.*

Q. *Per què qualsevol isometria té determinant* 1 *o* -1*?*

Q. *Si* g *és una rotació respecte una recta* r *per l'origen i* h *és una simetria especular respecte un pla per l'origen (no perpendicular a* r*), la composició* $f = h \circ g$ *a quin dels dos casos correspon?*

Cas 1: Isometria directa $\det f = +1$:

Estudiem amb més detall cadascun dels casos.

Cas 1: Isometria directa $\det f = +1$: $\Leftrightarrow f =$ rotació respecte d'un eix $r = [u]$ que passa per l'origen. Suposem que l'eix de rotació està orientat per $u^t = (u_1, u_2, u_3)$, i l'angle de rotació és θ, aleshores:

- Imatge d'un vector

$$\boxed{f(v) = \cos(\theta)\, v + (1 - \cos\theta)\tfrac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} u + \sin\theta\, \tfrac{1}{\|u\|}\, u \times v}$$

- Matriu en base canònica

$$M_{e_i}(f) = \cos\theta\, \mathrm{Id} + \frac{1 - \cos\theta}{u^t u} u u^t + \frac{\sin\theta}{\|u\|} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Càlcul d'elements característics
  - $[u]$ = VEP's de VAP 1 = vectors fixos per f. **Q.** Per què?
  - $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
  - Escollim θ en $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{array}{lcl} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow & \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{array} \tag{4}$$

  - O bé: $\cos(\theta) = \frac{tr(f)-1}{2}$ i escollim el signe de θ segons (4) mirant $\det(v, f(v), u)$ per qualsevol $v \notin [u]$.
    Justificació: Si triem una b.o.n. directa v_1, v_2, v_3 amb $v_3 = u$ (*base ortonormal adaptada*), aleshores té matriu de f en aquesta base és:

$$M_{v_i}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas 2: $\det f = -1$

$f =$ és una rotació R d'angle θ respecte de recta $r = [u] \ni O$, seguida de simetria especular S respecte del pla $[u]^\perp$, $f = S \circ R$.

- **Cas 2.a** $\theta = 0$, $f = S =$ simetria especular respecte un pla $\Pi = [u]^\perp$. Tenim:
  - Imatge d'un vector:

$$\boxed{S(v) = v - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u}$$

  - Matriu en base canònica

$$M_{e_i}(S) = \mathrm{Id} - \frac{2}{u^t u} u u^t.$$

  - Càlcul d'elements característics

$$\Pi = [v - f(v)]^\perp \text{ per qualsevol } v \notin \Pi.$$

- **Cas 2.b:** $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Si orientem l'eix $[u]$ per u, tenim:
  - Imatge d'un vector

$$\boxed{f(v) = \cos(\theta)\, v + (-1 - \cos\theta)\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} u + \sin\theta\, \frac{1}{\|u\|}\, u \times v}$$

  - Matriu en base canònica

$$M_{e_i}(f) = \cos\theta\,\mathrm{Id} + \frac{-1 - \cos\theta}{u^t u} u u^t + \frac{\sin\theta}{\|u\|}\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Càlcul d'elements característics
    - $[u]$ = VEPs de VAP -1.
    - $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
    - Escollim θ en $[0,\pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons (per qualsevol$v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [0,\pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{5}$$

    - O bé: $\cos(\theta) = \frac{tr(f)+1}{2}$ i escollim el signe de θ segons (5) mirant $\det(v, f(v), u)$ per qualsevol $v \notin [u]$.

Exemple: una rotació a $\mathbb{R}^3$

Fem rotar $v = (1, 3, 3)$ un angle de $\frac{\pi}{3}$ entorn a la recta orientada $\{x - z = 0, 2x + y + 2z = 0\}$; on s'assumeix que el vector director que dóna l'orientació escollida de la recta és

$$u = (1, 0, -1) \times (2, 1, 2) = (1, -4, 1).$$

Q. Calculeu la imatge de v usant la fórmula. Solució:

Exemple: una rotació a $\mathbb{R}^3$

Fem rotar $v = (1,3,3)$ un angle de $\frac{\pi}{3}$ entorn a la recta orientada $\{x - z = 0, 2x + y + 2z = 0\}$; on s'assumeix que el vector director que dóna l'orientació escollida de la recta és

$$u = (1,0,-1) \times (2,1,2) = (1,-4,1).$$

Q. Calculeu la imatge de v usant la fórmula. Solució:

$$R(v) = (1 - \cos\frac{\pi}{3})\frac{< u, v >}{< u, u >}u + \cos\frac{\pi}{3}(1,3,3) + \sin\frac{\pi}{3}u \times v$$

Com $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u \times v = (-15,-2,7)$

$$R(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-8}{18} \cdot (1,-4,1) + \frac{1}{2}(1,3,3) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{18}}(-15,-2,7)$$
$$\simeq (-2.78, 1.98, 2.71).$$

Exemple: una rotació a $\mathbb{R}^3$ (cont.)

Q. Calculeu la matriu d'aquesta rotació. Solució:

Exemple: una rotació a $\mathbb{R}^3$ (cont.)

Q. Calculeu la matriu d'aquesta rotació. Solució:

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\frac{1}{2}}{18}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.528 & -0.315 & -0.789 \\ 0.093 & 0.944 & -0.315 \\ 0.844 & 0.093 & 0.528 \end{pmatrix}$$

Exemple: Rotació seguida de reflexió a l'espai.

Si f és una rotació d'angle $\frac{\pi}{4}$ respecte de l'eix orientat $[(2,0,-3)]$, seguida de reflexió respecte del pla ortogonal, calculeu la imatge del vector $v=(1,-2,2)$.

$$f(v)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-2,2)+(-1-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{-4}{13}(2,0,-3)$$

$$+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{13}}(-6,-7,-4)\simeq(0.58,-2.79,-0.95).$$

Exemple: Elements característics d'una rotació I

La matriu

$$Q = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} & -5/\sqrt{42} \\ 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} & 4/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

compleix $Q^t Q = \mathrm{Id}$, per tant és ortogonal, i $\det Q = 1$, per tant és d'una rotació.

Busquem l'angle θ de rotació: en base ortonormal adaptada la rotació té traça $1 + 2\cos\theta$. La traça no depén de la base escollida, de manera que

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}\, Q - 1}{2} = 0.4982$$

Triarem l'orientació de l'eix per a que l'angle de rotació estigui entre 0 i π, de manera que tindrem $\theta = \arccos(0.4982) = 1.0493 \text{ rad } \simeq 60.12^\circ$.

Exemple: Elements característics d'una rotació II

Ara determinem l'eix de rotació: és fix, és a dir que està format pels vectors propis de valor propi 1. Ho resolem i dóna un generador $\simeq u = (0.3802, -0.1942, 0.2381)$ Per a assegurar que la rotació tingui angle entre 0 i π amb l'orientació donada per u, cal comprovar que $\det(w, Q(w), u) > 0$ amb un vector qualsevol w (que no sigui de l'eix). Triem $w = e_2$ per fer-ho més fàcil i obtenim en efecte $\det > 0$. Si hagués sortit $\det < 0$ caldria orientar l'eix per $-u$ per tenir l'angle en $[0, \pi]$. En conclusió: Q és una rotació amb eix orientat

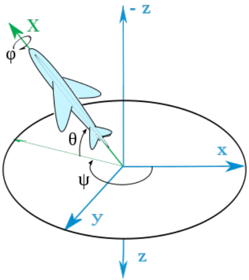
$$[(0.3802, -0.1942, 0.2381)]$$

i angle $\theta = 1.0493$ rad.

Outline

Els angles d'Euler

- Tot moviment continu d'un sòlid rígid (per exemple un avió) amb un punt fix és una rotació.
- El teorema següent ens diu com moure un telescopi o un avió respecte els seus tres eixos de gir que formen un b.o.n. e_1, e_2, e_3.
- Veurem només una des les possibles descomposicions de la rotació en els tres eixos, anomenada *yaw-pitch-roll* o ZYX: per aconseguir fer girar un avió cap a una direcció concreta, cal fer-lo girar respecte els seus eixos de rotació "yaw", "pitch" i "roll"; vegeu aquest gif animat.
- Podeu mirar també la pàgina Euler Angles de la Wikipedia.

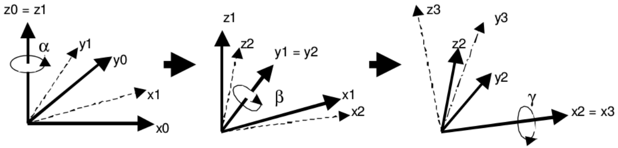


Teorema: descomposició en angles d'Euler

Sigui R una rotació (isometria directa) de $\mathbb{R}^3$ (de cert eix $\ni 0$ i angle) i sigui e_1, e_2, e_3 una b.o.n. directa. Aleshores existeixen angles, anomenats *angles d'Euler*, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\gamma \in [0, 2\pi)$ tals que

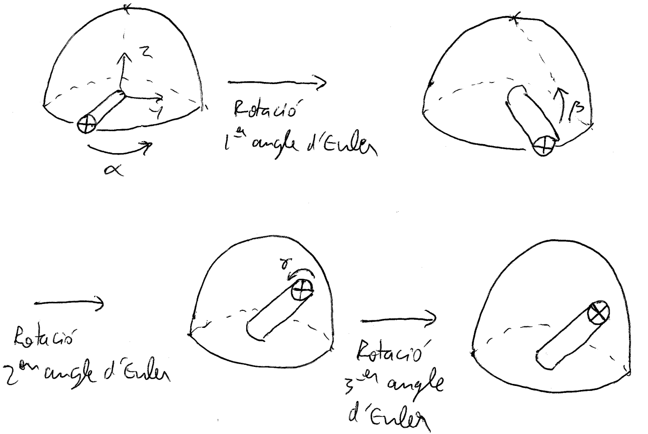
$$R = g_{1,\gamma} \circ g_{2,-\beta} \circ g_{3,\alpha}, \quad \text{on}$$

1. $g_{3,\alpha} =$ és la rotació d'eix $[e_3]$ i angle α,
2. $g_{2,-\beta} =$ és la rotació d'eix $[g_{3,\alpha}(e_2)]$ i angle $-\beta$,
3. $g_{1,\gamma} =$ és la rotació d'eix $[g_{2,-\beta}(g_{3,\alpha}(e_1))]$ i angle γ,



Rotation about z0 of angle α + Rotation about y1 of angle β + Rotation about x2 of angle γ

Composició dels tres girs $g_{1,\gamma} \circ g_{2,-\beta} \circ g_{3,\alpha}$



Podeu pensar com si el cilindre for un telescopi o un avió que volguessiu orientar en l'espai.

Versió Matricial

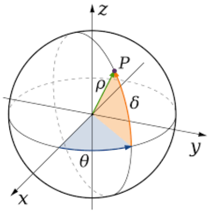
Matricialment el teorema ens diu que, donada una rotació R (isometria directa), $\exists\, \alpha, \beta, \gamma$ tals que:

$$M_{e_i} R = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix}$$

Observació

L'eix de rotació de $g_{1,\gamma}$ coincideix amb $R(e_1)$. En particular, α i β són els angles de les coordenades esfèriques de la imatge de $e_1 = (1, 0, 0)$ per la rotació R (fixeu-vos en la primera columna); en versió geogràfica: α =longitud ($= \theta$ en el dibuix), $\beta=$ latitud ($=\delta$ en el dibuix):

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$



Angles d'Euler d'una rotació

Usant la 1a col. i 3a fila de la matriu anterior, si coneixem la matriu d'una rotació

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

podem deduir els angles d'Euler de R:

$$\sin\beta = a_{31} \text{ (això determina } \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

$$\cos\alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{1-a_{31}^2}}, \sin\alpha = \frac{a_{21}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \text{ (això determina } \alpha)$$

$$\cos\gamma = \frac{a_{33}}{\sqrt{1-a_{31}^2}}, \sin\gamma = \frac{a_{32}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \text{ (això determina } \gamma)$$

Exemple: angles d'Euler a partir de matriu

En un exemple anterior, hem vist que la rotació d'angle $\frac{\pi}{4}$ respecte de l'eix $[(2, 0, -3)]$ té matriu

$$R = \begin{pmatrix} 0.797 & 0.588 & -0.135 \\ -0.588 & 0.707 & -0.392 \\ -0.135 & 0.392 & 0.910 \end{pmatrix}.$$

Els angles d'Euler són per tant:

- $\sin\beta = -0.135 \Rightarrow \beta \simeq -0.136$ rad ($\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)
- $\cos\alpha = \frac{0.797}{\sqrt{1-0.135^2}} \simeq 0.805, \sin\alpha = \frac{-0.588}{\sqrt{1-0.135^2}} \simeq -0.594 \Rightarrow \alpha \simeq 2\pi - 0.636$ rad
- $\cos\gamma = \frac{0.910}{\sqrt{1-0.135^2}} \simeq 0.918, \sin\gamma = \frac{+0.392}{\sqrt{1-0.135^2}} \simeq 0.396 \Rightarrow \gamma \backsimeq 0.407$ rad

Outline

Moviments

Hi ha dos mètodes (interdependents) per a treballar amb moviments:
Mètode 1. Usar el Teorema d'estructura: tot moviment F és una composició $F = T_{\vec{v}} \circ f$, on $T_{\vec{v}}$ és una translació (canvi d'origen) i f una isometria (canvi d'eixos). Es calculen separadament la isometria i la translació:
Exemple: $F(x, y) = (y + 2, x - 2)$ és un moviment que es pot descriure com

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v};$$

$F=$ isometria f seguida de translació de vector v, i seguidament classificar f. En aquest cas, F és la simetria resp. la recta $x - y = 0$ seguida de la translació de vector $(2, -2)$.

Però aquesta no és la forma més senzilla de tractar rotacions/simetries respecte varietats lineals!

Mètode 2. Buscar una *forma simplificada* canviant l'origen de la referència.

- Per exemple, el moviment F anterior és una *simetria respecte la recta* $x - y = 2$ (notem que aquesta recta ja no passa pel $(0, 0)$). És molt més senzill descriure F així.
- Els resultats de les dues transparències següents ens permeten passar d'un mètode a l'altre: d'un moviment F descrit com $F = T_{\vec{v}} \circ f$ (Mètode 1) a la seva forma simplificada (Mètode 2) i viceversa. Això s'anomena el Ta. de classificació de moviments.

Moviments a $\mathbb{R}^2$: formes simplificades de F

isometria f	moviment $F = T_{\vec{v}} \circ f$
$\det f = +1 \Rightarrow f$ rotació d'angle θ entorn a $O = (0,0)$	F rotació d'angle θ entorn a P punt fix de F o F$=$ translació (si no té punts fixos)
$\det f = -1 \Rightarrow f$ reflexió resp. recta $r = [w] \ni O$	$F =$ simetria resp. recta $P + [w]$, si F té punts fixos (tota la recta) o $F =$ reflexió respecte de recta $\tilde{r} \parallel r$, seguida de translació de vector $\tilde{w} \parallel w$, si F no té punts fixos

Moviments a $\mathbb{R}^3$: formes simplificades de F

isometria f	moviment $F = T_{\vec{v}} \circ f$
1. $\det f = +1$ f rotació angle θ i eix $r = [u] \ni O = (0,0,0)$	1.1 $F =$ rotació angle θ i eix $P + [u]$ si F té punts fixos 1.2 F bo té punts fixos, $F = T_{\vec{v}} \circ f$ (o *m. helicoidal*)
2. $\det f = -1 \Rightarrow f$ rotació d'angle θ i eix $r = [u] \ni O$ seguida de reflexió respecte del pla $r^{\perp} \ni O$	2.1 $F =$ rotació d'angle $\theta \neq 0$ i eix $\tilde{r} \parallel r$, seguida de simetria resp. un pla $\pi \perp r$ si F té un únic punt fix $P = \pi \cap \tilde{r}$, 2.2 $\theta = 0$, F no té punts fixos, $F = T_{\vec{v}} \circ f$ 2.3 $\theta = 0$, $F =$ simetria respecte pla $\pi \perp r$ si F té tot un pla π de punts fixos.

De forma simplificada a equacions del moviment

Si tenim la forma simplificada de F, si tenim un moviment que és una rotació (o simetria) però amb eix (o pla), que no passa per l'origen cal:

1. Observem a les taules anteriors que F té punts fixos $\Leftrightarrow$ F es pot descriure com rotació i/o simetria resp. una varietat lineal.
2. Identificar un punt P_0 que sigui de l'eix de rotació/pla de simetria, que és fix pel moviment ($F(P_0) = P_0$) i ens servirà d'origen pels nostres càlculs. Així podem calcular la imatge de qualsevol punt X posant-lo com $X = P_0 + \vec{P_0 X}$ i aplicant la fórmula (2)

$$F(X) = P_0 + f(\vec{P_0 X}) = f(X - P_0) + P_0$$

   on f és la mateixa rotació i/o simetria que F però respecte d'un eix/pla paral·lel al que teníem que passa per l'origen ($\Rightarrow$ és isometria). **Q.** Comproveu mirant les p.53 i 54 que a cada F descrit en forma simplificada, la isometria que li correspon és la mateixa però respecte la var. lineal paral·lela que passa pel 0.
3. Com que sabem calcular la matriu de f, obtindrem immediatament les equacions de F o la imatge de qualsevol punt.

Exemple de rotació a $\mathbb{R}^2$ I

Exemple

Sigui F la rotació de $\mathbb{R}^2$ d'angle $= -\frac{\pi}{3}$ i centre $P = (2, -1)$. Busquem la imatge de $Q = (1, 4)$ per F:

Segons p.53, la isometria f associada és una rotació amb matriu

$$\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

així que, com que $\vec{PQ} = (-1, 5)$

$$F(Q) = f(\vec{PQ}) + P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple de rotació a $\mathbb{R}^2$ II

Exemple

Busquem ara la imatge de la recta $l : Q + [(5,7)]$:

Acabem de calcular $F(Q)$. La direcció de la nova recta ve donada per la isometria f (no el moviment F!) aplicada al v. director $(5,7) \Rightarrow$

$$f(5,7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5+7\sqrt{3}}{2} \\ \frac{7-5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Així

$$F(Q + [\vec{v}]) = F(Q) + [f(v)] =$$

$$(\frac{3+5\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}) + [(\frac{5+7\sqrt{3}}{2}, \frac{7-5\sqrt{3}}{2})]$$

Exemple: Reflexió a $\mathbb{R}^2$ I

Exemple

F = reflexió de $\mathbb{R}^2$ respecte de la recta $r : x - y = 5$. Calculem la imatge de $Q = (3, 4)$.

Triem punt $P \in r$ per fer d'origen. Per exemple $P = (5, 0)$
Ara $F(Q) = P + f(\vec{PQ})$.
El vector normal a l'eix de reflexió r és $u = (1, -1)$. Així que

$$f(\vec{PQ}) = \vec{PQ} - 2\frac{< \vec{PQ}, u >}{< u, u >}u = (-2, 4) + 2\frac{6}{2}(1, -1) = (4, -2), \quad \text{i}$$

$$F(Q) = (5, 0) + (4, -2) = (9, -2)$$

Exemple

Calculem ara la imatge de la recta $l : x - 5y = 1$ per aquesta reflexió.

Exemple: Reflexió a $\mathbb{R}^2$ II

Posem la recta l en la forma paramètrica:

$$l : Q_1 + [v_1] = (1,0) + [(5,1)].$$

Ara

$$F(Q_1) = P + f(\vec{PQ_1}) = (5,0) + (-4,0) + 2\frac{4}{2}(1,-1) = (5,-4), \quad \text{i}$$

$$f(v_1) = v_1 - 2\frac{< v_1, u >}{< u, u >}u = (5,1) - 2\frac{4}{2}(1,-1) = (1,5).$$

Per tant, $F(l) : (5,-4) + [(1,5)]$.

Exemple: Rotació a $\mathbb{R}^3$ I

Exemple

Donada F, la rotació de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ respecte de la recta $r : (2,2,-1) + [(1,3,5)]$, busquem la imatge de la recta

$$l : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Posem l en forma paramètrica:

- Punt de l: fent $z = 0$ tenim $x - y = 1, x + y = 3$ aixi que $Q = (2,1,0) \in l$.
- El vector director de l és $v = (1,-1,2) \times (1,1,1) = (-3,1,2)$. Així $l : (2,1,0) + [(-3,1,2)]$.

Exemple: Rotació a $\mathbb{R}^3$ II

Ara, l'eix de rotació passa per $P = (2, 2, -1)$, de manera que:

$$F(Q) = P + f(\vec{PQ}) = (2, 2, -1) + f(0, -1, 1) = (2, 2, -1) +$$

$$\cos\frac{\pi}{2}(0, -1, 1) + (1 - \cos\frac{\pi}{2})\frac{\langle u, (0, -1, 1)\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\|u\|} u \times (0, -1, 1)$$

$$= (2, 2, -1) + \frac{2}{35}(1, 3, 5) + \frac{1}{\sqrt{35}}(8, -1, -1)$$

$$= \frac{1}{35}(72 + 8\sqrt{35}, 76 - \sqrt{35}, -25 - \sqrt{35})$$

Exemple: Rotació a $\mathbb{R}^3$ III

mentre que la direcció de la recta es modifica per la isometria

$$
\begin{aligned}
f(\vec{v}) = \cos\frac{\pi}{2}v + (1-\cos\frac{\pi}{2})\frac{< u, v >}{< u, u >}u + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\|u\|}u \times v \\
= \frac{10}{35}(1,3,5) + \frac{1}{\sqrt{35}}(1,-17,10) \\
= \frac{1}{35}(10+\sqrt{35}, 30-17\sqrt{35}, 50+10\sqrt{35})
\end{aligned}
$$

Així doncs,

$$
\begin{aligned}
F(l) : F(Q) + [f(v)] = \frac{1}{35}(72+8\sqrt{35}, 76-\sqrt{35}, -25-\sqrt{35})+ \\
[(10+\sqrt{35}, 30-17\sqrt{35}, 50+10\sqrt{35})
\end{aligned}
$$

Exemple: Reflexió de $\mathbb{R}^3$ respecte un pla I

Exemple

Considerem la reflexió de $\mathbb{R}^3$ respecte del pla $x - 2y - z = 2$. Calculeu les imatges de $Q = (1, -1, 4)$ i del pla $\Pi = x + y - z = 1$.

Primer identifiquem un punt del pla de reflexió: Si Fem $y = z = 0$ tenim $P = (2, 0, 0)$. Un vector ortogonal al pla de reflexió és $u = (1, -2, -1)$. Ara apliquem que

$$F(Q) = P + f(\vec{PQ}) = (2,0,0) + f(-1,-1,4) = (2,0,0)+$$

$$(-1,-1,4) - 2\frac{< (-1,-1,4),(1,-2,-1) >}{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}(1,-2,-1)$$

$$= (2,0,0) + (-1,-1,4) - 2\frac{(-3)}{6}(1,-2,-1) = (2,-3,3)$$

Exemple: Reflexió de $\mathbb{R}^3$ respecte un pla II

Per trobar la imatge del pla Π, apliquem la reflexió al seu vector normal $\vec{n} = (1, 1, 1)$:

$$f(\vec{n}) = \vec{n} - 2\frac{< \vec{n}, u >}{< u, u >}u = (1, 1, 1) - 2\frac{(-2)}{6}(1, -2, -1) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Ara triem un punt de Π: Fent $y = z = 0$ tenim $Q_1 = (1, 0, 0)$. La imatge de Q_1 per la reflexió és:

$$\begin{aligned} F(Q_1) &= P + f(\vec{PQ_1}) = (2, 0, 0) + f(-1, 0, 0) \\ &= (2, 0, 0) + (-1, 0, 0) - 2\frac{< u, \vec{PQ_1} >}{< u, u >}u \\ &= (2, 0, 0) + (-1, 0, 0) - 2\frac{-1}{6}(1, -2, -1) \\ &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Exemple: Reflexió de $\mathbb{R}^3$ respecte un pla III

Com $F(\Pi)$ passa per $F(Q_1) = \frac{1}{3}(4, -4, -2)$ i té vector normal $f(\vec{n}) = \frac{1}{3}(5, -1, 1)$, la seva equació implícita és

$$\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{22}{9}.$$

Matriu dels moviments

Sigui F moviment d'equacions $F(X) = M \cdot X + b$ on $M = M_{e_i}(f)$.
Considerem

- $P=$ la imatge de l'origen, $P = F(0) = b$,
- els vectors $u_i = f(e_i)$ i
- la referència ortonormal $\mathbf{u} = \{P; u_1, \ldots, u_n\}$.

Aleshores

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & b \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

és la matriu de canvi de referència de $\mathbf{u}$ a la referència natural $\mathbf{e}$. **Q.** Per què?

I al revés, la matriu de canvi de referència invers $A_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}}$ correspon al moviment invers F^{-1} que envia P a O i u_i a e_i.

Canvis de referencia i moviments

Canvis de referència ortonormals són moviments

Sigui $\mathbf{u} = \{P; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una referència *ortonormal* de $\mathbb{R}^n$ i $A_{\mathbf{u}\to\mathbf{e}}$ la matriu de canvi de ref. a la canònica $\mathbf{e}$,

$$A_{\mathbf{u}\to\mathbf{e}} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & b \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Aleshores podem reinterpretar el canvi de referència com un moviment F: $F(X) = MX + b$, que envia 0 a P i e_i a u_i.

Exemple

Si a $\mathbb{R}^2$ *considerem la referència ortonormal* $\mathbf{u} = \{P = (1,3); u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$, *llavors*

$$A_{\mathbf{u}\to\mathbf{e}} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

El moviment corresponent és

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 3 \end{pmatrix}.$$

Q. Per què és un moviment aquesta aplicació?

Exemple: canvis de referència com a moviments I

Exemple

Comprovem que el canvi de referència de $\mathbb{R}^2$ donat per la matriu

$$A_{u\to e} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 1 \\ -0.6 & 0.8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és un canvi de referències ortonormal, i identifiquem els seus elements característics com a moviment.

El moviment associat és

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La matriu de la isometria és

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Exemple: canvis de referència com a moviments II

Com $\det M = 0.8^2 + 0.6^2 = 1$, la isometria f és una rotació, d'angle θ tal que $\cos\theta = 0.8$, $\sin\theta = -0.6$ i, per tant, l'angle $\theta \simeq -0.64$. El moviment F és per tant (mirant p.53) una rotació d'angle θ i un cert centre P.
El centre de rotació és un punt fix de F, per tant compleix

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ho podem escriure com a sistema lineal, i obtenim: El sistema lineal és

$$\begin{cases} 0.8x + 0.6y + 1 = x \\ -0.6x + 0.8y + 3 = y \end{cases}$$

que dóna com a solució $P = (5,0)$, el centre de rotació.

Outline

Problema 3 I

Problema 3i

Trobeu les matrius en base canònica

1. de la reflexió de $\mathbb{R}^2$ respecte la recta $2x + y = 0$,

Solució:

1.
```
>> % vector ortogonal a la recta de reflexio
>> u1=[2;1];
>> S1=eye(2)-2/(u1'*u1)*u1*u1'
S1 =
   -0.60000  -0.80000
   -0.80000   0.60000
>> format rat
>> S1=eye(2)-2/(u1'*u1)*u1*u1'
S1 =
        -3/5         -4/5
        -4/5          3/5...
```

Problema 3 II

$$\begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Problema 4

Problema 4

Trobeu la matriu en base canònica de la rotació g de $\mathbb{R}^2$ que porta la recta $r : x + y = 0$ a la recta $l : x - (2+\sqrt{3})y = 0$.

Solució: Rotació d'angle $\alpha = \pi/3$ o $\alpha = -2\pi/3$ i centre 0. Matriu:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Problema 6 I

Problema 6

Siguin dues reflexions g_1, g_2 de $\mathbb{R}^3$ amb direccions ortogonals al pla de simetria $u_1 = [(1, 2, 2)], u_2 = [(1, -1, 2)]$ respectivament. Quina mena d'isometries són $g_1 \circ g_2, g_2 \circ g_1$? Trobeu els seus elements característics.

Solució:

- La composició de dues isometries inverses és directa (calculeu determinants).

```
>> u1=[1,2,2]'; u2=[1,-1,2]';
>> u=cross(u1,u2)'
ans =
   6    0   -3
>> dot(u1,u2)/(norm(u1)*norm(u2))
ans =  0.40825
>> acos(dot(u1,u2)/(norm(u1)*norm(u2)))
ans =  1.1503
```

Problema 6 II

```
>> 2*360*1.1503/(2*pi)
ans =  131.81
```

- $g_2 \circ g_1$: gir d'eix $[u = (6, 0, -3)]$ i angle $131'81$ si està orientat per u.
- $g_1 \circ g_2$: gir d'eix $[u = (6, 0, -3)]$ i angle $-131'81$ si està orientat per u.

Problema 13 I

Problema 13

Fem una rotació d'angle $\frac{\pi}{3}$ entorn de la recta $\{x - 2y + z = 2, x - 3y = 0\}$. Calculeu les imatges

1. del punt $P = (4, 0, 3)$,
2. de la recta $r : (4, 0, 3) + [(3, -2, -4)]$,
3. del pla $\pi : -2x - 37y + 17z = 43$.

Escrivim les dades inicials

```
>> alfa = pi/3; %angle rotacio
>> A = [1,-2,1;1,-3,0]; %normals al pla
>> b = [2,0]'; %Terme independent
>> P = [4,0,3]'; %Apartat (i)
>> Pr = [4,0,3]'; %Apartat (ii)
>> vr = [3,-2,-4]'; %Apartat (ii)
>> Api = [-2,-37,17]; %Apartat (iii)
>> bpi = 43; %Apartat (iii)
```

Per fer la rotació del punt $P = (4, 0, 3)$, calculem el vector director de l'eix de rotació

```
>> u=cross(A(1,:),A(2,:))';
>> % punt de l'eix de rotacio
>> R=A\b;
>> % usem: F(P)=R+f(P-R) amb f=rotacio d'eix per l'origen
>> v=P-R;
>> fP=R+(1-cos(alfa))*dot(u,v)/dot(u,u)*u+cos(alfa)*v+ ...
  sin(alfa)*cross(u,v)/norm(u)
fP =
   3.76112
  -1.32782
   0.95553
```

Calculem la rotació de la recta $r : (4,0,3) + [(3,-2,-4)]$:

```
>> % (ii) La rotacio del punt i la del vector director
>> % donen la de la recta
>> % falta la rotacio del vector director vr
>> gvr=(1-cos(alfa))*dot(u,vr)/dot(u,u)*u + ...
  cos(alfa)*vr+sin(alfa)*cross(u,vr)/norm(u)
gvr =
   1.4333
   1.8500
  -4.8500
```

Calculem la rotació del pla $\pi : -2x - 37y + 17z = 43$. Observem que el punt P que ens han donat ja pertany al pla. Aleshores només ens caldrà buscar la imatge del vector normal per la isometria.

```
>> Api*P
ans =  43
>> % Efectivament, Api*P=bpi
>> % fer rotar el vector normal del pla
>> n=Api';
>> gn=(1-cos(alfa))*dot(u,n)/dot(u,u)*u+cos(alfa)*n + ...
  sin(alfa)*cross(u,n)/norm(u);
>> fApi=gn'
```

```
fApi =
  -14.404   -34.022   -17.234
>> fbpi=fApi*fP
fbpi = -25.469
>> % el pla rotat te equacio amb coeficients fApi ...
   i terme independent fbpi
```

Solució:

1. $f(P) = (3.7611, -1.3278, 0.9555)$.
2. $f(r) = (3.7611, -1.3278, 0.9555) + [(1.4333, 1.8500, -4.8500)]$.
3. $f(\pi) = \{-14.4041x - 34.0220y - 17.2344z = -25.4688\}$.

Problema 18

Problema 18

1. Sigui F un gir de $\mathbb{R}^2$ al voltant d'un punt p. Si $F(q_1) = q_2$, demostreu que p pertany a la recta perpendicular a $u = q_2 - q_1$ i que conté al punt $(q_1 + q_2)/2$.
2. Trobeu el gir de $\mathbb{R}^2$ que verifica $F(1,1) = (-1,3)$ i que $F(2,0) = (0,4)$ (equacions, centre i angle de gir).

Solució:
(ii) gir de centre $(-1,1)$ i angle $\pi/2$. Equacions $F(x,y) = (-y, x+2)$.

Problema 19 I

Problema 19

1. Sigui F una simetria respecte a una recta r de $\mathbb{R}^2$. Si $F(p) = q$, demostreu que r és la recta perpendicular a $u = q - p$ que conté al punt $(p + q)/2$.
2. Trobeu la simetria axial de $\mathbb{R}^2$ que verifica $F(2, 3) = (1, 1)$(equacions i eix de simetria).

Solució: Part 2:

- El vector $\vec{u} = \vec{pq}$ és $\vec{u} = (1, 1) - (2, 3) = (-1, -2)$. Per tant, l'eix és de la forma:

$$-x - 2y = C$$

per a una C que determinem perquè la recta passi per $(p + q)/2 = (3/2, 2)$, cosa que dóna

$$-x - 2y = -11/2$$

Problema 19 II

- Es tracta doncs d'una simetria resp. recta $x + 2y = 11/2$.
- El seu eix té direcció normal $[(1, 2)]$.
- Les seves equacions són

$$F(x, y) = \left(\frac{3}{2}, 2\right) + \left(x - \frac{3}{2}, y - 2\right) \\ - 2\frac{\left\langle \left(x - \frac{3}{2}, y - 2\right), (1, 2)\right\rangle}{\langle (1, 2), (1, 2)\rangle}(1, 2) = \\ \frac{1}{5}(11 + 3x - 4y, 22 - 4x - 3y)$$

Problema 20 I

Problema 20

1. Sigui F una rotació al voltant d'una recta r de $\mathbb{R}^3$. Si $F(p) = q$, demostreu que l'eix r pertany al pla π perpendicular al vector $u = q - p$ i que conté al punt $(p+q)/2$.
2. Si F és una rotació de $\mathbb{R}^3$ tal que $F(1,1,1) = (1,1,0)$ i que $F(0,1,0) = (1,0,1)$, trobeu l'eix, l'angle de gir i les equacions de F.

Solució: Part 2:

- Per trobar l'eix, veiem que és perpendicular a

$$\vec{u} = (1,1,1) - (1,1,0) = (0,0,1)$$

i que conté el punt $p_r = (p+q)/2 = (1,1,1/2)$. Això ens dona el pla que conté l'eix:

$$z = \frac{1}{2}.$$

Problema 20 II

- Fem el mateix amb $F(0,1,0) = (1,0,1)$ i obtenim el pla:

$$x - y + z = \frac{1}{2}$$

- L'eix de gir ve donat per la intersecció d'aquests dos plans, en forma parmètrica $(0,0,\frac{1}{2}) + [(1,1,0)]$.
- L'angle de gir el podem trobar com l'angle que fa un vector perpendicular a l'eix de rotació amb la seva imatge.
- En el nostre cas, podem usar que el vector $\vec{p_1 p}$ ja és perpendicular a l'eix. La seva imatge $\overrightarrow{F(p_1)F(p)} = \vec{p_1 q}$ ja que $F(p_1) = p_1$ i $F(p) = q$. Aquests dos vectors són

$$\vec{p_1 p} = (1,1,1) - (1,1,\frac{1}{2}) = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)$$

i

$$\overrightarrow{F(p_1)F(p)} = (1,1,0) - (1,1,\frac{1}{2}) = \left(0,0,\frac{-1}{2}\right).$$

Problema 20 III

- Observem l'angle que fan aquests dos vectors és exactament π (sense amigüitats), que és, de fet, una simetria axial respecte l'eix de rotació en aquest cas.
- Es tracta doncs d'un gir d'eix $(0, 0, \frac{1}{2}) + [(1, 1, 0)]$ i angle π que és, per tant, una simetria axial respecte aquest eix.
- Com que la matriu d'una simetria axial respecte un eix és

$$S = \frac{2}{u^t u} u u^t - Id$$

on u és una direcció perpendicular a l'eix, en el nostre cas tenim que la isometria corresponent és la simetria:

```
>> u=[1;1;0];
>> 2*u*u'/(u'*u)-eye(3)
ans =
            0           1           0
            1           0           0
            0           0          -1
```

Problema 20 IV

- Finalment, calculem les equacions de la simetria respecte l'eix:

$$F(x,y,z) = (0,0,\frac{1}{2}) - S(x,y,z-1/2) = (y,x,-z+1).$$

Problema 21 I

Problema 21

1. Sigui F una simetria respecte un pla π. Si $F(p) = q$ amb $p \neq q$, demostreu que el pla π és perpendicular al vector $u = q - p$ i que conté al punt $(p+q)/2$.
2. Si F és una simetria respecte un pla π tal que $F(1,2,3) = (3,2,2)$, trobeu el pla de simetria i les equacions de F.

Solució: Part 2:

```
>> p=[1;2;3;]; q=[3;2;2];
>> u=q-p
u =
          2
          0
         -1
>> punt_pla=(p+q)/2
punt_pla =
```

Problema 21 II

```
           2
           2
         5/2
>> dot(u,punt_pla)
ans = 3/2
```

- Simetria resp. pla $2x - z = 3/2$ (normal $[(2, 0, -1)]$).
- Matriu de la simetria respecte pla perpendicular a u:

```
>> S=eye(3)-2*u*u'/(u'*u)
S =
        -3/5            -0          4/5
          -0             1           -0
         4/5            -0          3/5
```

- Ho apliquem a $(x - 1, y - 2, z - 3)$ i li sumem $(3, 2, 2)$ per obtenir $F(x, y, z)$:

Problema 21 III

```
>> S*(-p)+q
ans =
        6/5
          0
       -3/5
```

- Equacions $F(x,y,z) = (\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}z + \frac{6}{5}, y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z - \frac{3}{5})$.

Problema 22 I

Problema 22

Trobeu una reflexió que porti el pla $\pi : 2x - y - z = 4$ sobre el pla $z = 0$.

Solució:

- N'hi ha prou amb determinar el pla π_r de la reflexió. Clarament la intersecció entre π i $z = 0$, ens dóna una recta r que pertany al pla de reflexió, ja que és formada per punts fixos. Aquesta recta, en forma paramètrica es pot expressar com $(3, 2, 0) + [(-1, -2, 0)]$.

```
>> upi=[2;-1;-1]; uz=[0;0;1]; u=cross(upi,uz)'
u =
          -1            -2             0
```

- El pla buscat és la 'bisectriu' entre els dos plans (hi ha dues solucions).

Problema 22 II

- El pla π es pot expressar de forma paramètrica com

$$(3,2,0)+[(-1,-2,0),(0,1,-1)]$$

i, ortogonalitzant la base, com

```
>> u1=[-1;-2;0]; u2=[0;1;-1];
>> v1=u1; v2= u2-((dot(v1,u2)/dot(v1,v1)))*v1
v2 =
        -2/5
        1/5
         -1
```

$$(3,2,0)+[(-1,2,0),(-2,1,-5)]$$

- El pla $z=0$ es pot expressar de forma paramètrica com

$$(3,2,0)+[(-1,-2,0),(1,0,0)]$$

i podem ortogonalitzar també la base:

Problema 22 III

```
>> u1=[-1;2;0]; u2=[1;0;0];
>> v1=u1; v2= u2-((dot(v1,u2)/dot(v1,v1)))*v1
v2 =
         4/5
        -2/5
          0
```

$$(3,2,0)+[(-1,-2,0),(2,-1,0)]$$

- La reflexió que busquem enviarà vectors de la mateixa norma en la direcció $[(-2,1,-5)]$ a vectors de la mateixa norma en $[(2,-1,0)]$. En particular, enviarà el vector

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,1,-5)$$

a un dels dos vectors de norma 1 en $[(2,-1,0)]$:

$$v_2' = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$$

Problema 22 IV

- Prenem, per exemple, el positiu en aquesta darrera equació.
- El pla que busquem vindrà donat per

$$(3,2,0)+[(-1,2,0),w], \quad w=\frac{1}{2}\left(v_2+v_2'\right)$$

on, després d'uns càlculs

$$w \parallel \left(-2+2\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}, -5\right)$$

de manera que un dels dos plans buscats és

$$(3,2,0)+\left[(-1,2,0),\left(-2+2\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}, -5\right)\right]$$

Problema 22 V

- Si ho volem en forma implícita, tenim que aquest pla té com a vector normal

$$\left(10,\, -5,\, 5\sqrt{6}-5\right)$$

  i dóna lloc al pla

$$2x - y + (\sqrt{6}-1)z = 4.$$

- L'altra possibilitat és la reflexió respecte pla $2x - y + (-\sqrt{6}-1)z = 4$.

Problema 28 I

Problema 28

Una rotació té eix $(1, -1, 2) + [(1, 1, 1)]$ i envia $P = (0, -4, 0)$ a $Q = (-1, -2, -1)$. Identifiqueu l'angle de rotació orientant l'eix amb el vector director donat.

```
>> Pr = [1,-1,2]';
>> vr = [1,1,1]';
>> P = [0,-4,0]';
>> Q = [-1,-2,-1]';
>> % projeccio ortogonal de P en l'eix
>> prP=Pr+dot(P-Pr,vr)/dot(vr,vr)*vr;
>> % cosinus de l'angle
>> cosa=dot(Q-prP,P-prP)/(norm(Q-prP)*norm(P-prP))
cosa = -0.50000
```

Per veure si l'angle és al segon o tercer quadrant, mirem l'orientació de l'eix

Problema 28 II

```
>> vor=cross(P-Pr,Q-Pr);
>> \%mirem si vr i vor son orientats iguals en l'eix.
>> or=sign(dot(vor,vr));
>> \% angle tenint en compte orientacio
>> angleor=or*acos(cosa)
angleor =  2.0944
```

Problema 32 I

Problema 32

Trobeu una referència ortonormal a $\mathbb{R}^3$ tal que:

1. tingui origen a $P = (0, 1, 2)$
2. tinguin eixos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ paral·lels a $u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (1, 1, 0)$ respectivament
3. sigui directa

Quin és l'eix i angle de rotació de la isometria d'aquest canvi de referència?

Solució:

- Anomenem la nova referència $\bar{R} = \{\bar{P}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

$$P = (0, 1, 2);$$

Problema 32 II

- L'eix X s'envia a $\bar{X}$ que és paral·lel a u_1, per tant,

$$\bar{e_1} = \pm(1,-1,2)/\sqrt{6}$$

- i, fent el mateix amb $\bar{Y}$,

$$\bar{e_2} = \pm(1,1,0)/\sqrt{2}$$

- Com que no hem de trobar *totes* les referencies que compleixen aquestes propietats podem triar els signes positius i triarem $\bar{e}_3$ de manera que $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sigui directa.
- Com que volem que la base sigui ortonormal i directa triem:

$$\bar{e_3} = \bar{e_1} \wedge \bar{e_2} = (-1,1,1)/\sqrt{3}\}.$$

Problema 32 III

- Per tant, en resum,

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \{P = (0,1,2); \\ \bar{e_1} &= (1,-1,2)/\sqrt{6}, \\ \bar{e_2} &= (1,1,0)/\sqrt{2}, \\ \bar{e_3} &= (-1,1,1)/\sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

- La matriu de canvi de base $M_{\{\bar{e_i}\}\to\{e_i\}}$ és la matriu en base canònica d'una isometria que envia e_i a $\bar{e}_i$; aquesta isometria és un gir d'eix $[u]$ on u és un vector propi de valor propi 1 de la matriu

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Problema 32 IV

que es pot veure ;) que és, per exemple,

$$u = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}, \frac{6+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}, 1 \right)$$

- Si ho volem fer mitjançant Matlab/Octave

```
>> v1=[1,-1,2]'/sqrt(6);
>> v2=[1,1,0]'/sqrt(2);
>> v3=[-1,1,1]'/sqrt(3);
>> A=[v1,v2,v3]
A =
   0.40825   0.70711  -0.57735
  -0.40825   0.70711   0.57735
   0.81650   0.00000   0.57735
>> A'*A %sempre va be comprovar-ho
ans =
   1.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.00000   0.00000
```

Problema 32 V

```
   0.00000   0.00000   1.00000
>> r=null(A-eye(3)) %tambe amb eig.
r =
  -0.30772
  -0.74291
  -0.59447
>> r(1)/r(3) %comprovem el resultat
ans =  0.51764
```

- Per calcular l'angle, busquem un vector perpendicular a r i calculem l'angle que forma amb la seva imatge:

```
>> nr=[r(2),-r(1),0]
nr =
  -0.74291   0.30772   0.00000
>> dot(r,nr)
ans = 0
>> Fnr=A*nr'
Fnr =
  -0.085698
```

Problema 32 VI

```
   0.520882
  -0.606580
>> cosa=dot(nr,Fnr)/(norm(nr)*norm(Fnr))
cosa =  0.34635
>> acos(cosa)
ans =  1.2171
```

orientant l'eix per *nr* (observem que la orientació és diferent de la solució que ens proposen).

Problema 31 I

Problema 31

Sigui el canvi de referència de $\mathbb{R}^2$ donat per la matriu

$$A_e^u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & -4 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

És la nova referència ortonormal? És directa? Trobeu

1. Els elements característics del moviment associat.
2. L'equació paramètrica de la recta $(1,3)+[(-1,1)]$.
3. L'equació implícita de la recta $x-4y=3$.

Solució:

Problema 31 II

- Hem de veure si la matriu

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

és ortogonal per veure que A_u^e és ortonormal

```
>> A=[1/sqrt(5),2/sqrt(5);-2/sqrt(5),1/sqrt(5)]
A =

   0.44721   0.89443
  -0.89443   0.44721
>> A'*A
ans =
   1.00000   0.00000
   0.00000   1.00000
```

- La isometria és directa perquè el determinant val 1 i per tant es tracta d'una rotació.

Problema 31 III

- El centre de gir serà un punt fix de l'aplicació

```
>> b=[-4;2]; C=(A-eye(2))\(-b)
C =
  -0.38197
   4.23607
>> A*C+b
ans =
  -0.38197
   4.23607
```

  és a dir el centre serà $(-0.38197, 4.23607)$.

- Per trobar l'angle calculem la traça:

Problema 31 IV

```
>> cosa=trace(A)
cosa =  0.89443
>> acos(cosa)
ans =  0.46365
>> A*[1;0]
ans =
   0.44721
  -0.89443
```

per tant l'angle és $-0.46365 = 2\pi - 0.46365 = 5.8195$.

Problema 37 I

Problema 37

Tenim un braç robot amb tres articulacions A_1, A_2 i A_3. Els segments que uneixen les articulacions i A_3 amb la mà M del robot tenen tots longitud 1. Inicialment el braç està a la posició $A_1 = (0,0,0)$, $A_2 = (1,0,0)$, $A_3 = (2,0,0)$ i $M = (3,0,0)$ amb els eixos de les articulacions en direccions $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,0)$ i $u_3 = (0,0,1)$. Les articulacions del braç robot es mouen un angle $\pi/4$ cadascuna.

1. Trobeu la posició final de la mà M.
2. Suposant que l'orientació original de la mà coincideix amb la base canònica, trobeu la seva orientació final.

Solució:

Problema 37 II

(i) La posició final de la mà vindrà donada per la composició dels tres girs aplicada a la posició de la mà:

$$G_1 \circ G_2 \circ G_3(M)$$

```
>> u1=[0,0,1]';u2=[0,1,0]';u3=[0,0,1]'; alfa=pi/4;
>> %Gi=gir d'angle pi/4 respecte eix Ai+[ui].
>> % Orientem els eixos per ui.
>> %Hem de calcular G1(G2(G3(M))). Comencem per G3:
>> v=M-A3;
>> G3M=A3+(1-cos(alfa))*dot(u3,v)/dot(u3,u3)*u3+...
 cos(alfa)*v+sin(alfa)*cross(u3,v)/norm(u3);
>> %Ara G2 aplicat a G3M
>> v=G3M-A2;
>> G2G3M=A2+(1-cos(alfa))*dot(u2,v)/dot(u2,u2)*u2+...
 cos(alfa)*v+sin(alfa)*cross(u2,v)/norm(u2);
>> %I ara G1 aplicat a G2G3M:
>> v=G2G3M-A1;
>>Posiciofinal=A1+(1-cos(alfa))*dot(u1,v)/dot(u1,u1)*u1+...
```

Problema 37 III

```
  cos(alfa)*v+sin(alfa)*cross(u1,v)/norm(u1)
Posiciofinal =
   1.0607
   2.0607
  -1.2071
```

- També ho podem fer a mà

$$G_1 \circ G_2 \circ G_3(M) = G_1 \circ G_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$G_1 \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{4+3\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) L'orientació de la mà no varia.

Exercici 41 I

Problema 41

Trobeu els angles d'Euler per la rotació d'eix $[(-2,2,3)]$ i angle $\frac{\pi}{4}$.

En primer lloc anem a construir la matriu de la rotació

```
>> u=[-2,2,3]';
>> theta=pi/4; %no es cap angle d'Euler sino de la rotacio
```

Calculem la matriu de la rotació aplicant la rotació a e_1, e_2, e_3:

```
>> e1=[1,0,0]';
>>  A(:,1)=(1-cos(theta))*dot(u,e1)/dot(u,u)*u ...
  + cos(theta)*e1 + sin(theta)*cross(u,e1)/norm(u)
A =
   0.77602
   0.44558
  -0.44637
>> e2=[0,1,0]';
>> A(:,2)=(1-cos(theta))*dot(u,e2)/dot(u,u)*u ...
  + cos(theta)*e2+sin(theta)*cross(u,e2)/norm(u)
```

Exercici 41 II

```
A =
   0.77602  -0.58341
   0.44558   0.77602
  -0.44637  -0.23962
>> e3=[0,0,1]';
>> A(:,3)=(1-cos(theta))*dot(u,e3)/dot(u,u)*u ...
  + cos(theta)*e3 + sin(theta)*cross(u,e3)/norm(u)
A =
   0.77602  -0.58341   0.23962
   0.44558   0.77602   0.44637
  -0.44637  -0.23962   0.86217
```

Exercici 41 III

Ara passem a identificar a partir dels elements de la matriu, els angles d'Euler corresponents:

$$\sin\beta = a_{31} \text{ (això determina } \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$
$$\cos\alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{1-a_{31}^2}}, \sin\alpha = \frac{a_{21}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \text{ (això determina } \alpha)$$
$$\cos\gamma = \frac{a_{33}}{\sqrt{1-a_{31}^2}}, \sin\gamma = \frac{a_{32}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \text{ (això determina } \gamma)$$

En efecte, comencem per β.

```
>> beta=asin(A(3,1))
beta = -0.46271
```

$$\cos\alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} =, \sin\alpha = \frac{a_{21}}{\sqrt{1-a_{31}^2}}$$

Exercici 41 IV

```
>> alfa=acos(A(1,1)/cos(beta))
alfa =  0.52122
```

Com que $a_{21} > 0$ i $\cos(\beta) > 0$, tindrem que $\sin(alpha) > 0$ i l'angle 0.5213 no cal canviar-lo de signe/restar-lo de 2π. Passem finalment a γ:

$$\cos\gamma = \frac{a_{33}}{\sqrt{1 - a_{31}^2}}, \sin\gamma = \frac{a_{32}}{\sqrt{1 - a_{31}^2}} \text{ (això determina } \gamma\text{)}$$

```
>> gamma=acos(A(3,3)/cos(beta))
gamma =  0.27109
```

En aquest cas observem que $a_{32} < 0$ i, per tant, el $\sin\gamma$ ha de ser negatiu. D'aquí que cal canviar γ de signe i passar-lo a $[0, 2\pi)$:

```
>> gamma=2*pi-acos(A(3,3)/cos(beta))
gamma =  6.0121
```

En resum:

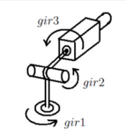
Exercici 41 V

- Primer angle d'Euler: $\alpha = 0.5213$ rad.
- Segon angle d'Euler: $\beta = -0.4627$ rad.
- Tercer angle d'Euler: $\gamma = 6.0121$ rad.

Exercici 42 I

Problema 42

Una càmera està instalada en un trípode que permet els 3 girs:



La càmera inicialment es troba plana, apuntant en la direcció de (1,0,0). Volem que apunti a un objecte en $P = (10^4, 2 \cdot 10^3, -10^3)$, de manera que la base de la càmera formi un angle de $\frac{\pi}{6}$ amb el pla horitzontal OXY. Quin angle hem de fer girar cada engranatge?

- Els angles que ha de girar en cada engranatge són precisament els angles d'Euler (no considerem dimensions de la càmera):
  - g1: gir sobre l'eix Z,
  - g2: gir sobre l'eix Y desplaçat, i finalment

Exercici 42 II

- g3:gir sobre l'eix X desplaçat.

- Si deixem lliures tots els angles, hi ha moltes solucions. Aquí, però, ens demanen que la base de la càmera formi un angle de $\frac{\pi}{6}$ amb el pla horitzontal OXY. Això implica que el gir sobre l'eix de gir `gir3` (gir de la càmera sobre el seu eix) sigui de $\pi/6$:

```
>> gamma=pi/6
gamma =  0.52360
```

- Per calcular la resta d'angles d'Euler, busquem les dues primeres columnes de la matriu de rotació.
- Com que la càmera inicialment està horitzontal i apunta a la direcció $(1, 0, 0)$, la rotacio R ha d'enviar $(1, 0, 0)$ a $(10^4, 2 \cdot 10^3, -10^3)$ partit per la seva norma. Podem calcular la primera columna de la matriu R així:

Exercici 42 III

```
>> v=[10^4,2*10^3,-10^3]';
>> %Per tant la 1a columna de la matriu de R es:
>> col=v/norm(v)
col =
   0.975900
   0.195180
  -0.097590
```

- Si mirem les fórmules per a α i β:

$$\sin\beta = a_{31} \text{ (això determina } \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

$$\cos\alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{1-a_{31}^2}}, \sin\alpha = \frac{a_{21}}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \text{ (això determina } \alpha)$$

veiem que no és necessari calcular la resta de la matriu. En efecte

Exercici 42 IV

```
>> beta=asin(col(3))
beta = -0.097746
>> alfa=acos(col(1)/cos(beta))
alfa =  0.19740
```

- No cal que modifiquem el valor de α, ja que $\cos(\beta) > 0$ i `col(2)` també, i, per tant, tindrem que $\sin(\alpha) > 0$ i no cal modificar l'angle de 0.1974. En resum:
  - Primer angle d'Euler: $\alpha = 0.1974$ rad.
  - Segon angle d'Euler: $\beta = -0.0977$ rad.
  - Tercer angle d'Euler: $\gamma = \pi/6$ rad.