Àlgebra lineal i geometria
4. Ortogonalitat

Grau en Enginyeria Física

2023-24

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtiques

Marta Casanellas

Índex

Outline

El producte escalar euclidià

Definició

El producte escalar euclidià o estàndard $< u, v >$ de dos vectors $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és

$$< u, v > := u^t v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \ \forall u$ i $< u, u > = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*definit positiu*)
2. $< u, v > = < v, u >$ (*simètric*).
3. *bilineal*:
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v > = a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 > = a_1 < u, v_1 > + a_2 < u, v_2 >$.

Una funció $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà aquestes propietats s'anomena un *producte escalar*.

El producte escalar euclidià

Definició

El producte escalar euclidià o estàndard $< u, v >$ de dos vectors $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és

$$< u, v > := u^t v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \; \forall u$ i $< u, u > = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*definit positiu*)
2. $< u, v > = < v, u >$ (*simètric*).
3. *bilineal*:
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v > = a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 > = a_1 < u, v_1 > + a_2 < u, v_2 >$.

Una funció $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà aquestes propietats s'anomena un *producte escalar*.

El producte escalar euclidià

Definició

El producte escalar euclidià o estàndard $< u, v >$ de dos vectors

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ és}$$

$$< u, v > := u^t v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \ \forall u$ i $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*definit positiu*)
2. $< u, v >=< v, u >$ (*simètric*).
3. *bilineal*:
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= a_1 < u, v_1 > + a_2 < u, v_2 >$.

Una funció $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà aquestes propietats s'anomena un *producte escalar*.

El producte escalar euclidià

Definició

El producte escalar euclidià o estàndard $< u, v >$ de dos vectors $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és

$$< u, v > := u^t v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \; \forall u$ i $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*definit positiu*)
2. $< u, v >=< v, u >$ (*simètric*).
3. *bilineal*:
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= a_1 < u, v_1 > + a_2 < u, v_2 >$.

Una funció $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà aquestes propietats s'anomena un *producte escalar*.

Formes bilineals

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. Una forma bilineal de E és una aplicació $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\forall\ u, v, w \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\varphi(u+v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$ $\varphi(\lambda u, w) = \lambda\varphi(u, w)$,

(b) $\varphi(w, u+v) = \varphi(w, u) + \varphi(w, v)$ $\varphi(w, \lambda u) = \lambda\varphi(w, u)$.

Si $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de E, aleshores la matriu de φ en la base $\mathbf{u}$ es defineix com

$$M_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(u_1, u_1) & \cdots & \varphi(u_1, u_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(u_n, u_1) & \cdots & \varphi(u_n, u_n) \end{pmatrix}.$$

Formes bilineals

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. Una forma bilineal de E és una aplicació $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\forall\ u, v, w \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\varphi(u+v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)\ \varphi(\lambda u, w) = \lambda\varphi(u, w)$,

(b) $\varphi(w, u+v) = \varphi(w, u) + \varphi(w, v)\ \varphi(w, \lambda u) = \lambda\varphi(w, u)$.

Si $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de E, aleshores la matriu de φ en la base $\mathbf{u}$ es defineix com

$$M_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(u_1, u_1) & \cdots & \varphi(u_1, u_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(u_n, u_1) & \cdots & \varphi(u_n, u_n) \end{pmatrix}.$$

Matriu d'una forma bilineal

Propietats:

1. Si $v_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, w_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

   $\varphi(v, w) = (x_1 \dots x_n) M_{\mathbf{u}}(\varphi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ i $M_{\mathbf{u}}(\varphi)$ és l'única matriu que ho satisfà.

2. Si $\mathbf{v}$ és una altra base, aleshores

$$M_{\mathbf{v}}(\varphi) = A^t_{\mathbf{v}\to\mathbf{u}} M_{\mathbf{u}}(\varphi) A_{\mathbf{v}\to\mathbf{u}}$$

Una forma bilineal φ és simètrica si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ per tot u, v.
Una forma bilineal és simètrica $\Leftrightarrow$ $M_{\mathbf{u}}(\varphi)$ és una matriu simètrica per qualsevol base $\mathbf{u}$.

Matriu d'una forma bilineal

Propietats:

1. Si $v_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, w_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

   $\varphi(v, w) = (x_1 \dots x_n) M_{\mathbf{u}}(\varphi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ i $M_{\mathbf{u}}(\varphi)$ és l'única matriu que ho satisfà.

2. Si $\mathbf{v}$ és una altra base, aleshores

$$M_{\mathbf{v}}(\varphi) = A^t_{\mathbf{v}\to\mathbf{u}} M_{\mathbf{u}}(\varphi) A_{\mathbf{v}\to\mathbf{u}}$$

Una forma bilineal φ és simètrica si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ per tot u, v.
Una forma bilineal és simètrica $\Leftrightarrow M_{\mathbf{u}}(\varphi)$ és una matriu simètrica per qualsevol base $\mathbf{u}$.

Matriu d'una forma bilineal

Propietats:

1. Si $v_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, w_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

   $\varphi(v, w) = (x_1 \ldots x_n) M_{\mathbf{u}}(\varphi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ i $M_{\mathbf{u}}(\varphi)$ és l'única matriu que ho satisfà.

2. Si $\mathbf{v}$ és una altra base, aleshores

$$M_{\mathbf{v}}(\varphi) = A^t_{\mathbf{v}\to\mathbf{u}} M_{\mathbf{u}}(\varphi) A_{\mathbf{v}\to\mathbf{u}}$$

Una forma bilineal φ és simètrica si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ per tot u, v. Una forma bilineal és simètrica $\Leftrightarrow$ $M_{\mathbf{u}}(\varphi)$ és una matriu simètrica per qualsevol base $\mathbf{u}$.

Productes escalars

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. i φ una forma bilineal en E. Diem que φ és definida positiva si $\varphi(u, u) \geq 0$ i només es té la igualtat quan $u = 0$.

Definició

Un producte escalar en E és una forma bilineal simètrica definida positiva $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Un $\mathbb{R}$-e.v amb un producte escalar s'anomena un espai vectorial euclidià.

Exemples:

- El producte escalar estàndard
- $E = \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}) = \{$ funcions contínues reals definides a $[a, b]\}$ amb el producte escalar:

$$< f, g >:= \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Productes escalars

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. i φ una forma bilineal en E. Diem que φ és definida positiva si $\varphi(u,u) \geq 0$ i només es té la igualtat quan $u = 0$.

Definició

Un producte escalar en E és una forma bilineal simètrica definida positiva $<,>$: $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Un $\mathbb{R}$-e.v amb un producte escalar s'anomena un espai vectorial euclidià.

Exemples:

- El producte escalar estàndard
- $E = \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R}) = \{$ funcions contínues reals definides a $[a,b]\}$ amb el producte escalar:

$$< f, g > := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Productes escalars

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. i φ una forma bilineal en E. Diem que φ és definida positiva si $\varphi(u,u) \geq 0$ i només es té la igualtat quan $u = 0$.

Definició

Un producte escalar en E és una forma bilineal simètrica definida positiva $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Un $\mathbb{R}$-e.v amb un producte escalar s'anomena un espai vectorial euclidià.

Exemples:

- El producte escalar estàndard
- $E = \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R}) = \{$ funcions contínues reals definides a $[a,b]\}$ amb el producte escalar:

$$< f, g > := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$. La norma de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$.
Si $<,>$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard, euclidiana, o norma-2* i es denota per $||u||_2$.
Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c|\|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$. La norma de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$.
Si $<,>$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard, euclidiana, o norma-2* i es denota per $||u||_2$.
Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c|\|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$. La norma de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$.
Si $<,>$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard, euclidiana, o norma-2* i es denota per $||u||_2$.
Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \; \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c|\|u\| \; c \in \mathbb{R}$;
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$. La norma de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$.
Si $<,>$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard, euclidiana, o norma-2* i es denota per $||u||_2$.
Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c|\|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$. La norma de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$.
Si $<,>$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard, euclidiana, o norma-2* i es denota per $||u||_2$.
Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c|\|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Altres normes

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definim:

1. La norma-1 (o del taxista o de Manhattan):

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

2. La norma del màximum (o infinit):

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Altres normes

Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definim:

1. La norma-1 (o del taxista o de Manhattan):

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |\mathtt{x}_n|.$$

2. La norma del màximum (o infinit):

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |\mathtt{x}_n|).$$

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$.

- Un vector u s'anomena unitari si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem normalitzat v).
- La distància entre dos vectors $u, v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- L'angle (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'unic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{<u,v>}{\|u\| \cdot \|v\|}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- Dos vectors u, v són ortogonals (notació $u \perp v$) si $< u, v >= 0$.
- Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$.

- Un vector u s'anomena unitari si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem normalitzat v).
- La distància entre dos vectors u, $v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- L'angle (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'unic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{<u,v>}{||u||\cdot||v||}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- Dos vectors u, v són ortogonals (notació $u \perp v$) si $< u, v >= 0$.
- Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$.

- Un vector u s'anomena unitari si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem normalitzat v).
- La distància entre dos vectors u, $v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- L'angle (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'unic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{<u,v>}{||u||\cdot||v||}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- Dos vectors u, v són ortogonals (notació $u \perp v$) si $< u, v >= 0$.
- Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$.

- Un vector u s'anomena unitari si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem normalitzat v).
- La distància entre dos vectors u, $v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- L'angle (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'unic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{<u,v>}{||u||\cdot||v||}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- Dos vectors u, v són ortogonals (notació $u \perp v$) si $< u, v >= 0$.
- Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$.

- Un vector u s'anomena unitari si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem normalitzat v).
- La distància entre dos vectors u, $v \in E$, és $d(u,v) = \|u - v\|$.
- L'angle (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'unic $\alpha \in [0,\pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{<u,v>}{||u|| \cdot ||v||}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- Dos vectors u, v són ortogonals (notació $u \perp v$) si $< u, v >= 0$.
- Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. amb producte escalar $<,>$.

- Un vector u s'anomena unitari si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem normalitzat v).
- La distància entre dos vectors u, $v \in E$, és $d(u,v) = \|u - v\|$.
- L'angle (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'unic $\alpha \in [0,\pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{<u,v>}{||u||\cdot||v||}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- Dos vectors u, v són ortogonals (notació $u \perp v$) si $< u, v >= 0$.
- Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Base ortonormal

Definició

Una base $\{v_1, \ldots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és ortonormal (b.o.n) si els seus vectors són

- ortogonals dos a dos: $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$
- i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, d$.

S'anomena ortogonal si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià
- $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle\,,\rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \quad \Leftrightarrow \quad A^t_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} A_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és ortonormal (b.o.n) si els seus vectors són

- ortogonals dos a dos: $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$
- i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena ortogonal si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- v és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- Si v és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle , \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard
- Si v és b.o.n. de E i u és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \quad \Leftrightarrow \quad A^t_{\mathbf{u} \to \mathbf{v}} A_{\mathbf{u} \to \mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Una base $\{v_1, \ldots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és ortonormal (b.o.n) si els seus vectors són

- ortogonals dos a dos: $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$
- i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, d$.

S'anomena ortogonal si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc. $\varphi \Rightarrow \langle , \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \quad \Leftrightarrow \quad A^t_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} A_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Una base $\{v_1, \ldots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és ortonormal (b.o.n) si els seus vectors són

- ortogonals dos a dos: $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$
- i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, d$.

S'anomena ortogonal si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle , \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \quad \Leftrightarrow \quad A^t_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} A_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Una base $\{v_1, \ldots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és ortonormal (b.o.n) si els seus vectors són

- ortogonals dos a dos: $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$
- i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, d$.

S'anomena ortogonal si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle\, ,\rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \quad \Leftrightarrow \quad A^t_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} A_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és ortonormal (b.o.n) si els seus vectors són

- ortogonals dos a dos: $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$
- i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena ortogonal si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle \, , \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \quad \Leftrightarrow \quad A^t_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} A_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Una base $\{v_1, \ldots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és ortonormal (b.o.n) si els seus vectors són

- ortogonals dos a dos: $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$
- i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, d$.

S'anomena ortogonal si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- **v** és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- Si **v** és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle\, , \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- Si **v** és b.o.n. de E i **u** és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \quad \Leftrightarrow \quad A^t_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} A_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Una base $\{v_1, \ldots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és ortonormal (b.o.n) si els seus vectors són

- ortogonals dos a dos: $< v_i, v_j >= 0$ si $i \neq j$
- i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, d$.

S'anomena ortogonal si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle\, , \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \quad \Leftrightarrow \quad A^t_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} A_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} = I.$$

Bases ortonormals

- Si $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ és b.o.n. de $E \Rightarrow$ les coordenades de v en base $\mathbf{v}$ són
$$(< v, v_1 >, \dots, < v, v_n >).$$
- Donada $\mathbf{u}$ base de E, $\exists$ un producte escalar t.q. $\mathbf{u}$ és b.o.n.

Bases ortonormals

- Si $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és b.o.n. de $E \Rightarrow$ les coordenades de v en base $\mathbf{v}$ són
$$(< v, v_1 >, \ldots, < v, v_n >).$$
- Donada $\mathbf{u}$ base de E, $\exists$ un producte escalar t.q. $\mathbf{u}$ és b.o.n.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena ortogonal si satisfà $A^t A = I$.

- Si $u_1, \ldots, u_n$ són les columnes de A, $A = \left(u_1 \ldots u_n\right)$, aleshores,

  A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.

- A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$< Au, Av >=< u, v > \quad \text{per tot } u, v$$

- En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena ortogonal si satisfà $A^t A = I$.

- Si $u_1, \ldots, u_n$ són les columnes de A, $A = \left(u_1 \ldots u_n\right)$, aleshores,

  A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.

- A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

  $$< Au, Av > = < u, v > \quad \text{per tot } u, v$$

- En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena ortogonal si satisfà $A^t A = I$.

- Si $u_1, \dots, u_n$ són les columnes de A, $A = \begin{pmatrix} u_1 \dots u_n \end{pmatrix}$, aleshores,

  A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.

- A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$< Au, Av > = < u, v > \quad \text{per tot } u, v$$

- En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena ortogonal si satisfà $A^t A = I$.

- Si $u_1, \ldots, u_n$ són les columnes de A, $A = \left(u_1 \ldots u_n\right)$, aleshores,

  A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$< Au, Av > = < u, v > \quad \text{per tot } u, v$$

- En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena ortogonal si satisfà $A^t A = I$.

- Si $u_1, \ldots, u_n$ són les columnes de A, $A = \begin{pmatrix} u_1 \ldots u_n \end{pmatrix}$, aleshores,

  A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$< Au, Av > = < u, v > \text{ per tot } u, v$$

- En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena ortogonal si satisfà $A^t A = I$.

- Si $u_1, \dots, u_n$ són les columnes de A, $A = \begin{pmatrix} u_1 \dots u_n \end{pmatrix}$, aleshores,

  A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$< Au, Av > = < u, v > \quad \text{per tot } u, v$$

- En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Exemples de matrius 2×2 ortogonals

Aquestes $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ són lineals i preserven norma:

- $f=$ simetria respecte una recta l que conté el 0, $l = [v]$. E.g. $f(x, y) = (x, -y)$.
- $f=$gir d'angle α (en sentit anti-horari) respecte l'origen; aleshores

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Exemples de matrius 2×2 ortogonals

Aquestes $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ són lineals i preserven norma:

- $f=$ simetria respecte una recta l que conté el 0, $l = [v]$. E.g. $f(x,y) = (x,-y)$.
- $f=$gir d'angle α (en sentit anti-horari) respecte l'origen; aleshores

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E, aquest algorisme dóna una b.o.n. de F:

1. Prenem base de F $u_1, \ldots, u_d$ qualsevol i definim:
2. $v_1 := u_1$
3. $v_2 := u_2 - \frac{<v_1,u_2>}{<v_1,v_1>} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2])$.
4. $v_3 := u_3 - \frac{<v_1,u_3>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<v_2,u_3>}{<v_2,v_2>} v_2$
   $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3])$.

$$\vdots$$

5. $v_d := u_d - \frac{<v_1,u_d>}{<v_1,v_1>} v_1 - \cdots - \frac{<v_{d-1},u_d>}{<v_{d-1},v_{d-1}>} v_{d-1}$.
6. Aleshores $v_1, \ldots, v_d$ són ortogonals i $[v_1, \ldots, v_d] = [u_1, \ldots, u_d]$.
7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F, $w_1, \ldots, w_d$:

$$w_1 = v_1/\|v_1\|,\ w_2 = v_2/\|v_2\|,\ \ldots,\ w_d = v_d/\|v_d\|.$$

Compte: Errors d'arrodoniment poden donar vectors no ortogonals! $\rightarrow$ Gram-Schmidt modificat ho resol

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E, aquest algorisme dóna una b.o.n. de F:

1. Prenem base de F $u_1, \ldots, u_d$ qualsevol i definim:
2. $v_1 := u_1$
3. $v_2 := u_2 - \frac{<v_1, u_2>}{<v_1, v_1>} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2])$.
4. $v_3 := u_3 - \frac{<v_1, u_3>}{<v_1, v_1>} v_1 - \frac{<v_2, u_3>}{<v_2, v_2>} v_2$
   $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3])$.

$$\vdots$$

5. $v_d := u_d - \frac{<v_1, u_d>}{<v_1, v_1>} v_1 - \cdots - \frac{<v_{d-1}, u_d>}{<v_{d-1}, v_{d-1}>} v_{d-1}$.
6. Aleshores $v_1, \ldots, v_d$ són ortogonals i $[v_1, \ldots, v_d] = [u_1, \ldots, u_d]$.
7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F, $w_1, \ldots, w_d$:

$$w_1 = v_1/\|v_1\|, \; w_2 = v_2/\|v_2\|, \; \ldots, \; w_d = v_d/\|v_d\|.$$

Compte: Errors d'arrodoniment poden donar vectors no ortogonals! $\rightarrow$ Gram-Schmidt modificat ho resol

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E, aquest algorisme dóna una b.o.n. de F:

1. Prenem base de F $u_1, \ldots, u_d$ qualsevol i definim:
2. $v_1 := u_1$
3. $v_2 := u_2 - \frac{<v_1,u_2>}{<v_1,v_1>} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2])$.
4. $v_3 := u_3 - \frac{<v_1,u_3>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<v_2,u_3>}{<v_2,v_2>} v_2$
   $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3])$.

$$\vdots$$

5. $v_d := u_d - \frac{<v_1,u_d>}{<v_1,v_1>} v_1 - \cdots - \frac{<v_{d-1},u_d>}{<v_{d-1},v_{d-1}>} v_{d-1}$.
6. Aleshores $v_1, \ldots, v_d$ són ortogonals i $[v_1, \ldots, v_d] = [u_1, \ldots, u_d]$.
7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F, $w_1, \ldots, w_d$:

$$w_1 = v_1/\|v_1\|,\ w_2 = v_2/\|v_2\|,\ \ldots,\ w_d = v_d/\|v_d\|.$$

Compte: Errors d'arrodoniment poden donar vectors no ortogonals! $\rightarrow$ Gram-Schmidt modificat ho resol

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E, aquest algorisme dóna una b.o.n. de F:

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:
2. $v_1 := u_1$
3. $v_2 := u_2 - \frac{<v_1,u_2>}{<v_1,v_1>} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2])$.
4. $v_3 := u_3 - \frac{<v_1,u_3>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<v_2,u_3>}{<v_2,v_2>} v_2$
   $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3])$.

$$\vdots$$

5. $v_d := u_d - \frac{<v_1,u_d>}{<v_1,v_1>} v_1 - \cdots - \frac{<v_{d-1},u_d>}{<v_{d-1},v_{d-1}>} v_{d-1}$.
6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i $[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d]$.
7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F, $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1/\|v_1\|,\ w_2 = v_2/\|v_2\|,\ \dots,\ w_d = v_d/\|v_d\|.$$

Compte: Errors d'arrodoniment poden donar vectors no ortogonals! $\rightarrow$ Gram-Schmidt modificat ho resol

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E, aquest algorisme dóna una b.o.n. de F:

1. Prenem base de F $u_1, \ldots, u_d$ qualsevol i definim:
2. $v_1 := u_1$
3. $v_2 := u_2 - \frac{<v_1,u_2>}{<v_1,v_1>} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2])$.
4. $v_3 := u_3 - \frac{<v_1,u_3>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<v_2,u_3>}{<v_2,v_2>} v_2$
   $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3])$.

$$\vdots$$

5. $v_d := u_d - \frac{<v_1,u_d>}{<v_1,v_1>} v_1 - \cdots - \frac{<v_{d-1},u_d>}{<v_{d-1},v_{d-1}>} v_{d-1}$.
6. Aleshores $v_1, \ldots, v_d$ són ortogonals i $[v_1, \ldots, v_d] = [u_1, \ldots, u_d]$.
7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F, $w_1, \ldots, w_d$:

$$w_1 = v_1/\|v_1\|,\ w_2 = v_2/\|v_2\|,\ \ldots,\ w_d = v_d/\|v_d\|.$$

Compte: Errors d'arrodoniment poden donar vectors no ortogonals! $\rightarrow$ Gram-Schmidt modificat ho resol

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E, aquest algorisme dóna una b.o.n. de F:

1. Prenem base de F $u_1, \ldots, u_d$ qualsevol i definim:
2. $v_1 := u_1$
3. $v_2 := u_2 - \frac{<v_1,u_2>}{<v_1,v_1>} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2])$.
4. $v_3 := u_3 - \frac{<v_1,u_3>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<v_2,u_3>}{<v_2,v_2>} v_2$
   $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3])$.

$$\vdots$$

5. $v_d := u_d - \frac{<v_1,u_d>}{<v_1,v_1>} v_1 - \cdots - \frac{<v_{d-1},u_d>}{<v_{d-1},v_{d-1}>} v_{d-1}$.
6. Aleshores $v_1, \ldots, v_d$ són ortogonals i
   $[v_1, \ldots, v_d] = [u_1, \ldots, u_d]$.
7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F, $w_1, \ldots, w_d$:

$$w_1 = v_1/\|v_1\|,\ w_2 = v_2/\|v_2\|,\ \ldots,\ w_d = v_d/\|v_d\|.$$

Compte: Errors d'arrodoniment poden donar vectors no ortogonals! $\rightarrow$ Gram-Schmidt modificat ho resol

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E, aquest algorisme dóna una b.o.n. de F:

1. Prenem base de F $u_1, \ldots, u_d$ qualsevol i definim:
2. $v_1 := u_1$
3. $v_2 := u_2 - \frac{<v_1,u_2>}{<v_1,v_1>} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2])$.
4. $v_3 := u_3 - \frac{<v_1,u_3>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<v_2,u_3>}{<v_2,v_2>} v_2$
   $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3])$.

$$\vdots$$

5. $v_d := u_d - \frac{<v_1,u_d>}{<v_1,v_1>} v_1 - \cdots - \frac{<v_{d-1},u_d>}{<v_{d-1},v_{d-1}>} v_{d-1}$.
6. Aleshores $v_1, \ldots, v_d$ són ortogonals i $[v_1, \ldots, v_d] = [u_1, \ldots, u_d]$.
7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F, $w_1, \ldots, w_d$:

$$w_1 = v_1/\|v_1\|,\ w_2 = v_2/\|v_2\|,\ \ldots,\ w_d = v_d/\|v_d\|.$$

Compte: Errors d'arrodoniment poden donar vectors no ortogonals! $\to$ Gram-Schmidt modificat ho resol

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E, aquest algorisme dóna una b.o.n. de F:

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:
2. $v_1 := u_1$
3. $v_2 := u_2 - \frac{<v_1,u_2>}{<v_1,v_1>} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2])$.
4. $v_3 := u_3 - \frac{<v_1,u_3>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<v_2,u_3>}{<v_2,v_2>} v_2$
   $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3])$.

$$\vdots$$

5. $v_d := u_d - \frac{<v_1,u_d>}{<v_1,v_1>} v_1 - \cdots - \frac{<v_{d-1},u_d>}{<v_{d-1},v_{d-1}>} v_{d-1}$.
6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i $[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d]$.
7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F, $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1/\|v_1\|,\ w_2 = v_2/\|v_2\|,\ \dots,\ w_d = v_d/\|v_d\|.$$

Compte: Errors d'arrodoniment poden donar vectors no ortogonals! $\rightarrow$ Gram-Schmidt modificat ho resol

Outline

Teorema Espectral

Teorema (Teorema Espectral)

Sigui A una matriu simmètrica $n \times n$. Aleshores, A té tots els VAPs reals, diagonalitza, i existeix una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de VEPs (en el producte escalar euclidià); si V té columnes $v_1, \ldots, v_n$, i D és la matriu diagonal de VAPS (en l'ordre adequat) llavors A descomposa com

$$A = VDV^t.$$

La b.o.n de VEPs es pot trobar fàcilment:

- Si u, v són VEPs e A de VAPS $\lambda \neq \mu$, aleshores $u \perp v$.
- Si tots els VAPS són de multiplicitat alg. 1, aleshores normalitzant els VEPs obtenim b.o.n.
- Si no tots els VAPs tenen multiplicitat 1, usem l'algorisme de Gram-Schmidt per cada subespai propi de dimensió > 1.

Teorema Espectral

Teorema (Teorema Espectral)

Sigui A una matriu simmètrica $n \times n$. Aleshores, A té tots els VAPs reals, diagonalitza, i existeix una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de VEPs (en el producte escalar euclidià); si V té columnes $v_1, \ldots, v_n$, i D és la matriu diagonal de VAPS (en l'ordre adequat) llavors A descomposa com

$$A = VDV^t.$$

La b.o.n de VEPs es pot trobar fàcilment:

- Si u, v són VEPs e A de VAPS $\lambda \neq \mu$, aleshores $u \perp v$.
- Si tots els VAPS són de multiplicitat alg. 1, aleshores normalitzant els VEPs obtenim b.o.n.
- Si no tots els VAPs tenen multiplicitat 1, usem l'algorisme de Gram-Schmidt per cada subespai propi de dimensió > 1.

Teorema Espectral

Teorema (Teorema Espectral)

Sigui A una matriu simmètrica $n \times n$. Aleshores, A té tots els VAPs reals, diagonalitza, i existeix una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de VEPs (en el producte escalar euclidià); si V té columnes $v_1, \ldots, v_n$, i D és la matriu diagonal de VAPS (en l'ordre adequat) llavors A descomposa com

$$A = VDV^t.$$

La b.o.n de VEPs es pot trobar fàcilment:

- Si u, v són VEPs e A de VAPS $\lambda \neq \mu$, aleshores $u \perp v$.
- Si tots els VAPS són de multiplicitat alg. 1, aleshores normalitzant els VEPs obtenim b.o.n.
- Si no tots els VAPs tenen multiplicitat 1, usem l'algorisme de Gram-Schmidt per cada subespai propi de dimensió > 1.

Teorema Espectral

Teorema (Teorema Espectral)

Sigui A una matriu simmètrica $n \times n$. Aleshores, A té tots els VAPs reals, diagonalitza, i existeix una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de VEPs (en el producte escalar euclidià); si V té columnes $v_1, \ldots, v_n$, i D és la matriu diagonal de VAPS (en l'ordre adequat) llavors A descomposa com

$$A = VDV^t.$$

La b.o.n de VEPs es pot trobar fàcilment:

- Si u, v són VEPs e A de VAPS $\lambda \neq \mu$, aleshores $u \perp v$.
- Si tots els VAPS són de multiplicitat alg. 1, aleshores normalitzant els VEPs obtenim b.o.n.
- Si no tots els VAPs tenen multiplicitat 1, usem l'algorisme de Gram-Schmidt per cada subespai propi de dimensió > 1.

Caracterització de productes escalars

Sigui A una matriu simètrica.

- A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, tots els VAPs de A són positius.
- Criteri de Sylvester: si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ són els menors principals de A, A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, $\delta_i > 0 \ \forall i$.

Caracterització de productes escalars

Sigui A una matriu simètrica.

- A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, tots els VAPs de A són positius.
- Criteri de Sylvester: si δ_1, $\delta_2, \ldots$, δ_n són els menors principals de A, A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, $\delta_i > 0 \ \forall i$.

Outline

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El producte vectorial (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).\end{aligned}$$

Propietats:

- bilineal
- $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- $u \times v$ és ortogonal a u i v
- $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El producte vectorial (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$
\begin{aligned}
(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).
\end{aligned}
$$

Propietats:

- bilineal
- $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- $u \times v$ és ortogonal a u i v
- $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El producte vectorial (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).\end{aligned}$$

Propietats:

- bilineal
- $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- $u \times v$ és ortogonal a u i v
- $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El producte vectorial (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$
\begin{aligned}
(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).
\end{aligned}
$$

Propietats:

- bilineal
- $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- $u \times v$ és ortogonal a u i v
- $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El producte vectorial (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).\end{aligned}$$

Propietats:

- bilineal
- $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- $u \times v$ és ortogonal a u i v
- $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El producte vectorial (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned}$$

Propietats:

- bilineal
- $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- $u \times v$ és ortogonal a u i v
- $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El producte vectorial (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$
\begin{aligned}
(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).
\end{aligned}
$$

Propietats:

- bilineal
- $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- $u \times v$ és ortogonal a u i v
- $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Outline

Complement Ortogonal

El complement ortogonal d'un subespai F d'un e.v. euclidià E és el subespai

$$F^\perp = \{u \in E \mid u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

Propietats quan E té dimensió finita:

- Si $F = [v_1, \ldots, v_d] \Rightarrow F^\perp = \left\{ u \in E \;\middle|\; \begin{array}{c} < u, v_1 >= 0 \\ \vdots \\ < u, v_d >= 0 \end{array} \right\}$
- $(F^\perp)^\perp = F$, $\quad F \subseteq G \Leftrightarrow G^\perp \subseteq F^\perp$,
- $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $\quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- $F \cap F^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Complement Ortogonal

El complement ortogonal d'un subespai F d'un e.v. euclidià E és el subespai

$$F^{\perp} = \{u \in E \mid u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

Propietats quan E té dimensió finita:

- Si $F = [v_1, \ldots, v_d] \Rightarrow F^{\perp} = \left\{ u \in E \;\middle|\; \begin{array}{c} < u, v_1 >= 0 \\ \vdots \\ < u, v_d >= 0 \end{array} \right\}$
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$, $\qquad F \subseteq G \Leftrightarrow G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$,
- $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$, $\qquad (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
- $F \cap F^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Complement Ortogonal

El complement ortogonal d'un subespai F d'un e.v. euclidià E és el subespai

$$F^{\perp} = \{u \in E \mid u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

Propietats quan E té dimensió finita:

- Si $F = [v_1, \ldots, v_d] \Rightarrow F^{\perp} = \left\{ u \in E \;\middle|\; \begin{array}{c} < u, v_1 >= 0 \\ \vdots \\ < u, v_d >= 0 \end{array} \right\}$
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$, $\qquad F \subseteq G \Leftrightarrow G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$,
- $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$, $\qquad (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
- $F \cap F^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Complement Ortogonal

El complement ortogonal d'un subespai F d'un e.v. euclidià E és el subespai

$$F^{\perp} = \{u \in E \,|\, u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

Propietats quan E té dimensió finita:

- Si $F = [v_1, \ldots, v_d] \Rightarrow F^{\perp} = \left\{ u \in E \;\middle|\; \begin{array}{c} < u, v_1 >= 0 \\ \vdots \\ < u, v_d >= 0 \end{array} \right\}$
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$, $\qquad F \subseteq G \Leftrightarrow G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$,
- $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$, $\qquad (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
- $F \cap F^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

A $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar euclidià,

- Si F ve donat per generadors $\Rightarrow$ les equacions de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: els seus coeficients són les coordenades dels generadors.
- Si F ve donat per equacions $\Rightarrow$ els generators de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: les seves coordenades són els coeficients de les equacions.

F	$F^\perp$
$[(1,3,2),(-2,1,8)]$	$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ -2x+y+8z=0 \end{cases}$
$3x-5y+\frac{11}{2}z=0$	$[(3,-5,\frac{11}{2})]$

- Si A és una matriu real, aleshores

$$\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^t).$$

A $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar euclidià,

- Si F ve donat per generadors $\Rightarrow$ les equacions de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: els seus coeficients són les coordenades dels generadors.
- Si F ve donat per equacions $\Rightarrow$ els generators de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: les seves coordenades són els coeficients de les equacions.

F	$F^\perp$
$[(1,3,2),(-2,1,8)]$	$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ -2x+y+8z=0 \end{cases}$
$3x-5y+\frac{11}{2}z=0$	$[(3,-5,\frac{11}{2})]$

- Si A és una matriu real, aleshores

$$\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^t).$$

A $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar euclidià,

- Si F ve donat per generadors $\Rightarrow$ les equacions de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: els seus coeficients són les coordenades dels generadors.
- Si F ve donat per equacions $\Rightarrow$ els generators de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: les seves coordenades són els coeficients de les equacions.

F	$F^\perp$
$[(1,3,2),(-2,1,8)]$	$\left\{ \begin{array}{c} x+3y+2z=0 \\ -2x+y+8z=0 \end{array} \right.$
$3x-5y+\frac{11}{2}z=0$	$[(3,-5,\frac{11}{2})]$

- Si A és una matriu real, aleshores

$$\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^t).$$

Outline

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n.

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^{\perp}$ per qualsevol subespai F. És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^{\perp}$.

- w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $proj_F(v)$,
- w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^{\perp}$ i es denota per $proj_{F^{\perp}}(v)$.
- Així, $v = proj_F(v) + proj_{F^{\perp}}(v)$ i $proj_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - proj_F(v)$ pertany a $F^{\perp}$.
- Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^{\perp}$ té dimensió $n - d$.

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n.

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^{\perp}$ per qualsevol subespai F. És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^{\perp}$.

- w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $proj_F(v)$,
- w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^{\perp}$ i es denota per $proj_{F^{\perp}}(v)$.
- Així, $v = proj_F(v) + proj_{F^{\perp}}(v)$ i $proj_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - proj_F(v)$ pertany a $F^{\perp}$.
- Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^{\perp}$ té dimensió $n - d$.

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n.

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^{\perp}$ per qualsevol subespai F. És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^{\perp}$.

- w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $proj_F(v)$,
- w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^{\perp}$ i es denota per $proj_{F^{\perp}}(v)$.
- Així, $v = proj_F(v) + proj_{F^{\perp}}(v)$ i $proj_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - proj_F(v)$ pertany a $F^{\perp}$.
- Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^{\perp}$ té dimensió $n - d$.

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n.

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^{\perp}$ per qualsevol subespai F. És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^{\perp}$.

- w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $proj_F(v)$,
- w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^{\perp}$ i es denota per $proj_{F^{\perp}}(v)$.
- Així, $v = proj_F(v) + proj_{F^{\perp}}(v)$ i $proj_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - proj_F(v)$ pertany a $F^{\perp}$.
- Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^{\perp}$ té dimensió $n - d$.

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n.

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^{\perp}$ per qualsevol subespai F. És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^{\perp}$.

- w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $proj_F(v)$,
- w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^{\perp}$ i es denota per $proj_{F^{\perp}}(v)$.
- Així, $v = proj_F(v) + proj_{F^{\perp}}(v)$ i $proj_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - proj_F(v)$ pertany a $F^{\perp}$.
- Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^{\perp}$ té dimensió $n - d$.

Interpretació geomètrica

Proposició

La projecció ortogonal de v en F és el vector de F més proper a v; és a dir,

$$\|v - proj_F(v)\| = \min_{w \in F}\{\|v - w\|\}$$

(i coincideix amb $\|proj_{F^\perp}(v)\|$). La projecció ortogonal $proj_F(v)$ és la millor aproximació de v en F.

Càlcul de la projecció ortogonal

Proposició

$proj_F(v)$ és l'únic vector w que satisfà $w \in F$ i $v - w \in F^{\perp}$. Si F té base $u_1, \ldots, u_d$, aleshores $proj_F(v)$ és l'unic vector w tal que

$$w = c_1 u_1 + \ldots c_d u_d \in F \quad i \left\{ \begin{array}{c} < u_1, w > = < u_1, v > \\ \vdots \\ < u_d, w > = < u_d, v > \end{array} \right.$$

Així, $proj_F(v)$ és el vector $c_1 u_1 + \cdots + c_d u_d$ tal que $c_1, \ldots, c_d$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} < u_1, u_1 > & \ldots & < u_1, u_d > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < u_d, u_1 > & \ldots & < u_d, u_d > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < u_1, v > \\ \vdots \\ < u_d, v > \end{pmatrix}$$

Amb el prod. esc. estàndard, si A és la matriu $\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_d \end{pmatrix}$,

aleshores $c_1, \ldots, c_d$ són solució del sistema

$$A^t A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = A^t v.$$

(Si $u_1, \ldots, u_d$ són l.i., aleshores $A^t A$ és invertible).

Projecció ortogonal amb base ortogonal

Corollary

Si $\dim F = 1$, $F = [u]$, *aleshores* $proj_F(v) = \frac{<v,u>}{<u,u>}\ u.$

Proposició

Si $u_1, \ldots, u_d$ *és una base ortogonal de* F *i* $v \in E$, *aleshores*

$$proj_F(v) = \frac{< v, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 + \cdots + \frac{< v, u_d >}{< u_d, u_d >} u_d.$$

Proposició

Si $u_1, \ldots, u_d$ *és un b.o.n. de* F *i* $v \in E$, *aleshores*

$$proj_F(v) = < v, u_1 > u_1 + \cdots + < v, u_d > u_d.$$

És a dir, les coordenades de $proj_F(v)$ *in la base* $u_1, \ldots, u_d$ *són* $< v, u_1 >, \ldots, < v, u_d >$.

Projecció ortogonal amb base ortogonal

Corollary

Si $\dim F = 1$, $F = [u]$, *aleshores* $proj_F(v) = \frac{<v,u>}{<u,u>}\, u$.

Proposició

Si $u_1, \dots, u_d$ *és una base ortogonal de* F *i* $v \in E$, *aleshores*

$$proj_F(v) = \frac{< v, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 + \cdots + \frac{< v, u_d >}{< u_d, u_d >} u_d .$$

Proposició

Si $u_1, \dots, u_d$ *és un b.o.n. de* F *i* $v \in E$, *aleshores*

$$proj_F(v) = < v, u_1 > u_1 + \cdots + < v, u_d > u_d .$$

És a dir, les coordenades de $proj_F(v)$ *in la base* $u_1, \dots, u_d$ *són* $< v, u_1 >, \dots, < v, u_d >$.

Projecció ortogonal amb base ortogonal

Corollary

Si $\dim F = 1$, $F = [u]$, *aleshores* $proj_F(v) = \frac{<v,u>}{<u,u>}\ u.$

Proposició

Si $u_1, \ldots, u_d$ *és una base ortogonal de* F *i* $v \in E$, *aleshores*

$$proj_F(v) = \frac{< v, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 + \cdots + \frac{< v, u_d >}{< u_d, u_d >} u_d.$$

Proposició

Si $u_1, \ldots, u_d$ *és un b.o.n. de* F *i* $v \in E$, *aleshores*

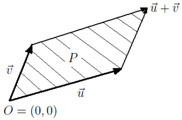
$$proj_F(v) =< v, u_1 > u_1 + \cdots + < v, u_d > u_d.$$

És a dir, les coordenades de $proj_F(v)$ *in la base* $u_1, \ldots, u_d$ *són* $< v, u_1 >, \ldots, < v, u_d >$.

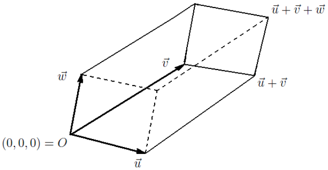
Determinants i volums

De la projecció ortogonal i propietats del producte vectorial podem provar:

- A $\mathbb{R}^2$, el paral·lelogram determinat per dos vectors u, v té àrea igual a $|\det(u, v)|$.



- A $\mathbb{R}^3$, el paral·lelepíped determinat per tres vectors u, v, w té volum igual a $|\det(u, v, w)|$.



Outline

Descomposició en valors singulars (SVD)

Teorema (Descomposició en valors singulars)

Sigui A una matriu real $m \times n$. Existeix una decomposició $A = U \cdot D \cdot V^t$,on U és $m \times m$, V és $n \times n$, U, V són ortogonals i D és la matriu $m \times n$:

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \sigma_r & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

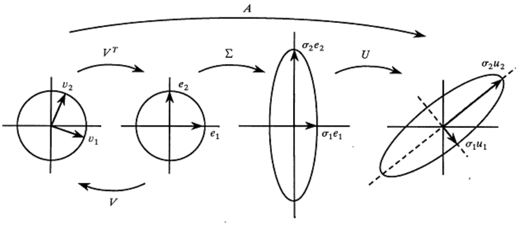
amb $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ i $r = rank\ A$.
$\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ s'anomenen els valors singulars de A i estan unívocament determinats per A.

Interpretació geomètrica de la SVD

Si A és la matriu estàndard una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, i anomenem $u_1, \ldots, u_m$, $v_1, \ldots, v_n$ les columnes de U i V respectivament, aleshores D és la matriu associada a f en b.o.n $v_1, \ldots, v_n$ i $u_1, \ldots, u_m$:

$$A = M_e(f) = \underbrace{U}_{A_{u \to e}} * \underbrace{D}_{M_{v,u}(f)} * \underbrace{V^t}_{A_{e \to v}}$$

(noteu que $V^t = V^{-1} = A_{e \to v}$).



[T. Hern, C. Long]

Com obtenim la SVD?

Els valors singulars venen determinats per A:

$$A = UDV^t \Rightarrow A^tA = VD^tU^tUDV^t = VD^tDV^t$$

però U i V no (però gairebé determintats en la majoria de casos). Com calculem la SVD?

(1) Diagonalitzem la matriu simètrica $S = A^t \cdot A$ (Ta. espectral)

(2) Si $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$ són els VAPs no nuls de $S \Rightarrow$ els valors singulars són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (fet: A^tA sempre té VAPs no negatius).

(3) Les columnes de V són una b.o.n $v_1, \ldots, v_n$ de VEPs de S.

(4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1, \ldots, u_r = \frac{1}{\sigma_r}Av_r$ són vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$ (que es poden complear a una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$ si cal) i formen les columnes de U.

Com obtenim la SVD?

Els valors singulars venen determinats per A:

$$A = UDV^t \Rightarrow A^t A = VD^t U^t UDV^t = VD^t DV^t$$

però U i V no (però gairebé determintats en la majoria de casos).
Com calculem la SVD?

(1) Diagonalitzem la matriu simètrica $S = A^t \cdot A$ (Ta. espectral)

(2) Si $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$ són els VAPs no nuls de $S \Rightarrow$ els valors singulars són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (fet: $A^t A$ sempre té VAPs no negatius).

(3) Les columnes de V són una b.o.n $v_1, \ldots, v_n$ de VEPs de S.

(4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1, \ldots, u_r = \frac{1}{\sigma_r} Av_r$ són vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$ (que es poden complear a una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$ si cal) i formen les columnes de U.

Com obtenim la SVD?

Els valors singulars venen determinats per A:

$$A = UDV^t \Rightarrow A^tA = VD^tU^tUDV^t = VD^tDV^t$$

però U i V no (però gairebé determintats en la majoria de casos).
Com calculem la SVD?

(1) Diagonalitzem la matriu simètrica $S = A^t \cdot A$ (Ta. espectral)

(2) Si $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$ són els VAPs no nuls de $S \Rightarrow$ els valors singulars són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (fet: A^tA sempre té VAPs no negatius).

(3) Les columnes de V són una b.o.n $v_1, \ldots, v_n$ de VEPs de S.

(4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1, \ldots, u_r = \frac{1}{\sigma_r}Av_r$ són vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$ (que es poden complear a una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$ si cal) i formen les columnes de U.

Com obtenim la SVD?

Els valors singulars venen determinats per A:

$$A = UDV^t \Rightarrow A^tA = VD^tU^tUDV^t = VD^tDV^t$$

però U i V no (però gairebé determintats en la majoria de casos).
Com calculem la SVD?

(1) Diagonalitzem la matriu simètrica $S = A^t \cdot A$ (Ta. espectral)

(2) Si $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$ són els VAPs no nuls de $S \Rightarrow$ els valors singulars són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (fet: A^tA sempre té VAPs no negatius).

(3) Les columnes de V són una b.o.n $v_1, \ldots, v_n$ de VEPs de S.

(4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1, \ldots, u_r = \frac{1}{\sigma_r}Av_r$ són vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$ (que es poden complear a una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$ si cal) i formen les columnes de U.

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \mathrm{Nuc}(A) \oplus \mathrm{Im}(A^t)$ ($\mathrm{Im}(A^t)$=[files de A]), $\mathbb{R}^m = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existen b.o.n.'s $v_1, \dots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \dots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\mathrm{Im}(A) = [u_1, \dots, u_r]$
2. $\mathrm{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \dots, v_n]$
3. $\mathrm{Im}(A^t) = [v_1, \dots, v_r]$
4. $\mathrm{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\mathrm{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \dots, v_r$, $u_1, \dots, u_r$ ve donada per la la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \mathrm{Nuc}(A) \oplus \mathrm{Im}(A^t)$ ($\mathrm{Im}(A^t)$=[files de A]), $\mathbb{R}^m = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existen b.o.n.'s $v_1, \ldots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \ldots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\mathrm{Im}(A) = [u_1, \ldots, u_r]$
2. $\mathrm{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$
3. $\mathrm{Im}(A^t) = [v_1, \ldots, v_r]$
4. $\mathrm{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \ldots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\mathrm{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \ldots, v_r$, $u_1, \ldots, u_r$ ve donada per la la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \mathrm{Nuc}(A) \oplus \mathrm{Im}(A^t)$ ($\mathrm{Im}(A^t)$=[files de A]), $\mathbb{R}^m = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existen b.o.n.'s $v_1, \dots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \dots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\mathrm{Im}(A) = [u_1, \dots, u_r]$
2. $\mathrm{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \dots, v_n]$
3. $\mathrm{Im}(A^t) = [v_1, \dots, v_r]$
4. $\mathrm{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\mathrm{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \dots, v_r$, $u_1, \dots, u_r$ ve donada per la la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(A) \oplus \text{Im}(A^t)$ ($\text{Im}(A^t)$=[files de A]), $\mathbb{R}^m = \text{Im}(A) \oplus \text{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existen b.o.n.'s $v_1, \dots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \dots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\text{Im}(A) = [u_1, \dots, u_r]$
2. $\text{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \dots, v_n]$
3. $\text{Im}(A^t) = [v_1, \dots, v_r]$
4. $\text{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\text{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \dots, v_r$, $u_1, \dots, u_r$ ve donada per la la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(A) \oplus \text{Im}(A^t)$ ($\text{Im}(A^t)$=[files de A]), $\mathbb{R}^m = \text{Im}(A) \oplus \text{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existen b.o.n.'s $v_1, \ldots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \ldots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\text{Im}(A) = [u_1, \ldots, u_r]$
2. $\text{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$
3. $\text{Im}(A^t) = [v_1, \ldots, v_r]$
4. $\text{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \ldots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\text{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \ldots, v_r$, $u_1, \ldots, u_r$ ve donada per la la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La norma-2 d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- És una norma de matriu: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|cA\|_2 = |c|\|A\|_2$, $\|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\|$ $\forall v$.
- $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La norma-2 d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- És una norma de matriu: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|cA\|_2 = |c|\|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\|$ $\forall v$.
- $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La norma-2 d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- És una norma de matriu: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|cA\|_2 = |c|\|A\|_2$, $\|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- $\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- $\|Av\| \leq \|A\|_2\|v\| \ \forall v$.
- $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La norma-2 d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- És una norma de matriu: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|cA\|_2 = |c|\|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- $\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- $\|Av\| \leq \|A\|_2\|v\| \ \forall v$.
- $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La norma-2 d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- És una norma de matriu: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|cA\|_2 = |c|\|A\|_2$, $\|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \; \forall v$.
- $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La norma-2 d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- És una norma de matriu: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|cA\|_2 = |c|\|A\|_2$, $\|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- $\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- $\|Av\| \leq \|A\|_2\|v\|\ \forall v$.
- $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La norma-2 d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- És una norma de matriu: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|cA\|_2 = |c|\|A\|_2$, $\|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \ \forall v$.
- $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Conseqüències geomètriques de la *SVD*:

Proposició

- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- *El màxim s'assoleix en* $\pm v_1$: $\max_{||x||=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.
- $\min_{||x||=1} \|Ax\| = \begin{cases} \sigma_n & \textit{si A té rang n, i s'assoleix en } \pm v_n \\ 0 & \textit{si A té rang } < n \end{cases}$
- *Si A és invertible,* $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.

Conseqüències geomètriques de la *SVD*:

Proposició

- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- *El màxim s'assoleix en* $\pm v_1$*:* $\max_{||x||=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.
- $\min_{||x||=1} \|Ax\| = \begin{cases} \sigma_n & si\ A\ té\ rang\ n,\ i\ s'assoleix\ en\ \pm v_n \\ 0 & si\ A\ té\ rang\ < n \end{cases}$
- *Si A és invertible,* $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.

Conseqüències geomètriques de la *SVD*:

Proposició

- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- *El màxim s'assoleix en* $\pm v_1$*:* $\max_{||x||=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.
- $\min_{||x||=1} \|Ax\| = \begin{cases} \sigma_n & \textit{si A té rang n, i s'assoleix en } \pm v_n \\ 0 & \textit{si A té rang } < n \end{cases}$
- *Si A és invertible,* $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.

Conseqüències geomètriques de la *SVD*:

Proposició

- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- *El màxim s'assoleix en* $\pm v_1$*:* $\max_{||x||=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.
- $\min_{||x||=1} \|Ax\| =$
$$\begin{cases} \sigma_n & si\ A\ té\ rang\ n,\ i\ s'assoleix\ en\ \pm v_n \\ 0 & si\ A\ té\ rang\ < n \end{cases}$$
- *Si A és invertible,* $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.

Conseqüències geomètriques de la *SVD*:

Proposició

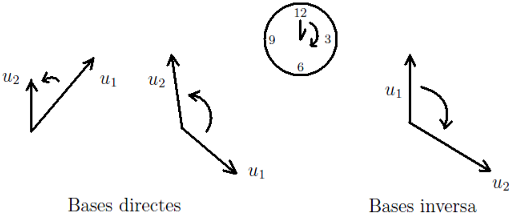
- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- *El màxim s'assoleix en* $\pm v_1$*:* $\max_{||x||=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.
- $\min_{||x||=1} \|Ax\| =$
$$\begin{cases} \sigma_n & si\ A\ té\ rang\ n,\ i\ s'assoleix\ en\ \pm v_n \\ 0 & si\ A\ té\ rang\ < n \end{cases}$$
- *Si A és invertible,* $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.

Outline

Orientació de $\mathbb{R}^2$

Una base u_1, u_2 de $\mathbb{R}^2$ té

- orientació directa/positiva si el gir més curt de u_1 a u_2 és anti-horari.
- orientació inversa/negativa si the el gir més curt de u_1 to u_2 és horari.



Orientacions

A $\mathbb{R}^n$ diem que la base estàndard té orientació directa/positiva.
Per les altres bases:

Definició

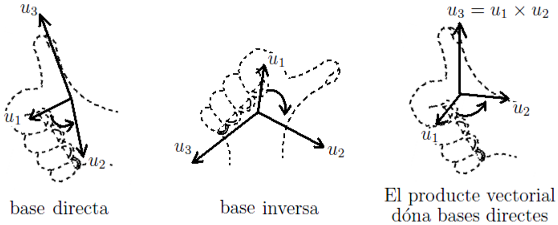
Una base $u_1, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ té orientació directa/positiva, si

$$\det(u_1, u_2, \ldots, u_n) > 0$$

(calculat en coordenades estàndard); altrament, diem que la base té orientació inversa/negativa.

Interpretació geomètrica a $\mathbb{R}^3$

A $\mathbb{R}^3$, per veure si una base u_1, u_2, u_3 té orientació directa usem la *regla de la mà dreta*: posem el polze apuntant a u_3 i si el sentint de tancar la mà és el mateix que el del camí més curt de u_1 a u_2, aleshores té orientació directa.



- Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ són l.i. $\Rightarrow$ $u, v, u \times v$ és una base directa,

$$\det(u, v, u \times v) > 0.$$

Isometries

Definició

Un endomorfisme $f \in End(E)$ és una isometria si preserva el producte escalar,

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v.$$

Ex: Si A és una matriu ortogonal, aleshores $x \overset{f}{\mapsto} Ax$ és una isometria.

Proposició

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació lineal, són equivalents:

- *f és un isometria*
- *f envia la base estàndard a una b.o.n*
- *$M_e(f)$ (or en qualsevol b.o.n) és un matriu ortogonal*

Isometries

Definició

Un endomorfisme $f \in End(E)$ és una isometria si preserva el producte escalar,

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v.$$

Ex: Si A és una matriu ortogonal, aleshores $x \overset{f}{\mapsto} Ax$ és una isometria.

Proposició

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació lineal, són equivalents:

- *f és un isometria*
- *f envia la base estàndard a una b.o.n*
- *$M_e(f)$ (or en qualsevol b.o.n) és un matriu ortogonal*

Isometries directes i inverses

Propietats: si f és un isometria, aleshores

- $\|f(u)\| = \|u\|$, per tot $u \in E$
- $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ per tot x, y
- angle entre $f(u)$ i $f(v)$ = angle (no orientat) entre u i v
- Si F és f-invariant $\Rightarrow F^{\perp}$ és f-invariant

Remarca: si f és una isometria de $\mathbb{R}^n \Rightarrow \det(f) = \pm 1$ i si λ és un VAP de f, aleshores $|\lambda| = 1$.

- Si $\det f = +1$ diem que és una isometria directa (preserva orientació).
- Si $\det f = +1$ diem que és una isometria inversa (canvia orientació).

Exemples d'isometries de $\mathbb{R}^2$

Les aplicacions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ següents són isometries:

- $f=$ reflexió/simetria respecte una recta l que conté l'origen, $l = [v]$.Aleshores

$$f(x) = 2\frac{< v, x >}{< v, v >} v - x, \qquad M_e(f) = \frac{2}{< v, v >} v v^t - Id,$$

i prenent u de $[v]^{\perp}$ ho podem escriure com:

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{< u, u >} u \cdot u^t.$$

- $f=$gir anti-horari d'angle α respect l'origen; aleshores

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

f és una isometria directa.

Exemples d'isometries de $\mathbb{R}^2$

Les aplicacions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ següents són isometries:

- $f =$ reflexió/simetria respecte una recta l que conté l'origen, $l = [v]$.Aleshores

$$f(x) = 2\frac{< v, x >}{< v, v >}v - x, \qquad M_e(f) = \frac{2}{< v, v >}vv^t - Id,$$

i prenent u de $[v]^\perp$ ho podem escriure com:

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{< u, u >}u \cdot u^t.$$

- $f =$gir anti-horari d'angle α respect l'origen; aleshores

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

f és una isometria directa.

Classificació d'isometries a $\mathbb{R}^2$

Teorema

Si f és una isometria de $\mathbb{R}^2$, aleshores o bé

- $\det f = 1$ *i f és un gir anti-horari d' angle α respecte el* $(0,0)$ *i en qualsevol b.o.n directa* $\mathbf{u}$,

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

o

- $\det f = -1$ *i f és una reflexió/simetria respecte una recta* $[v] \ni (0,0)$; *si* $u \in [v]^{\perp} \Rightarrow$

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{< u, u >} u \cdot u^t \qquad M_{v,u}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Classificació d'isometries a $\mathbb{R}^2$

Teorema

Si f és una isometria de $\mathbb{R}^2$, aleshores o bé

- $\det f = 1$ *i f és un gir anti-horari d' angle α respecte el* $(0,0)$ *i en qualsevol b.o.n directa* $\mathbf{u}$,

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

o

- $\det f = -1$ *i f és una reflexió/simetria respecte una recta* $[v] \ni (0,0)$*; si $u \in [v]^{\perp} \Rightarrow$*

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{< u, u >} u \cdot u^t \qquad M_{v,u}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Classificació d'isometries a $\mathbb{R}^2$

Teorema

Si f és una isometria de $\mathbb{R}^2$, aleshores o bé

- $\det f = 1$ *i f és un gir anti-horari d' angle α respecte el $(0,0)$ i en qualsevol b.o.n directa* $\mathbf{u}$,

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

o

- $\det f = -1$ *i f és una reflexió/simetria respecte una recta* $[v] \ni (0,0)$*; si* $u \in [v]^{\perp} \Rightarrow$

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{< u, u >} u \cdot u^t \qquad M_{v,u}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x,y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- M és ortogonal $\Rightarrow$ f és un isometria
- $det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- Per trobar l'angle α: segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = 1/2, \sin\alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)}$ $\forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos\alpha = \frac{<v,f(v)>}{|||v||| \, |||f(v)|||}$ i si $det(v, f(v)) > 0$ (resp. $det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x,y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- M és ortogonal $\Rightarrow$ f és un isometria
- $det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- Per trobar l'angle α: segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = 1/2, \sin\alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)}\ \forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos\alpha = \frac{<v, f(v)>}{|||v||| \, |||f(v)|||}$ i si $det(v, f(v)) > 0$ (resp. $det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x,y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- M és ortogonal $\Rightarrow$ f és un isometria
- $det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- Per trobar l'angle α: segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = 1/2, \sin\alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)}$ $\forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos\alpha = \frac{<v,f(v)>}{|||v|||||f(v)|||}$ i si $det(v, f(v)) > 0$ (resp. $det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x,y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- M és ortogonal $\Rightarrow$ f és un isometria
- $det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- Per trobar l'angle α: segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = 1/2, \sin\alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)}\ \forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos\alpha = \frac{<v,f(v)>}{|||v|||\,|||f(v)|||}$ i si $det(v, f(v)) > 0$ (resp. $det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x, y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- M és ortogonal $\Rightarrow$ f és un isometria
- $det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- Per trobar l'angle α: segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = 1/2, \sin\alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)}\ \forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos\alpha = \frac{<v,f(v)>}{|||v||||||f(v)|||}$ i si $det(v, f(v)) > 0$ (resp. $det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemples d'isometries a $\mathbb{R}^3$

f = *gir/rotació* d'un cert angle respecte una recta $r \ni O = (0,0,0)$ (r s'anomena *eix de rotació*).

- Per distingir entre angle θ i $-\theta$ $(= 2\pi - \theta)$ cal *orientar* r:
- Escollim un vector u de r, orientem $r = [u]$ per u usant la regla de la mà dreta: amb el polze en el sentit de u, gir positiu és en el sentit de tancar la mà (mirant des de la fletxa de u, gir anti-horari en el pla $r^\perp$). Aleshores θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui, per qualsevol $v \notin r$,

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{1}$$

- Preserva l'orientació de bases, $\Rightarrow$ és isometria directa $(\det(f) = 1)$.

Exemples d'isometries a $\mathbb{R}^3$

$f =$ *gir/rotació* d'un cert angle respecte una recta $r \ni O = (0,0,0)$ (r s'anomena *eix de rotació*).

- Per distingir entre angle θ i $-\theta$ $(= 2\pi - \theta)$ cal *orientar* r:
- Escollim un vector u de r, orientem $r = [u]$ per u usant la regla de la mà dreta: amb el polze en el sentit de u, gir positiu és en el sentit de tancar la mà (mirant des de la fletxa de u, gir anti-horari en el pla $r^\perp$). Aleshores θ pertany a $[0,\pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui, per qualsevol $v \notin r$,

$$\begin{array}{lcl} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow & \theta \in [0,\pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{array} \quad (1)$$

- Preserva l'orientació de bases, $\Rightarrow$ és isometria directa $(\det(f) = 1)$.

Exemples d'isometries a $\mathbb{R}^3$

f = *gir/rotació* d'un cert angle respecte una recta $r \ni O = (0,0,0)$ (r s'anomena *eix de rotació*).

- Per distingir entre angle θ i $-\theta$ $(= 2\pi - \theta)$ cal *orientar* r:
- Escollim un vector u de r, orientem $r = [u]$ per u usant la regla de la mà dreta: amb el polze en el sentit de u, gir positiu és en el sentit de tancar la mà (mirant des de la fletxa de u, gir anti-horari en el pla $r^\perp$). Aleshores θ pertany a $[0,\pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui, per qualsevol $v \notin r$,

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [0,\pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{1}$$

- Preserva l'orientació de bases, $\Rightarrow$ és isometria directa ($\det(f) = 1$).

Exemple de gir:

f = gir d'eix $r = [e_3]$, orientat per e_3, i angle $\pi/3$. Aleshores

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Matriu d'un gir

f = gir d'eix $r = [u]$ (orientat per u) i angle θ. Prenem b.o.n. positiva $\mathbf{u} = u_1, u_2, u_3$ amb $u_3 = \frac{u}{\|u\|}$ ("b.o.n adaptada"), aleshores

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple: simetria axial

f = simetria axial respecte una recta $r \ni O$.

- f = gir d'angle π i eix r ($\det(f) = 1$).
- Com $\pi = -\pi$, no necessitem orientació.
- Ex: trobeu $M_e(f)$ per f = simetria axial respecte l'eix z.

Exemple: simetria axial

f = simetria axial respecte una recta $r \ni O$.

- f = gir d'angle π i eix r ($\det(f) = 1$).
- Com $\pi = -\pi$, no necessitem orientació.
- Ex: trobeu $M_e(f)$ per f = simetria axial respecte l'eix z.

Exemple: simetria axial

f = simetria axial respecte una recta $r \ni O$.

- f = gir d'angle π i eix r ($\det(f) = 1$).
- Com $\pi = -\pi$, no necessitem orientació.
- Ex: trobeu $M_e(f)$ per f = simetria axial respecte l'eix z.

Exemple: Reflexió especular

$f =$ *reflexió especular/simetria* respecte un pla $H \ni O$.

- Canvia l'orientació $\Rightarrow \det(f) = -1$.
- Exemple: si $H = \{z = 0\}$, aleshores $f(x, y, z) = (x, y, -z)$
- Si $u \in H^{\perp}$, aleshores

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{< u, u >} u \cdot u^t.$$

Exemple: Reflexió especular

$f =$ *reflexió especular/simetria* respecte un pla $H \ni O$.

- Canvia l'orientació $\Rightarrow \det(f) = -1$.
- Exemple: si $H = \{z = 0\}$, aleshores $f(x, y, z) = (x, y, -z)$
- Si $u \in H^{\perp}$, aleshores

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{< u, u >} u \cdot u^t.$$

Exemple: Reflexió especular

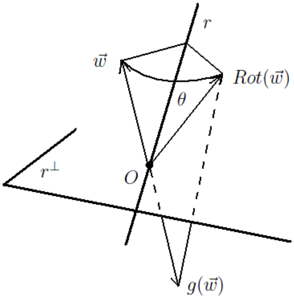
$f =$ *reflexió especular/simetria* respecte un pla $H \ni O$.

- Canvia l'orientació $\Rightarrow \det(f) = -1$.
- Exemple: si $H = \{z = 0\}$, aleshores $f(x, y, z) = (x, y, -z)$
- Si $u \in H^{\perp}$, aleshores

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{< u, u >} u \cdot u^t.$$

Exemple: Rotació seguida de reflexió especular

$g =$ gir R amb eix $r = [u]$ i angle θ seguida de reflexió especular respecte un pla ortogonal a r, $[u]^{\perp}$.



Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ *(isometria directa): f és un gir d'eix $r = [u] =$ VEPs de VAP 1.*
- **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ *(isometria inversa): $f =$ gir R d'angle θ i eix $r = [u]$ (=VEPs de VAP -1), seguit de reflexió especular S respecte el pla $[u]^{\perp}$, $f = S \circ R$.*

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ *(isometria directa): f és un gir d'eix $r = [u] =$ VEPs de VAP 1.*
- **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ *(isometria inversa): $f =$ gir R d'angle θ i eix $r = [u]$ (=VEPs de VAP -1), seguit de reflexió especular S respecte el pla $[u]^{\perp}$, $f = S \circ R$.*

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ *(isometria directa): f és un gir d'eix $r = [u] =$ VEPs de VAP 1.*
- **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ *(isometria inversa): $f =$ gir R d'angle θ i eix $r = [u]$ (=VEPs de VAP -1), seguit de reflexió especular S respecte el pla $[u]^\perp$, $f = S \circ R$.*

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ *(isometria directa): f és un gir d'eix $r = [u] =$ VEPs de VAP 1.*
- **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ *(isometria inversa): $f =$ gir R d'angle θ i eix $r = [u]$ (=VEPs de VAP -1), seguit de reflexió especular S respecte el pla $[u]^\perp$, $f = S \circ R$.*

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ *(isometria directa): f és un gir d'eix $r = [u] =$ VEPs de VAP 1.*
- **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ *(isometria inversa): $f =$ gir R d'angle θ i eix $r = [u]$ (=VEPs de VAP -1), seguit de reflexió especular S respecte el pla $[u]^{\perp}$, $f = S \circ R$.*

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Cas 1: $\det f = +1$, $f =$ gir d'eix $r = [u]$.

Orientem l'eix per u u de norma 1 i anomenem θ l'angle de gir. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = u\}$ és una b.o.n. directa (anomenada base adaptada a f), es té

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] =$ VEPs de VAP 1 $=$ vectors fixos per f.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{tr(f)-1}{2}$ i θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{2}$$

Cas 1: $\det f = +1$, $f =$ gir d'eix $r = [u]$.

Orientem l'eix per u u de norma 1 i anomenem θ l'angle de gir. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = u\}$ és una b.o.n. directa (anomenada base adaptada a f), es té

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] =$ VEPs de VAP $1 =$ vectors fixos per f.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{tr(f)-1}{2}$ i θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \qquad (2)$$

Cas 1: $\det f = +1$, $f =$ gir d'eix $r = [u]$.

Orientem l'eix per u u de norma 1 i anomenem θ l'angle de gir. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = u\}$ és una b.o.n. directa (anomenada base adaptada a f), es té

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] =$ VEPs de VAP 1 $=$ vectors fixos per f.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{tr(f)-1}{2}$ i θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{2}$$

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, R= gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^{\perp}$.

- Case 2.a $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^{\perp}$. Es té:
  - $[u]$: VEPs de VAP -1
  - Imatge d'un vector v:

    $$\boxed{S(v) = v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u}$$

  - Matriu de f:

    $$M(S) = \mathrm{Id} - \frac{2}{u^t u}uu^t$$

  - H: vectors fixos by f, pla de VEPs de VAP 1.
  - $H = [v - f(v)]^{\perp}$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, R= gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^{\perp}$.

- Case 2.a $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^{\perp}$. Es té:
  - $[u]$: VEPs de VAP -1
  - Imatge d'un vector v:

$$\boxed{S(v) = v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u}$$

  - Matriu de f:

$$M(S) = \mathrm{Id} - \frac{2}{u^t u}uu^t$$

  - H: vectors fixos by f, pla de VEPs de VAP 1.
  - $H = [v - f(v)]^{\perp}$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, R= gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^\perp$.

- Case 2.a $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^\perp$. Es té:
  - $[u]$: VEPs de VAP -1
  - Imatge d'un vector v:

$$\boxed{S(v) = v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u}$$

  - Matriu de f:

$$M(S) = \mathrm{Id} - \frac{2}{u^t u}uu^t$$

  - H: vectors fixos by f, pla de VEPs de VAP 1.
  - $H = [v - f(v)]^\perp$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, $R=$ gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^{\perp}$.

- Case 2.a $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^{\perp}$. Es té:
  - $[u]$: VEPs de VAP -1
  - Imatge d'un vector v:

    $$\boxed{S(v) = v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u}$$

  - Matriu de f:

    $$M(S) = \mathrm{Id} - \frac{2}{u^t u}uu^t$$

  - H: vectors fixos by f, pla de VEPs de VAP 1.
  - $H = [v - f(v)]^{\perp}$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, $R=$ gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^{\perp}$.

- Case 2.a $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^{\perp}$. Es té:
  - $[u]$: VEPs de VAP -1
  - Imatge d'un vector v:

$$\boxed{S(v) = v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u}$$

  - Matriu de f:

$$M(S) = \mathrm{Id} - \frac{2}{u^t u}uu^t$$

  - H: vectors fixos by f, pla de VEPs de VAP 1.
  - $H = [v - f(v)]^{\perp}$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, R= gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^\perp$.

- Case 2.a $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^\perp$. Es té:
  - $[u]$: VEPs de VAP -1
  - Imatge d'un vector v:

$$\boxed{S(v) = v - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u}$$

  - Matriu de f:

$$M(S) = \mathrm{Id} - \frac{2}{u^t u}uu^t$$

  - H: vectors fixos by f, pla de VEPs de VAP 1.
  - $H = [v - f(v)]^\perp$ per qualsevol $v \notin H$.

- Cas 2.b: $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

  - $[u]$ = VEPs de VAP -1.
  - H subespai invariant de dimensió 2.
  - $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
  - $\cos(\theta) = \frac{tr(f)+1}{2}$
  - θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{3}$$

- Cas 2.b: $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u]$ = VEPs de VAP -1.
- H subespai invariant de dimensió 2.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{tr(f)+1}{2}$
- θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{3}$$

- Cas 2.b: $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

  - $[u]$ = VEPs de VAP -1.
  - H subespai invariant de dimensió 2.
  - $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
  - $\cos(\theta) = \frac{tr(f)+1}{2}$
  - θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{3}$$

- Cas 2.b: $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

  - $[u]$ = VEPs de VAP -1.
  - H subespai invariant de dimensió 2.
  - $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
  - $\cos(\theta) = \frac{tr(f)+1}{2}$
  - θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{3}$$

- Cas 2.b: $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

  - $[u]$ = VEPs de VAP -1.
  - H subespai invariant de dimensió 2.
  - $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
  - $\cos(\theta) = \frac{tr(f)+1}{2}$
  - θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{3}$$

- Cas 2.b: $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u. Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

  - $[u]$ = VEPs de VAP -1.
  - H subespai invariant de dimensió 2.
  - $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
  - $\cos(\theta) = \frac{tr(f)+1}{2}$
  - θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow & \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{3}$$

Exemple

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- $\det(f) = 1 \Rightarrow f =$ gir d'eix $[u]$ i angle θ.
- Eix: VEPs de VAP 1, $r = [u = (1,0,1)]$.
- Angle: $1 + 2\cos\theta = tr(f) = 5/3 \Rightarrow \cos\theta = 1/3$
- Orientem r per u, prenem $v = (1,0,0) \notin r$, $\det(v, f(v), u) = -2/3 < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi]$, $\theta = 2\pi - 1.23$.

Exemple

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- $\det(f) = 1 \Rightarrow f =$ gir d'eix $[u]$ i angle θ.
- Eix: VEPs de VAP 1, $r = [u = (1, 0, 1)]$.
- Angle: $1 + 2\cos\theta = tr(f) = 5/3 \Rightarrow \cos\theta = 1/3$
- Orientem r per u, prenem $v = (1, 0, 0) \notin r$, $\det(v, f(v), u) = -2/3 < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi]$, $\theta = 2\pi - 1.23$.

Exemple

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- $\det(f) = 1 \Rightarrow f =$ gir d'eix $[u]$ i angle θ.
- Eix: VEPs de VAP 1, $r = [u = (1, 0, 1)]$.
- Angle: $1 + 2\cos\theta = tr(f) = 5/3 \Rightarrow \cos\theta = 1/3$
- Orientem r per u, prenem $v = (1, 0, 0) \notin r$, $\det(v, f(v), u) = -2/3 < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi]$, $\theta = 2\pi - 1.23$.

Exemple

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- $\det(f) = 1 \Rightarrow f =$ gir d'eix $[u]$ i angle θ.
- Eix: VEPs de VAP 1, $r = [u = (1, 0, 1)]$.
- Angle: $1 + 2\cos\theta = tr(f) = 5/3 \Rightarrow \cos\theta = 1/3$
- Orientem r per u, prenem $v = (1, 0, 0) \notin r$,
  $\det(v, f(v), u) = -2/3 < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi]$, $\theta = 2\pi - 1.23$.

Outline

Outline

SVD i aproximació pel rang

Teorema (Eckhart-Young)

Sigui A una matriu. Si $A = UDV^t$ i els valors singulars de A són $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ aleshores per tot $k \leq r$,

$$M = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \sigma_k & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} V^t$$

és la matriu de rank k més propera a A (i.e. $\|A - M\|_2$ és mínima entre les matrius M de rang k). Observem que $\|A - M\|_2 = \sigma_{k+1}$.

S'usa en compressió d'imatges, per exemple, perquè es pot comprimir la informació de A usant:
$A = \sigma_1 u_1 v_1^t + \sigma_2 u_2 v_2^t + \ldots + \sigma_r u_r v_r^t$.

Outline

Aproximació per mínims quadrats lineals

Problema: $Ax = b$ pot ser incompatible degut a errors en mesures de b, but voldríem una solució aproximada:

$$\begin{array}{c}\text{sistema}\\ Ax = b\\ \text{incompatible}\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad b \notin \operatorname{Im}(A)$$

Volem $\tilde{x}$ tal que $A\tilde{x}$ sigui el més proper a b possible.

Definició

Una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ és un vector $\tilde{x}$ que minimitza $\|Ax - b\|$, és a dir

$$\|A\tilde{x} - b\| \leq \|Ax - b\| \text{ per tot } x$$

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- Canviem b pel vector de $\mathrm{Im}(A)$ més proper a b: la *projecció ortogonal* de b en $\mathrm{Im}(A)$, $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow$ $\tilde{x}$ és solució de $Ax = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- El residu measura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b) - b).$$

norma del residu: $\|A\tilde{x} - b\|$

- Important: no ens cal calcular $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- Canviem b pel vector de $\mathrm{Im}(A)$ més proper a b: la *projecció ortogonal* de b en $\mathrm{Im}(A)$, $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow$ $\tilde{x}$ és solució de $Ax = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- El residu measura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b) - b).$$

  norma del residu: $\|A\tilde{x} - b\|$
- Important: no ens cal calcular $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- Canviem b pel vector de $\mathrm{Im}(A)$ més proper a b: la *projecció ortogonal* de b en $\mathrm{Im}(A)$, $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow$ $\tilde{x}$ és solució de $Ax = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- El residu measura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b) - b).$$

norma del residu: $\|A\tilde{x} - b\|$

- Important: no ens cal calcular $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- Canviem b pel vector de $\mathrm{Im}(A)$ més proper a b: la *projecció ortogonal* de b en $\mathrm{Im}(A)$, $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow$ $\tilde{x}$ és solució de $Ax = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- El residu measura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és} = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b) - b).$$

norma del residu: $\|A\tilde{x} - b\|$

- Important: no ens cal calcular $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- Canviem b pel vector de $\mathrm{Im}(A)$ més proper a b: la *projecció ortogonal* de b en $\mathrm{Im}(A)$, $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow$ $\tilde{x}$ és solució de $Ax = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$.
- Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- El residu measura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = proj_{\mathrm{Im}(A)}(b) - b).$$

  norma del residu: $\|A\tilde{x} - b\|$
- Important: no ens cal calcular $proj_{\mathrm{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Teorema

- *$\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ si, i només si, és una solució de les equacions normals:*

$$A^t Ax = A^t b.$$

- *Si el rang de A és igual al nombre de columnes, aleshores $A^t A$ és invertible i la solució per mínims quadrats és única i donada per*

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

(calcular la inversa no és eficient)

- *Si el sistema original és compatible, $\tilde{x}$ és solució del sistema original.*

Teorema

- *$\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ si, i només si, és una solució de les equacions normals:*

$$A^t A x = A^t b.$$

- *Si el rang de A és igual al nombre de columnes, aleshores $A^t A$ és invertible i la solució per mínims quadrats és única i donada per*

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

(calcular la inversa no és eficient)

- *Si el sistema original és compatible, $\tilde{x}$ és solució del sistema original.*

Teorema

- *$\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ si, i només si, és una solució de les equacions normals:*

$$A^t A x = A^t b.$$

- *Si el rang de A és igual al nombre de columnes, aleshores $A^t A$ és invertible i la solució per mínims quadrats és única i donada per*

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

  (calcular la inversa no és eficient)
- *Si el sistema original és compatible, $\tilde{x}$ és solució del sistema original.*

Teorema

- *$\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ si, i només si, és una solució de les equacions normals:*

$$A^t A x = A^t b.$$

- *Si el rang de A és igual al nombre de columnes, aleshores $A^t A$ és invertible i la solució per mínims quadrats és única i donada per*

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

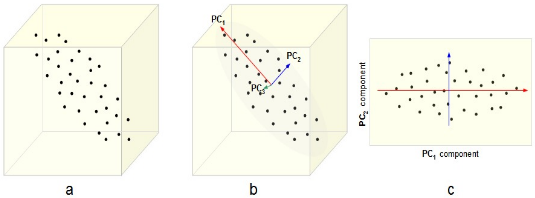
(calcular la inversa no és eficient)

- *Si el sistema original és compatible, $\tilde{x}$ és solució del sistema original.*

Outline

Anàlisi de components principals

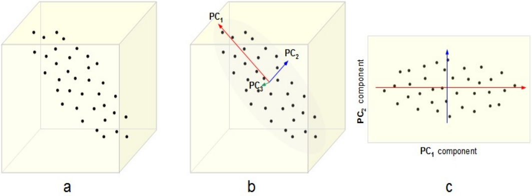
Goal: Donats N punts (dades) de $\mathbb{R}^3$, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$ altament correlacionats, volem trobar $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que el conjunt $\{t_i = ax_i + by_i + cz_i\}_i$ tingui màxima variància:



- Observem que $proj_{[v_1]}(p_i) = t_i v_1$
- $v_1 = (a, b, c)$ s'anomena primera component principal.
- Després podem buscar $v_2 \in [v_1]^\perp$ (2a component principal) que maximitzi la variància de $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$.
- O bé seguim o bé projectem sobre les primeres components principals per tal de reduir la dimensió del problem.

Anàlisi de components principals

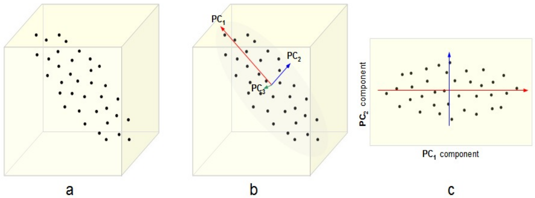
Goal: Donats N punts (dades) de $\mathbb{R}^3$, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, N$ altament correlacionats, volem trobar $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que el conjunt $\{t_i = ax_i + by_i + cz_i\}_i$ tingui màxima variància:



- Observem que $proj_{[v_1]}(p_i) = t_i v_1$
- $v_1 = (a, b, c)$ s'anomena primera component principal.
- Després podem buscar $v_2 \in [v_1]^{\perp}$ (2a component principal) que maximitzi la variància de $proj_{[v_1]^{\perp}}(p_i)$.
- O bé seguim o bé projectem sobre les primeres components principals per tal de reduir la dimensió del problem.

Anàlisi de components principals

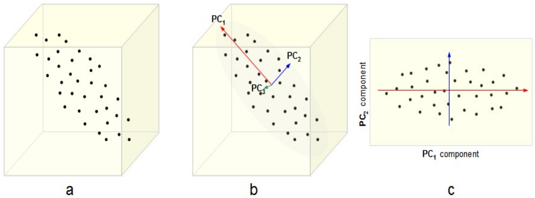
Goal: Donats N punts (dades) de $\mathbb{R}^3$, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$ altament correlacionats, volem trobar $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que el conjunt $\{t_i = ax_i + by_i + cz_i\}_i$ tingui màxima variància:



- Observem que $proj_{[v_1]}(p_i) = t_i v_1$
- $v_1 = (a, b, c)$ s'anomena primera component principal.
- Després podem buscar $v_2 \in [v_1]^\perp$ (2a component principal) que maximitzi la variància de $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$.
- O bé seguim o bé projectem sobre les primeres components principals per tal de reduir la dimensió del problem.

Anàlisi de components principals

Goal: Donats N punts (dades) de $\mathbb{R}^3$, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, N$ altament correlacionats, volem trobar $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que el conjunt $\{t_i = ax_i + by_i + cz_i\}_i$ tingui màxima variància:



- Observem que $proj_{[v_1]}(p_i) = t_i v_1$
- $v_1 = (a, b, c)$ s'anomena primera component principal.
- Després podem buscar $v_2 \in [v_1]^\perp$ (2a component principal) que maximitzi la variància de $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$.
- O bé seguim o bé projectem sobre les primeres components principals per tal de reduir la dimensió del problem.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix}$ de manera que $\sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0$.

- Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = ||Mv_1||$ sigui màxim.
- $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \ldots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui
$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix}$ de manera que $\sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0$.

- Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = ||Mv_1||$ sigui màxim.
- $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1 v_1^t$ té $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \ldots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \text{ de manera que } \sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0.$$

- Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = ||Mv_1||$ sigui màxim.
- $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1 v_1^t$ té $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \ldots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix}$$ de manera que $\sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0$.

- Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = ||Mv_1||$ sigui màxim.
- $\Rightarrow$ $v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \ldots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix}$ de manera que $\sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0$.

- Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = ||Mv_1||$ sigui màxim.
- $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1 v_1^t$ té $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \ldots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \text{ de manera que } \sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0.$$

- Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = ||Mv_1||$ sigui màxim.
- $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \ldots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- I prosseguim de la mateixa manera.

Observacions:

- Si el conjunt $\{p_i\}$ no està centrat a l'origen el podem centrar: sigui $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_i (x_i, y_i, z_i)/N$, i considerem

$$M = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} & z_1 - \bar{z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - \bar{x} & y_N - \bar{y} & z_N - \bar{z} \end{pmatrix}.$$

  Procedim com abans amb aquesta M i aleshores sumem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ al resultat final.
- La matriu $M^t M$ és la matriu de *covariància empírica* i la component principal v_1 és el VEP dominant d'aqueta matriu.
- Per a conjunts de punts de $\mathbb{R}^n$ es pot fer el mateix.

Observacions:

- Si el conjunt $\{p_i\}$ no està centrat a l'origen el podem centrar: sigui $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_i (x_i, y_i, z_i)/N$, i considerem

$$M = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} & z_1 - \bar{z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - \bar{x} & y_N - \bar{y} & z_N - \bar{z} \end{pmatrix}.$$

  Procedim com abans amb aquesta M i aleshores sumem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ al resultat final.

- La matriu $M^t M$ és la matriu de *covariància empírica* i la component principal v_1 és el VEP dominant d'aqueta matriu.
- Per a conjunts de punts de $\mathbb{R}^n$ es pot fer el mateix.

Observacions:

- Si el conjunt $\{p_i\}$ no està centrat a l'origen el podem centrar: sigui $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_i (x_i, y_i, z_i)/N$, i considerem

$$M = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} & z_1 - \bar{z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - \bar{x} & y_N - \bar{y} & z_N - \bar{z} \end{pmatrix}.$$

  Procedim com abans amb aquesta M i aleshores sumem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ al resultat final.
- La matriu $M^t M$ és la matriu de *covariància empírica* i la component principal v_1 és el VEP dominant d'aqueta matriu.
- Per a conjunts de punts de $\mathbb{R}^n$ es pot fer el mateix.

Outline

Producte escalar a $\mathbb{C}^n$

Definició

A $\mathbb{C}^n$ l'anàleg al producte escatar estàndard és el producte escalar hermític $< u, v >$ de dos vectors $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

és

$$< u, v > := u^t \overline{v} = x_1 \, \overline{y_1} + x_2 \, \overline{y_2} + \ldots + x_n \, \overline{y_n}.$$

Exemple:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-2i \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow < u, v > = (1 \ i \ 1-2i) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 7i.$$

Producte escalar a $\mathbb{C}^n$

Definició

A $\mathbb{C}^n$ l'anàleg al producte escatar estàndard és el producte escalar hermític $< u, v >$ de dos vectors $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ és

$$< u, v > := u^t \overline{v} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n}.$$

Exemple:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-2i \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow < u, v > = (1 \ i \ 1-2i) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 7i.$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \ \forall u$ (positiu)
2. $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $< u, v >= \overline{< v, u >}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= \overline{a_1} < u, v_1 > + \overline{a_2} < u, v_2 >$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és $\|u\| = \sqrt{u^t \overline{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \ldots v_d)$ aleshores,

$$A^t \overline{A} = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_d\} \text{ és una base ortonormal.}$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \ \forall u$ (positiu)
2. $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $< u, v >= \overline{< v, u >}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= \overline{a_1} < u, v_1 > + \overline{a_2} < u, v_2 >$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és $\|u\| = \sqrt{u^t \overline{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \ldots v_d)$ aleshores,

$$A^t \overline{A} = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_d\} \text{ és una base ortonormal.}$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \ \forall u$ (positiu)
2. $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $< u, v >= \overline{< v, u >}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= \overline{a_1} < u, v_1 > + \overline{a_2} < u, v_2 >$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és $\|u\| = \sqrt{u^t \overline{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \ldots v_d)$ aleshores,

$$A^t \overline{A} = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_d\} \text{ és una base ortonormal.}$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \ \forall u$ (positiu)
2. $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $< u, v >= \overline{< v, u >}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= \overline{a_1} < u, v_1 > + \overline{a_2} < u, v_2 >$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és $\|u\| = \sqrt{u^t \overline{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \ldots v_d)$ aleshores,

$$A^t \overline{A} = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_d\} \text{ és una base ortonormal.}$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \ \forall u$ (positiu)
2. $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $< u, v >= \overline{< v, u >}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= \overline{a_1} < u, v_1 > + \overline{a_2} < u, v_2 >$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és $\|u\| = \sqrt{u^t \overline{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \ldots v_d)$ aleshores,

$$A^t \overline{A} = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_d\} \text{ és una base ortonormal.}$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \ \forall u$ (positiu)
2. $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $< u, v >= \overline{< v, u >}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= \overline{a_1} < u, v_1 > + \overline{a_2} < u, v_2 >$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és $\|u\| = \sqrt{u^t \overline{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \ldots v_d)$ aleshores,

$$A^t \overline{A} = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_d\} \text{ és una base ortonormal.}$$

Propietats:

1. $< u, u > \geq 0 \; \forall u$ (positiu)
2. $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $< u, v >= \overline{< v, u >}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
   - $< a_1 u_1 + a_2 u_2, v >= a_1 < u_1, v > + a_2 < u_2, v >$;
   - $< u, a_1 v_1 + a_2 v_2 >= \overline{a_1} < u, v_1 > + \overline{a_2} < u, v_2 >$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és $\|u\| = \sqrt{u^t \overline{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \ldots v_d)$ aleshores,

$$A^t \overline{A} = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_d\} \text{ és una base ortonormal.}$$

Matrius unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu unitària.

- Si anomenenm les columnes de A $v_1, \dots, v_n$, $A = (v_1 \dots v_n)$, aleshores,

$$\overline{A}^t A = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ és una base ortonormal.}$$

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva normes (preserva la mesura de vectors):

$$||Ax|| = ||x|| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Matrius unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu unitària.

- Si anomenenm les columnes de A $v_1, \ldots, v_n$, $A = (v_1 \ldots v_n)$, aleshores,

$$\overline{A}^t A = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ és una base ortonormal.}$$

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva normes (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Matrius unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu unitària.

- Si anomenenm les columnes de A $v_1, \ldots, v_n$, $A = (v_1 \ldots v_n)$, aleshores,

$$\overline{A}^t A = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ és una base ortonormal.}$$

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva normes (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Matrius unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu unitària.

- Si anomenenm les columnes de A $v_1, \ldots, v_n$, $A = (v_1 \ldots v_n)$, aleshores,

$$\overline{A}^t A = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ és una base ortonormal.}$$

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva normes (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Matrius unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu unitària.

- Si anomenenm les columnes de A $v_1, \ldots, v_n$, $A = (v_1 \ldots v_n)$, aleshores,

$$\overline{A}^t A = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ és una base ortonormal.}$$

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva normes (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Outline

Bibliografia

Basic:

- D. Poole, Linear Algebra, A modern introduction (3rd edition), Brooks/Cole, 2011. Chapter 6.

Additional

- Hernández Rodríguez, E.; Vàzquez Gallo, M.J.; Zurro Moro, M.A. Álgebra lineal y geometría [en línia]