

Àlgebra lineal i geometria

4. Ortogonalitat

Departament de Matemàtiques

Marta Casanellas



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Índex

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

El producte escalar euclidià

Definició

El **producte escalar euclidià** o **estàndard** $\langle u, v \rangle$ de dos vectors

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ és}$$

$$\langle u, v \rangle := u^t v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \ \forall u$ i $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*definit positiu*)
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (*simètric*).
3. *bilineal*:

$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$

$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$

Una funció $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà aquestes propietats s'anomena un *producte escalar*.

El producte escalar euclidià

Definició

El **producte escalar euclidià** o estàndard $\langle u, v \rangle$ de dos vectors

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ és}$$

$$\langle u, v \rangle := u^t v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \ \forall u$ i $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*definit positiu*)
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (*simètric*).
3. *bilineal*:

$$\triangleright \langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle;$$

$$\triangleright \langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = a_1 \langle u, v_1 \rangle + a_2 \langle u, v_2 \rangle.$$

Una funció $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà aquestes propietats s'anomena un *producte escalar*.

El producte escalar euclidià

Definició

El **producte escalar euclidià** o **estàndard** $\langle u, v \rangle$ de dos vectors

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ és}$$

$$\langle u, v \rangle := u^t v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \ \forall u$ i $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*definit positiu*)
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (*simètric*).
3. *bilineal*:

$$\triangleright \langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle;$$

$$\triangleright \langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = a_1 \langle u, v_1 \rangle + a_2 \langle u, v_2 \rangle.$$

Una funció $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà aquestes propietats s'anomena un *producte escalar*.

El producte escalar euclidià

Definició

El **producte escalar euclidià** o **estàndard** $\langle u, v \rangle$ de dos vectors

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ és}$$

$$\langle u, v \rangle := u^t v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \ \forall u$ i $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*definit positiu*)
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (*simètric*).
3. *bilineal*:

- ▶ $\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle$;
- ▶ $\langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = a_1 \langle u, v_1 \rangle + a_2 \langle u, v_2 \rangle$.

Una funció $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà aquestes propietats s'anomena un *producte escalar*.

Formes bilineals

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. Una **forma bilineal** de E és una aplicació $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\forall u, v, w \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (a) $\varphi(u + v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$ $\varphi(\lambda u, w) = \lambda \varphi(u, w)$,
- (b) $\varphi(w, u + v) = \varphi(w, u) + \varphi(w, v)$ $\varphi(w, \lambda u) = \lambda \varphi(w, u)$.

Si $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ és una base de E , aleshores la **matriu de φ en la base $\mathbf{u}$** es defineix com

$$M_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(u_1, u_1) & \cdots & \varphi(u_1, u_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(u_n, u_1) & \cdots & \varphi(u_n, u_n) \end{pmatrix}.$$

Formes bilineals

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. Una **forma bilineal** de E és una aplicació $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\forall u, v, w \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (a) $\varphi(u + v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$ $\varphi(\lambda u, w) = \lambda \varphi(u, w)$,
- (b) $\varphi(w, u + v) = \varphi(w, u) + \varphi(w, v)$ $\varphi(w, \lambda u) = \lambda \varphi(w, u)$.

Si $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ és una base de E , aleshores la **matriu de φ en la base $\mathbf{u}$** es defineix com

$$M_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(u_1, u_1) & \cdots & \varphi(u_1, u_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(u_n, u_1) & \cdots & \varphi(u_n, u_n) \end{pmatrix}.$$

Matriu d'una forma bilineal

Propietats:

1. Si $v_u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w_u = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\varphi(v, w) = (x_1 \dots x_n) M_u(\varphi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ i $M_u(\varphi)$ és l'única matriu
 que ho satisfà.
2. Si v és una altra base, aleshores

$$M_v(\varphi) = A_{v \rightarrow u}^t M_u(\varphi) A_{v \rightarrow u}$$

Una forma bilineal φ és **simètrica** si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ per tot u, v .
 Una forma bilineal és simètrica $\Leftrightarrow M_u(\varphi)$ és una matriu simètrica
 per qualsevol base u .

Matriu d'una forma bilineal

Propietats:

1. Si $v_u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w_u = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\varphi(v, w) = (x_1 \dots x_n) M_u(\varphi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ i $M_u(\varphi)$ és l'única matriu
 que ho satisfà.
2. Si v és una altra base, aleshores

$$M_v(\varphi) = A_{v \rightarrow u}^t M_u(\varphi) A_{v \rightarrow u}$$

Una forma bilineal φ és **simètrica** si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ per tot u, v .
 Una forma bilineal és simètrica $\Leftrightarrow M_u(\varphi)$ és una matriu simètrica
 per qualsevol base u .

Matriu d'una forma bilineal

Propietats:

1. Si $v_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\varphi(v, w) = (x_1 \dots x_n) M_{\mathbf{u}}(\varphi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ i $M_{\mathbf{u}}(\varphi)$ és l'única matriu que ho satisfà.
2. Si $\mathbf{v}$ és una altra base, aleshores

$$M_{\mathbf{v}}(\varphi) = A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}}^t M_{\mathbf{u}}(\varphi) A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}}$$

Una forma bilineal φ és **simètrica** si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ per tot u, v .
 Una forma bilineal és simètrica $\Leftrightarrow M_{\mathbf{u}}(\varphi)$ és una matriu simètrica per qualsevol base $\mathbf{u}$.

Productes escalars

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. i φ una forma bilineal en E . Diem que φ és **definida positiva** si $\varphi(u, u) \geq 0$ i només es té la igualtat quan $u = 0$.

Definició

Un **producte escalar** en E és una forma bilineal simètrica definida positiva $\langle, \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Un $\mathbb{R}$ -e.v amb un producte escalar s'anomena un **espai vectorial euclidià**.

Exemples:

- ▶ El producte escalar estàndard
- ▶ $E = \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}) = \{ \text{funcions contínues reals definides a } [a, b] \}$ amb el producte escalar:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Productes escalars

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. i φ una forma bilineal en E . Diem que φ és **definida positiva** si $\varphi(u, u) \geq 0$ i només es té la igualtat quan $u = 0$.

Definició

Un **producte escalar** en E és una forma bilineal simètrica definida positiva $\langle, \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Un $\mathbb{R}$ -e.v amb un producte escalar s'anomena un **espai vectorial euclidià**.

Exemples:

- ▶ El producte escalar estàndard
- ▶ $E = \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}) = \{ \text{funcions contínues reals definides a } [a, b] \}$ amb el producte escalar:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Productes escalars

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. i φ una forma bilineal en E . Diem que φ és **definida positiva** si $\varphi(u, u) \geq 0$ i només es té la igualtat quan $u = 0$.

Definició

Un **producte escalar** en E és una forma bilineal simètrica definida positiva $\langle, \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Un $\mathbb{R}$ -e.v amb un producte escalar s'anomena un **espai vectorial euclidià**.

Exemples:

- ▶ El producte escalar estàndard
- ▶ $E = \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}) = \{ \text{funcions contínues reals definides a } [a, b] \}$ amb el producte escalar:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. La **norma** de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Si $\langle, \rangle$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard*, *euclidiana*, o *norma-2* i es denota per $\|u\|_2$.

Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c| \|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. La **norma** de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Si $\langle, \rangle$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard*, *euclidiana*, o *norma-2* i es denota per $\|u\|_2$.

Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c| \|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. La **norma** de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Si $\langle, \rangle$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard*, *euclidiana*, o *norma-2* i es denota per $\|u\|_2$.

Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c| \|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. La **norma** de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Si $\langle, \rangle$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard*, *euclidiana*, o *norma-2* i es denota per $\|u\|_2$.

Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c| \|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Norma

Sigui E be un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. La **norma** de $u \in E$ és $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Si $\langle, \rangle$ és el producte estàndard, la norma s'anomena *estàndard*, *euclidiana*, o *norma-2* i es denota per $\|u\|_2$.

Propietats: per tot $u, v \in E$ i $c \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u$ i $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2. $\|cu\| = |c| \|u\| \ c \in \mathbb{R}$;
3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular);

Tota funció $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les propietats 1,2,4 s'anomena una *norma* (no té perquè setar definida a partir d'un producte escalar).

Altres normes

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definim:

1. La **norma-1** (o del taxista o de Manhattan):

$$||x||_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

2. La norma del màxim (o infinit):

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Altres normes

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definim:

1. La **norma-1** (o del taxista o de Manhattan):

$$||x||_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

2. La **norma del màxim** (o infinit):

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$.

- ▶ Un vector u s'anomena **unitari** si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem **normalitzat** v).
- ▶ La **distància** entre dos vectors $u, v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- ▶ L'**angle** (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- ▶ Dos vectors u, v són **ortogonals** (notació $u \perp v$) si $\langle u, v \rangle = 0$.
- ▶ Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm \frac{\pi}{2}$.
- ▶ Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$.

- ▶ Un vector u s'anomena **unitari** si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem **normalitzat** v).
- ▶ La **distància** entre dos vectors $u, v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- ▶ L'**angle** (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- ▶ Dos vectors u, v són **ortogonals** (notació $u \perp v$) si $\langle u, v \rangle = 0$.
- ▶ Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm \frac{\pi}{2}$.
- ▶ Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$.

- ▶ Un vector u s'anomena **unitari** si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem **normalitzat** v).
- ▶ La **distància** entre dos vectors $u, v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- ▶ L'**angle** (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- ▶ Dos vectors u, v són **ortogonals** (notació $u \perp v$) si $\langle u, v \rangle = 0$.
- ▶ Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm \frac{\pi}{2}$.
- ▶ Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$.

- ▶ Un vector u s'anomena **unitari** si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem **normalitzat** v).
- ▶ La **distància** entre dos vectors $u, v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- ▶ L'**angle** (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- ▶ Dos vectors u, v són **ortogonals** (notació $u \perp v$) si $\langle u, v \rangle = 0$.
- ▶ Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm \frac{\pi}{2}$.
- ▶ Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$.

- ▶ Un vector u s'anomena **unitari** si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem **normalitzat** v).
- ▶ La **distància** entre dos vectors $u, v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- ▶ L'**angle** (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- ▶ Dos vectors u, v són **ortogonals** (notació $u \perp v$) si $\langle u, v \rangle = 0$.
- ▶ Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm \frac{\pi}{2}$.
- ▶ Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Distàncies i Angles

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$.

- ▶ Un vector u s'anomena **unitari** si $\|u\| = 1$. Donat un vector $v \neq 0$, sempre podem trobar un vector unitari en la seva direcció i sentit: $v/\|v\|$ (direm que hem **normalitzat** v).
- ▶ La **distància** entre dos vectors $u, v \in E$, és $d(u, v) = \|u - v\|$.
- ▶ L'**angle** (no orientat) entre dos vectors $u \neq 0, v \neq 0 \in E$ és l'únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ (el signe de $\widehat{uv}$ depèn de l'orientació que escollim).
- ▶ Dos vectors u, v són **ortogonals** (notació $u \perp v$) si $\langle u, v \rangle = 0$.
- ▶ Si $u \perp v \Rightarrow \widehat{uv} = \pm \frac{\pi}{2}$.
- ▶ Si $u \perp v$ i $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ són l.i.

Base ortonormal

Definició

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és **ortonormal** (b.o.n) si els seus vectors són

- ▶ ortogonals dos a dos: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- ▶ i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena **ortogonal** si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

▶ Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.

▶ Ex: la base $\{v_1, v_2\}$ per un prod. esc φ de $M_2(\mathbb{R})$ és b.o.

▶ Ex: la base $\{v_1, v_2\}$ per un prod. esc φ de $\mathbb{C}^2$ no és b.o. amb $\varphi(v_1, v_2) = i$.

▶ Ex: la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ amb

$\varphi(v_1, v_1) = 1, \varphi(v_2, v_2) = 2, \varphi(v_1, v_2) = 1$ no és b.o.

▶ Ex: la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ amb $\varphi(v_1, v_1) = 1, \varphi(v_2, v_2) = 1$

no és b.o. perquè $\varphi(v_1, v_2) = 1 \neq 0$.

Base ortonormal

Definició

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és **ortonormal** (b.o.n) si els seus vectors són

- ▶ ortogonals dos a dos: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- ▶ i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena **ortogonal** si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

▶ Ex: la base estàndard de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.

▶ Ex: la base per un prod. escalar $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(u, v)$.

▶ Ex: la base per un prod. escalar $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(u, v) + \frac{1}{2}(v, u)$.

▶ Ex: la base per un prod. escalar

$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(u, v) + \frac{1}{2}(v, u) + \frac{1}{2}(u, v) + \frac{1}{2}(v, u)$.

▶ Ex: la base per un prod. escalar

$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(u, v) + \frac{1}{2}(v, u) + \frac{1}{2}(u, v) + \frac{1}{2}(v, u)$.

Base ortonormal

Definició

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és **ortonormal** (b.o.n) si els seus vectors són

- ▶ ortogonals dos a dos: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- ▶ i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena **ortogonal** si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- ▶ Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- ▶ La b.o.n. per al prod. escalar $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ és $\{f_i(x) = \sqrt{2/(b-a)} \sin(\frac{i\pi x}{b-a})\}_{i=1}^\infty$
- ▶ La b.o.n. per al prod. escalar $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g'(x)dx$ és $\{f_i(x) = \sqrt{2/(b-a)} \cos(\frac{i\pi x}{b-a})\}_{i=1}^\infty$
- ▶ La b.o.n. per al prod. escalar $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g''(x)dx$ és $\{f_i(x) = \sqrt{2/(b-a)} \sin(\frac{i\pi x}{b-a})\}_{i=1}^\infty$

Base ortonormal

Definició

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és **ortonormal** (b.o.n) si els seus vectors són

- ▶ ortogonals dos a dos: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- ▶ i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena **ortogonal** si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- ▶ Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- ▶ v és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_\varphi(v) = I$.
- ▶ Si v és b.o.n. per un prod. esc φ i w és b.o.n. per un prod. esc ψ i $\varphi = \psi$ llavors $v = w$.
- ▶ Si v és b.o.n. per un prod. esc φ i w és b.o.n. per un prod. esc ψ i $\varphi \neq \psi$ llavors $v \neq w$.

Base ortonormal

Definició

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és **ortonormal** (b.o.n) si els seus vectors són

- ▶ ortogonals dos a dos: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- ▶ i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena **ortogonal** si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- ▶ Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- ▶ $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- ▶ Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle, \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- ▶ Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n.} \Leftrightarrow A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}}^t A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és **ortonormal** (b.o.n) si els seus vectors són

- ▶ ortogonals dos a dos: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- ▶ i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena **ortogonal** si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- ▶ Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- ▶ $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- ▶ Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle, \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- ▶ Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \Leftrightarrow A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}}^t A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és **ortonormal** (b.o.n) si els seus vectors són

- ▶ ortogonals dos a dos: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- ▶ i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena **ortogonal** si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- ▶ Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- ▶ $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- ▶ Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle, \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- ▶ Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n.} \Leftrightarrow A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}}^t A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}} = I.$$

Base ortonormal

Definició

Sigui E un $\mathbb{R}$ -e.v. amb producte escalar $\langle, \rangle$. Una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ d'un subespai $F \subseteq E$ és **ortonormal** (b.o.n) si els seus vectors són

- ▶ ortogonals dos a dos: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- ▶ i unitaris: $\|v_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, d$.

S'anomena **ortogonal** si són ortogonals dos a dos però no unitaris.

- ▶ Ex: la base estàndard és b.o.n de $\mathbb{R}^n$ amb el prod. euclidià.
- ▶ $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Leftrightarrow M_{\mathbf{v}}(\varphi) = I$
- ▶ Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. per un prod. esc $\varphi \Rightarrow \langle, \rangle$ es calcula com el prod. esc. estàndard.
- ▶ Si $\mathbf{v}$ és b.o.n. de E i $\mathbf{u}$ és base de E aleshores,

$$\mathbf{u} \text{ és b.o.n} \Leftrightarrow A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}}^t A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}} = I.$$

Bases ortonormals

- ▶ Si $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ és b.o.n. de $E \Rightarrow$ les coordenades de v en base $\mathbf{v}$ són

$$(\langle v, v_1 \rangle, \dots, \langle v, v_n \rangle).$$

- ▶ Donada $\mathbf{u}$ base de E , $\exists$ un producte escalar t.q. $\mathbf{u}$ és b.o.n.

Bases ortonormals

- ▶ Si $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ és b.o.n. de $E \Rightarrow$ les coordenades de v en base $\mathbf{v}$ són

$$(\langle v, v_1 \rangle, \dots, \langle v, v_n \rangle).$$

- ▶ Donada $\mathbf{u}$ base de E , $\exists$ un producte escalar t.q. $\mathbf{u}$ és b.o.n.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena **ortogonal** si satisfà $A^t A = I$.

- ▶ Si $u_1, \dots, u_n$ són les columnes de A , $A = (u_1 \dots u_n)$, aleshores,
 A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.

- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- ▶ A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- ▶ Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \text{ per tot } u, v$$

- ▶ En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena **ortogonal** si satisfà $A^t A = I$.

- ▶ Si $u_1, \dots, u_n$ són les columnes de A , $A = (u_1 \dots u_n)$, aleshores,
 A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.

- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- ▶ A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- ▶ Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \text{ per tot } u, v$$

- ▶ En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena **ortogonal** si satisfà $A^t A = I$.

- ▶ Si $u_1, \dots, u_n$ són les columnes de A , $A = (u_1 \dots u_n)$, aleshores,
 A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.

- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.

- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.

- ▶ A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.

- ▶ Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \text{ per tot } u, v$$

- ▶ En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena **ortogonal** si satisfà $A^t A = I$.

- ▶ Si $u_1, \dots, u_n$ són les columnes de A , $A = (u_1 \dots u_n)$, aleshores,
 - A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.
- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- ▶ A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- ▶ Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva el producte escalar euclidià:

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \text{ per tot } u, v$$

- ▶ En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena **ortogonal** si satisfà $A^t A = I$.

- ▶ Si $u_1, \dots, u_n$ són les columnes de A , $A = (u_1 \dots u_n)$, aleshores,
 - A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.
- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- ▶ A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- ▶ Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent **preserva el producte escalar euclidià**:

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \text{ per tot } u, v$$

- ▶ En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Matrius ortogonals

Una matriu $n \times n$ s'anomena **ortogonal** si satisfà $A^t A = I$.

- ▶ Si $u_1, \dots, u_n$ són les columnes de A , $A = (u_1 \dots u_n)$, aleshores,
 - A és ortogonal $\Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ és una b.o.n. pel producte escalar euclidià.
- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.
- ▶ A és ortogonal $\Leftrightarrow AA^t = I$.
- ▶ A és ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$.
- ▶ Si A és ortogonal, aleshores l'endomorfisme corresponent **preserva el producte escalar euclidià**:

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \text{ per tot } u, v$$

- ▶ En particular, A preserva normes, angles $\Rightarrow$ no deforma objectes.

Exemples de matrius 2×2 ortogonals

Aquestes $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ són lineals i preserven norma:

- ▶ $f =$ **simetria** respecte una recta l que conté el 0, $l = [v]$. E.g.
 $f(x, y) = (x, -y)$.
- ▶ $f =$ **gir** d'angle α (en sentit anti-horari) respecte l'origen;
aleshores

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Exemples de matrius 2×2 ortogonals

Aquestes $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ són lineals i preserven norma:

- ▶ $f =$ **simetria** respecte una recta l que conté el 0, $l = [v]$. E.g.
 $f(x, y) = (x, -y)$.
- ▶ $f =$ **gir** d'angle α (en sentit anti-horari) respecte l'origen;
aleshores

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E , aquest algorisme dóna una b.o.n. de F :

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:

2. $v_1 := u_1$

3. $v_2 := u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2]).$

4. $v_3 := u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$
 $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]).$

$\vdots$

5. $v_d := u_d - \frac{\langle v_1, u_d \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dots - \frac{\langle v_{d-1}, u_d \rangle}{\langle v_{d-1}, v_{d-1} \rangle} v_{d-1}.$

6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i

$$[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d].$$

7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F , $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1 / \|v_1\|, w_2 = v_2 / \|v_2\|, \dots, w_d = v_d / \|v_d\|.$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E , aquest algorisme dóna una b.o.n. de F :

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:

2. $v_1 := u_1$

3. $v_2 := u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2]).$

4. $v_3 := u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$
 $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]).$

$\vdots$

5. $v_d := u_d - \frac{\langle v_1, u_d \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dots - \frac{\langle v_{d-1}, u_d \rangle}{\langle v_{d-1}, v_{d-1} \rangle} v_{d-1}.$

6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i

$$[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d].$$

7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F , $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1 / \|v_1\|, w_2 = v_2 / \|v_2\|, \dots, w_d = v_d / \|v_d\|.$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E , aquest algorisme dóna una b.o.n. de F :

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:

2. $v_1 := u_1$

3. $v_2 := u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2]).$

4. $v_3 := u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$
 $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]).$

$\vdots$

5. $v_d := u_d - \frac{\langle v_1, u_d \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dots - \frac{\langle v_{d-1}, u_d \rangle}{\langle v_{d-1}, v_{d-1} \rangle} v_{d-1}.$

6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i

$$[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d].$$

7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F , $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1 / \|v_1\|, w_2 = v_2 / \|v_2\|, \dots, w_d = v_d / \|v_d\|.$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E , aquest algorisme dona una b.o.n. de F :

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:

2. $v_1 := u_1$

3. $v_2 := u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2]).$

4. $v_3 := u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$
 $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]).$

$\vdots$

5. $v_d := u_d - \frac{\langle v_1, u_d \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dots - \frac{\langle v_{d-1}, u_d \rangle}{\langle v_{d-1}, v_{d-1} \rangle} v_{d-1}.$

6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i

$$[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d].$$

7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F , $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1 / \|v_1\|, w_2 = v_2 / \|v_2\|, \dots, w_d = v_d / \|v_d\|.$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E , aquest algorisme dóna una b.o.n. de F :

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:

2. $v_1 := u_1$

3. $v_2 := u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2]).$

4. $v_3 := u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$
 $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]).$

$\vdots$

5. $v_d := u_d - \frac{\langle v_1, u_d \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dots - \frac{\langle v_{d-1}, u_d \rangle}{\langle v_{d-1}, v_{d-1} \rangle} v_{d-1}.$

6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i

$$[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d].$$

7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F , $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1 / \|v_1\|, w_2 = v_2 / \|v_2\|, \dots, w_d = v_d / \|v_d\|.$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E , aquest algorisme dóna una b.o.n. de F :

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:

2. $v_1 := u_1$

3. $v_2 := u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2]).$

4. $v_3 := u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$
 $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]).$

$\vdots$

5. $v_d := u_d - \frac{\langle v_1, u_d \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dots - \frac{\langle v_{d-1}, u_d \rangle}{\langle v_{d-1}, v_{d-1} \rangle} v_{d-1}.$

6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i
 $[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d].$

7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F , $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1 / \|v_1\|, w_2 = v_2 / \|v_2\|, \dots, w_d = v_d / \|v_d\|.$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E , aquest algorisme dóna una b.o.n. de F :

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:

2. $v_1 := u_1$

3. $v_2 := u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2]).$

4. $v_3 := u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$
 $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]).$

$\vdots$

5. $v_d := u_d - \frac{\langle v_1, u_d \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dots - \frac{\langle v_{d-1}, u_d \rangle}{\langle v_{d-1}, v_{d-1} \rangle} v_{d-1}.$

6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i

$$[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d].$$

7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F , $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1 / \|v_1\|, w_2 = v_2 / \|v_2\|, \dots, w_d = v_d / \|v_d\|.$$

Algorisme de Gram-Schmidt

Donat un subespai F d'un e.v. euclidià E , aquest algorisme dóna una b.o.n. de F :

1. Prenem base de F $u_1, \dots, u_d$ qualsevol i definim:

2. $v_1 := u_1$

3. $v_2 := u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\Rightarrow [v_1, v_2] = [u_1, u_2]).$

4. $v_3 := u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$
 $(\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]).$

$\vdots$

5. $v_d := u_d - \frac{\langle v_1, u_d \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \dots - \frac{\langle v_{d-1}, u_d \rangle}{\langle v_{d-1}, v_{d-1} \rangle} v_{d-1}.$

6. Aleshores $v_1, \dots, v_d$ són ortogonals i

$$[v_1, \dots, v_d] = [u_1, \dots, u_d].$$

7. Els normalitzem per obtenir b.o.n. de F , $w_1, \dots, w_d$:

$$w_1 = v_1 / \|v_1\|, w_2 = v_2 / \|v_2\|, \dots, w_d = v_d / \|v_d\|.$$

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Teorema Espectral

Teorema (Teorema Espectral)

*Sigui A una matriu **simètrica** $n \times n$. Aleshores, A té tots els **VAPs reals, diagonalitza**, i existeix una **base ortonormal** $\{v_1, \dots, v_n\}$ de VEPs (en el prod. esc. euclidià); si V té columnes $v_1, \dots, v_n$, i D és la matriu diagonal de VAPS (en l'ordre adequat) llavors A descomposa com*

$$A = VDV^t.$$

La b.o.n de VEPs es pot trobar fàcilment:

- ▶ Si u, v són VEPs e A de VAPS $\lambda \neq \mu$, aleshores $u \perp v$.
- ▶ Si tots els VAPS són de multiplicitat alg. 1, aleshores normalitzant els VEPs obtenim b.o.n.
- ▶ Si no tots els VAPS tenen multiplicitat 1, usem l'algorisme de Gram-Schmidt per cada subespai propi de dimensió > 1 .

Teorema Espectral

Teorema (Teorema Espectral)

*Sigui A una matriu **simètrica** $n \times n$. Aleshores, A té tots els **VAPs reals, diagonalitza**, i existeix una **base ortonormal** $\{v_1, \dots, v_n\}$ de VEPs (en el prod. esc. euclidià); si V té columnes $v_1, \dots, v_n$, i D és la matriu diagonal de VAPS (en l'ordre adequat) llavors A descomposa com*

$$A = VDV^t.$$

La b.o.n de VEPs es pot trobar fàcilment:

- ▶ Si u, v són VEPs e A de VAPS $\lambda \neq \mu$, aleshores $u \perp v$.
- ▶ Si tots els VAPS són de multiplicitat alg. 1, aleshores normalitzant els VEPs obtenim b.o.n.
- ▶ Si no tots els VAPS tenen multiplicitat 1, usem l'algorisme de Gram-Schmidt per cada subespai propi de dimensió > 1 .

Teorema Espectral

Teorema (Teorema Espectral)

*Sigui A una matriu **simètrica** $n \times n$. Aleshores, A té tots els **VAPs reals, diagonalitza**, i existeix una **base ortonormal** $\{v_1, \dots, v_n\}$ de VEPs (en el prod. esc. euclidià); si V té columnes $v_1, \dots, v_n$, i D és la matriu diagonal de VAPS (en l'ordre adequat) llavors A descomposa com*

$$A = VDV^t.$$

La b.o.n de VEPs es pot trobar fàcilment:

- ▶ Si u, v són VEPs e A de VAPS $\lambda \neq \mu$, aleshores $u \perp v$.
- ▶ Si tots els VAPS són de multiplicitat alg. 1, aleshores normalitzant els VEPs obtenim b.o.n.
- ▶ Si no tots els VAPS tenen multiplicitat 1, usem l'algorisme de Gram-Schmidt per cada subespai propi de dimensió > 1 .

Teorema Espectral

Teorema (Teorema Espectral)

*Sigui A una matriu **simètrica** $n \times n$. Aleshores, A té tots els **VAPs reals, diagonalitza**, i existeix una **base ortonormal** $\{v_1, \dots, v_n\}$ de VEPs (en el prod. esc. euclidià); si V té columnes $v_1, \dots, v_n$, i D és la matriu diagonal de VAPS (en l'ordre adequat) llavors A descomposa com*

$$A = VDV^t.$$

La b.o.n de VEPs es pot trobar fàcilment:

- ▶ Si u, v són VEPs e A de VAPS $\lambda \neq \mu$, aleshores $u \perp v$.
- ▶ Si tots els VAPS són de multiplicitat alg. 1, aleshores normalitzant els VEPs obtenim b.o.n.
- ▶ Si no tots els VAPS tenen multiplicitat 1, usem l'algorisme de Gram-Schmidt per cada subespai propi de dimensió > 1 .

Caracterització de productes escalars

Sigui A una matriu simètrica.

- ▶ A és la matriu d'un forma bilineal simètrica
- ▶ A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, tots els VAPs de A són positius.
- ▶ **Criteri de Sylvester:** si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ són els menors principals de A , A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, $\delta_i > 0 \ \forall i$.

Caracterització de productes escalars

Sigui A una matriu simètrica.

- ▶ A és la matriu d'un forma bilineal simètrica
- ▶ A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, tots els VAPs de A són positius.
- ▶ Criteri de Sylvester: si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ són els menors principals de A , A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, $\delta_i > 0 \forall i$.

Caracterització de productes escalars

Sigui A una matriu simètrica.

- ▶ A és la matriu d'un forma bilineal simètrica
- ▶ A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, tots els VAPs de A són positius.
- ▶ **Criteri de Sylvester:** si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ són els menors principals de A , A és la matriu d'un producte escalar si, i només si, $\delta_i > 0 \ \forall i$.

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El **producte vectorial** (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned}$$

Propietats:

- ▶ bilineal
- ▶ $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- ▶ $u \times v$ és ortogonal a u i v
- ▶ $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- ▶ $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- ▶ $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- ▶ Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El **producte vectorial** (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned}$$

Propietats:

- ▶ bilineal
- ▶ $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- ▶ $u \times v$ és ortogonal a u i v
- ▶ $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- ▶ $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- ▶ $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- ▶ Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El **producte vectorial** (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).\end{aligned}$$

Propietats:

- ▶ bilineal
- ▶ $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- ▶ $u \times v$ és ortogonal a u i v
- ▶ $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- ▶ $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- ▶ $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- ▶ Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El **producte vectorial** (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).\end{aligned}$$

Propietats:

- ▶ bilineal
- ▶ $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- ▶ $u \times v$ és ortogonal a u i v
- ▶ $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- ▶ $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- ▶ $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- ▶ Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El **producte vectorial** (cross-product) de dos vectors

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned}$$

Propietats:

- ▶ bilineal
- ▶ $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- ▶ $u \times v$ és ortogonal a u i v
- ▶ $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- ▶ $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- ▶ $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- ▶ Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El **producte vectorial** (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).\end{aligned}$$

Propietats:

- ▶ bilineal
- ▶ $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- ▶ $u \times v$ és ortogonal a u i v
- ▶ $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- ▶ $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- ▶ $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- ▶ Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$

El **producte vectorial** (cross-product) de dos vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és el vector (en base estàndard)

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).\end{aligned}$$

Propietats:

- ▶ bilineal
- ▶ $v \times u = -u \times v$ (anti-commutativa)
- ▶ $u \times v$ és ortogonal a u i v
- ▶ $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$
- ▶ $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$
- ▶ $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linealment dependents
- ▶ Si u, v són ortogonals i unitaris $\Rightarrow u, v, u \times v$ és b.o.n.

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Complement Ortogonal

El **complement ortogonal** d'un subespai F d'un e.v. euclidià E és el subespai

$$F^\perp = \{u \in E \mid u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

Propietats quan E té dimensió finita:

► Si $F = [v_1, \dots, v_d] \Rightarrow F^\perp = \left\{ u \in E \mid \begin{array}{l} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle u, v_d \rangle = 0 \end{array} \right\}$

► $(F^\perp)^\perp = F$, $F \subseteq G \Leftrightarrow G^\perp \subseteq F^\perp$,

► $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

► $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Complement Ortogonal

El **complement ortogonal** d'un subespai F d'un e.v. euclidià E és el subespai

$$F^\perp = \{u \in E \mid u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

Propietats quan E té dimensió finita:

- ▶ Si $F = [v_1, \dots, v_d] \Rightarrow F^\perp = \left\{ u \in E \mid \begin{array}{l} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle u, v_d \rangle = 0 \end{array} \right\}$
- ▶ $(F^\perp)^\perp = F$, $F \subseteq G \Leftrightarrow G^\perp \subseteq F^\perp$,
- ▶ $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- ▶ $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Complement Ortogonal

El **complement ortogonal** d'un subespai F d'un e.v. euclidià E és el subespai

$$F^\perp = \{u \in E \mid u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

Propietats quan E té dimensió finita:

- ▶ Si $F = [v_1, \dots, v_d] \Rightarrow F^\perp = \left\{ u \in E \mid \begin{array}{l} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle u, v_d \rangle = 0 \end{array} \right\}$
- ▶ $(F^\perp)^\perp = F$, $F \subseteq G \Leftrightarrow G^\perp \subseteq F^\perp$,
- ▶ $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- ▶ $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Complement Ortogonal

El **complement ortogonal** d'un subespai F d'un e.v. euclidià E és el subespai

$$F^\perp = \{u \in E \mid u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

Propietats quan E té dimensió finita:

- ▶ Si $F = [v_1, \dots, v_d] \Rightarrow F^\perp = \left\{ u \in E \mid \begin{array}{l} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle u, v_d \rangle = 0 \end{array} \right\}$
- ▶ $(F^\perp)^\perp = F$, $F \subseteq G \Leftrightarrow G^\perp \subseteq F^\perp$,
- ▶ $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- ▶ $F \cap F^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

A $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar euclidià,

- ▶ Si F ve donat per generadors $\Rightarrow$ les equacions de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: els seus coeficients són les coordenades dels generadors.
- ▶ Si F ve donat per equacions $\Rightarrow$ els generadors de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: les seves coordenades són els coeficients de les equacions.

F	$F^\perp$
$[(1, 3, 2), (-2, 1, 8)]$	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + y + 8z = 0 \end{cases}$
$3x - 5y + 2z = 0$	$[(3, -5, 2)]$

- ▶ Si A és una matriu real, aleshores

$$\text{Nuc}(A)^\perp = \text{Im}(A^t).$$

A $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar euclidià,

- ▶ Si F ve donat per generadors $\Rightarrow$ les equacions de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: els seus coeficients són les coordenades dels generadors.
- ▶ Si F ve donat per equacions $\Rightarrow$ els generadors de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: les seves coordenades són els coeficients de les equacions.

F	$F^\perp$
$[(1, 3, 2), (-2, 1, 8)]$	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + y + 8z = 0 \end{cases}$
$3x - 5y + 2z = 0$	$[(3, -5, 2)]$

- ▶ Si A és una matriu real, aleshores

$$\text{Nuc}(A)^\perp = \text{Im}(A^t).$$

A $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar euclidià,

- ▶ Si F ve donat per generadors $\Rightarrow$ les equacions de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: els seus coeficients són les coordenades dels generadors.
- ▶ Si F ve donat per equacions $\Rightarrow$ els generadors de $F^\perp$ s'obtenen fàcilment: les seves coordenades són els coeficients de les equacions.

F	$F^\perp$
$[(1, 3, 2), (-2, 1, 8)]$	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + y + 8z = 0 \end{cases}$
$3x - 5y + 2z = 0$	$[(3, -5, 2)]$

- ▶ Si A és una matriu real, aleshores

$$\text{Nuc}(A)^\perp = \text{Im}(A^t).$$

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n .

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^\perp$ per qualsevol subespai F . És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^\perp$.

- ▶ w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $\text{proj}_F(v)$,
- ▶ w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^\perp$ i es denota per $\text{proj}_{F^\perp}(v)$.
- ▶ Així, $v = \text{proj}_F(v) + \text{proj}_{F^\perp}(v)$ i $\text{proj}_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - \text{proj}_F(v)$ pertany a $F^\perp$.
- ▶ Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^\perp$ té dimensió $n - d$.

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n .

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^\perp$ per qualsevol subespai F . És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^\perp$.

- ▶ w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $\text{proj}_F(v)$,
- ▶ w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^\perp$ i es denota per $\text{proj}_{F^\perp}(v)$.
- ▶ Així, $v = \text{proj}_F(v) + \text{proj}_{F^\perp}(v)$ i $\text{proj}_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - \text{proj}_F(v)$ pertany a $F^\perp$.
- ▶ Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^\perp$ té dimensió $n - d$.

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n .

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^\perp$ per qualsevol subespai F . És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^\perp$.

- ▶ w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $\text{proj}_F(v)$,
- ▶ w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^\perp$ i es denota per $\text{proj}_{F^\perp}(v)$.
- ▶ Així, $v = \text{proj}_F(v) + \text{proj}_{F^\perp}(v)$ i $\text{proj}_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - \text{proj}_F(v)$ pertany a $F^\perp$.
- ▶ Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^\perp$ té dimensió $n - d$.

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n .

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^\perp$ per qualsevol subespai F . És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^\perp$.

- ▶ w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $\text{proj}_F(v)$,
- ▶ w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^\perp$ i es denota per $\text{proj}_{F^\perp}(v)$.
- ▶ Així, $v = \text{proj}_F(v) + \text{proj}_{F^\perp}(v)$ i $\text{proj}_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - \text{proj}_F(v)$ pertany a $F^\perp$.
- ▶ Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^\perp$ té dimensió $n - d$.

Projecció ortogonal

Sigui E un e.v. euclidià de dimensió n .

Teorema (Descomposició Ortogonal)

$E = F \oplus F^\perp$ per qualsevol subespai F . És a dir, tot $v \in E$ s'escriu d'una única manera com $v = w + w'$ on $w \in F$ i $w' \in F^\perp$.

- ▶ w s'anomena la *projecció ortogonal* de v en F i es denota per $\text{proj}_F(v)$,
- ▶ w' s'anomena la *projecció ortogonal* de v en $F^\perp$ i es denota per $\text{proj}_{F^\perp}(v)$.
- ▶ Així, $v = \text{proj}_F(v) + \text{proj}_{F^\perp}(v)$ i $\text{proj}_F(v)$ és l'únic vector de F tal que $v - \text{proj}_F(v)$ pertany a $F^\perp$.
- ▶ Si $F \subseteq E$ té dimensió $d \Rightarrow F^\perp$ té dimensió $n - d$.

Interpretació geomètrica

Proposició

La projecció ortogonal de v en F és el vector de F més proper a v ; és a dir,

$$\|v - \text{proj}_F(v)\| = \min_{w \in F} \{\|v - w\|\}$$

(i coincideix amb $\|\text{proj}_{F^\perp}(v)\|$). La projecció ortogonal $\text{proj}_F(v)$ és la millor aproximació de v en F .

Càlcul de la projecció ortogonal

Proposició

$\text{proj}_F(v)$ és l'únic vector w que satisfà $w \in F$ i $v - w \in F^\perp$. Si F té base $u_1, \dots, u_d$, aleshores $\text{proj}_F(v)$ és l'únic vector w tal que

$$w = c_1 u_1 + \dots + c_d u_d \in F \quad i \quad \begin{cases} \langle u_1, w \rangle = \langle u_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_d, w \rangle = \langle u_d, v \rangle \end{cases}$$

Així, $\text{proj}_F(v)$ és el vector $c_1 u_1 + \dots + c_d u_d$ tal que $c_1, \dots, c_d$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_d, u_1 \rangle & \dots & \langle u_d, u_d \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_d, v \rangle \end{pmatrix}$$

Amb el prod. esc. estàndard, si A és la matriu $\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_d \end{pmatrix}$,
aleshores $c_1, \dots, c_d$ són solució del sistema

$$A^t A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = A^t v.$$

(Si $u_1, \dots, u_d$ són l.i., aleshores $A^t A$ és invertible).

Projecció ortogonal amb base ortogonal

Corollary

Si $\dim F = 1$, $F = [u]$, aleshores $\text{proj}_F(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$.

Proposició

Si $u_1, \dots, u_d$ és una base ortogonal de F i $v \in E$, aleshores

$$\text{proj}_F(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_d \rangle}{\langle u_d, u_d \rangle} u_d.$$

Proposició

Si $u_1, \dots, u_d$ és un b.o.n. de F i $v \in E$, aleshores

$$\text{proj}_F(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_d \rangle u_d.$$

És a dir, les coordenades de $\text{proj}_F(v)$ in la base $u_1, \dots, u_d$ són $\langle v, u_1 \rangle, \dots, \langle v, u_d \rangle$.

Projecció ortogonal amb base ortogonal

Corollary

Si $\dim F = 1$, $F = [u]$, aleshores $\text{proj}_F(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$.

Proposició

Si $u_1, \dots, u_d$ és una base ortogonal de F i $v \in E$, aleshores

$$\text{proj}_F(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_d \rangle}{\langle u_d, u_d \rangle} u_d.$$

Proposició

Si $u_1, \dots, u_d$ és un b.o.n. de F i $v \in E$, aleshores

$$\text{proj}_F(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_d \rangle u_d.$$

És a dir, les coordenades de $\text{proj}_F(v)$ in la base $u_1, \dots, u_d$ són $\langle v, u_1 \rangle, \dots, \langle v, u_d \rangle$.

Projecció ortogonal amb base ortogonal

Corollary

Si $\dim F = 1$, $F = [u]$, aleshores $\text{proj}_F(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$.

Proposició

Si $u_1, \dots, u_d$ és una base ortogonal de F i $v \in E$, aleshores

$$\text{proj}_F(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_d \rangle}{\langle u_d, u_d \rangle} u_d.$$

Proposició

Si $u_1, \dots, u_d$ és un b.o.n. de F i $v \in E$, aleshores

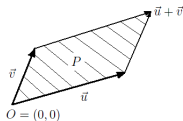
$$\text{proj}_F(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_d \rangle u_d.$$

És a dir, les coordenades de $\text{proj}_F(v)$ in la base $u_1, \dots, u_d$ són $\langle v, u_1 \rangle, \dots, \langle v, u_d \rangle$.

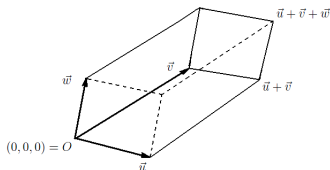
Determinants i volums

De la projecció ortogonal i propietats del producte vectorial podem provar:

- ▶ A $\mathbb{R}^2$, el paral·lelogram determinat per dos vectors u , v té àrea igual a $|\det(u, v)|$.



- ▶ A $\mathbb{R}^3$, el paral·lelepíped determinat per tres vectors u , v , w té volum igual a $|\det(u, v, w)|$.



Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Descomposició en valors singulars (SVD)

Teorema (Descomposició en valors singulars)

*Sigui A una matriu real $m \times n$. Existeix una descomposició $A = U \cdot D \cdot V^t$, on U és $m \times m$, V és $n \times n$, U, V són *ortogonals* i D és la matriu $m \times n$:*

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \sigma_r & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

amb $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ i $r = \text{rank } A$.

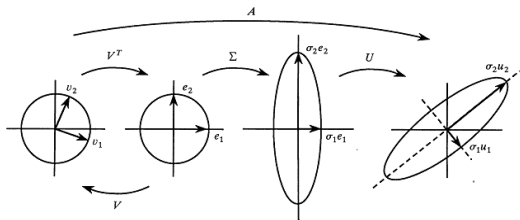
*$\sigma_1, \dots, \sigma_r$ s'anomenen els *valors singulars* de A i estan unívocament determinats per A .*

Interpretació geomètrica de la SVD

Si A és la matriu estàndard una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, i anomenem $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ les columnes de U i V respectivament, aleshores D és la matriu associada a f en b.o.n $v_1, \dots, v_n$ i $u_1, \dots, u_m$:

$$A = M_e(f) = \underbrace{U}_{A_{u \rightarrow e}} * \underbrace{D}_{M_{v,u}(f)} * \underbrace{V^t}_{A_{e \rightarrow v}}$$

(noteu que $V^t = V^{-1} = A_{e \rightarrow v}$).



Com obtenim la SVD?

Els valors singulars venen determinats per A :

$$A = UDV^t \Rightarrow A^t A = VD^t U^t U D V^t = VD^t D V^t$$

però U i V no (però gairebé determinats en la majoria de casos).
Com calculem la SVD?

- (1) Diagonalitzem la matriu simètrica $S = A^t \cdot A$ (Ta. espectral)
- (2) Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ són els VAPs no nuls de $S \Rightarrow$ els **valors singulars** són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (fet: $A^t A$ sempre té VAPs no negatius).
- (3) Les columnes de V són una b.o.n $v_1, \dots, v_n$ de VEPs de S .
- (4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1, \dots, u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r$ són vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$ (que es poden completar a una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$ si cal) i formen les columnes de U .

Com obtenim la SVD?

Els valors singulars venen determinats per A :

$$A = UDV^t \Rightarrow A^t A = VD^t U^t U D V^t = VD^t D V^t$$

però U i V no (però gairebé determinats en la majoria de casos).
Com calculem la SVD?

- (1) Diagonalitzem la matriu simètrica $S = A^t \cdot A$ (Ta. espectral)
- (2) Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ són els VAPs no nuls de $S \Rightarrow$ els **valors singulars** són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (fet: $A^t A$ sempre té VAPs no negatius).
- (3) Les columnes de V són una b.o.n $v_1, \dots, v_n$ de VEPs de S .
- (4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1, \dots, u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r$ són vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$ (que es poden completar a una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$ si cal) i formen les columnes de U .

Com obtenim la SVD?

Els valors singulars venen determinats per A :

$$A = UDV^t \Rightarrow A^t A = VD^t U^t U D V^t = VD^t D V^t$$

però U i V no (però gairebé determinats en la majoria de casos).
Com calculem la SVD?

- (1) Diagonalitzem la matriu simètrica $S = A^t \cdot A$ (Ta. espectral)
- (2) Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ són els VAPs no nuls de $S \Rightarrow$ els **valors singulars** són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (fet: $A^t A$ sempre té VAPs no negatius).
- (3) Les columnes de V són una b.o.n $v_1, \dots, v_n$ de VEPs de S .
- (4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1, \dots, u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r$ són vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$ (que es poden completar a una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$ si cal) i formen les columnes de U .

Com obtenim la SVD?

Els valors singulars venen determinats per A :

$$A = UDV^t \Rightarrow A^t A = VD^t U^t U D V^t = VD^t D V^t$$

però U i V no (però gairebé determinats en la majoria de casos).
Com calculem la SVD?

- (1) Diagonalitzem la matriu simètrica $S = A^t \cdot A$ (Ta. espectral)
- (2) Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ són els VAPs no nuls de $S \Rightarrow$ els **valors singulars** són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (fet: $A^t A$ sempre té VAPs no negatius).
- (3) Les columnes de V són una b.o.n $v_1, \dots, v_n$ de VEPs de S .
- (4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1, \dots, u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r$ són vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$ (que es poden completar a una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$ si cal) i formen les columnes de U .

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(A) \oplus \text{Im}(A^t)$ ($\text{Im}(A^t) = [\text{files de } A]$), $\mathbb{R}^m = \text{Im}(A) \oplus \text{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existeixen b.o.n.'s $v_1, \dots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \dots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\text{Im}(A) = [u_1, \dots, u_r]$
2. $\text{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \dots, v_n]$
3. $\text{Im}(A^t) = [v_1, \dots, v_r]$
4. $\text{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\text{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \dots, v_r$, $u_1, \dots, u_r$ ve donada per la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(A) \oplus \text{Im}(A^t)$ ($\text{Im}(A^t)$ =[files de A]), $\mathbb{R}^m = \text{Im}(A) \oplus \text{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existeixen b.o.n.'s $v_1, \dots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \dots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\text{Im}(A) = [u_1, \dots, u_r]$
2. $\text{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \dots, v_n]$
3. $\text{Im}(A^t) = [v_1, \dots, v_r]$
4. $\text{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\text{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \dots, v_r$, $u_1, \dots, u_r$ ve donada per la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(A) \oplus \text{Im}(A^t)$ ($\text{Im}(A^t)$ =[files de A]), $\mathbb{R}^m = \text{Im}(A) \oplus \text{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existeixen b.o.n.'s $v_1, \dots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \dots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\text{Im}(A) = [u_1, \dots, u_r]$
2. $\text{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \dots, v_n]$
3. $\text{Im}(A^t) = [v_1, \dots, v_r]$
4. $\text{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\text{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \dots, v_r$, $u_1, \dots, u_r$ ve donada per la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(A) \oplus \text{Im}(A^t)$ ($\text{Im}(A^t) = [\text{files de } A]$), $\mathbb{R}^m = \text{Im}(A) \oplus \text{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existeixen b.o.n.'s $v_1, \dots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \dots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\text{Im}(A) = [u_1, \dots, u_r]$
2. $\text{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \dots, v_n]$
3. $\text{Im}(A^t) = [v_1, \dots, v_r]$
4. $\text{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\text{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \dots, v_r$, $u_1, \dots, u_r$ ve donada per la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

El teorema fonamental de l'àlgebra lineal

Sigui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal i A la seva matriu estàndard. Aleshores $\mathbb{R}^n = \text{Nuc}(A) \oplus \text{Im}(A^t)$ ($\text{Im}(A^t) = [\text{files de } A]$), $\mathbb{R}^m = \text{Im}(A) \oplus \text{Nuc}(A^t)$, aquestes descomposicions donen complements ortogonal i existeixen b.o.n.'s $v_1, \dots, v_n$ (de $\mathbb{R}^n$) i $u_1, \dots, u_m$ (de $\mathbb{R}^m$) tals que

1. $\text{Im}(A) = [u_1, \dots, u_r]$
2. $\text{Nuc}(A) = [v_{r+1}, \dots, v_n]$
3. $\text{Im}(A^t) = [v_1, \dots, v_r]$
4. $\text{Nuc}(A^t) = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

A més, la restricció de f al subespai de files $\text{Im}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ i al subespai $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ en les bases $v_1, \dots, v_r$, $u_1, \dots, u_r$ ve donada per la matriu diagonal de valors singulars,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La **norma-2** d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- ▶ És una **norma de matriu**: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
 $\|cA\|_2 = |c|\|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- ▶ $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- ▶ $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \quad \forall v$.
- ▶ $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La **norma-2** d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- ▶ És una **norma de matriu**: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
 $\|cA\|_2 = |c| \|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- ▶ $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- ▶ $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \quad \forall v.$
- ▶ $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2.$

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La **norma-2** d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- ▶ És una **norma de matriu**: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
 $\|cA\|_2 = |c| \|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- ▶ $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- ▶ $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \quad \forall v.$
- ▶ $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2.$

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La **norma-2** d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- ▶ És una **norma de matriu**: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
 $\|cA\|_2 = |c| \|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- ▶ $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- ▶ $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \quad \forall v$.
- ▶ $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La **norma-2** d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- ▶ És una **norma de matriu**: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
 $\|cA\|_2 = |c| \|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- ▶ $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- ▶ $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \quad \forall v$.
- ▶ $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La **norma-2** d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- ▶ És una **norma de matriu**: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
 $\|cA\|_2 = |c| \|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- ▶ $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- ▶ $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \quad \forall v$.
- ▶ $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Norma-2 d'una matriu

Per "mesurar" una aplicació lineal mirem com de gran és la imatge per f de l'esfera unitat:

Definició

La **norma-2** d'una matriu $m \times n$ A és

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propietats

- ▶ És una **norma de matriu**: $\|A\|_2 \geq 0$, $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
 $\|cA\|_2 = |c| \|A\|_2$, $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- ▶ $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- ▶ $\|Av\| \leq \|A\|_2 \|v\| \quad \forall v$.
- ▶ $\|AX\|_2 = \|A\|_2$ si X és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|YA\|_2 = \|A\|_2$ si Y és una matriu ortogonal.
- ▶ $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Conseqüències geomètriques de la SVD:

Proposició

- ▶ $\|A\|_2 = \sigma_1$
- ▶ El màxim s'assoleix en $\pm v_1$: $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.
- ▶ $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| =$

$$\begin{cases} \sigma_n & \text{si } A \text{ té rang } n, \text{ i s'assoleix en } \pm v_n \\ 0 & \text{si } A \text{ té rang } < n \end{cases}$$
- ▶ Si A és invertible, $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.

Conseqüències geomètriques de la SVD:

Proposició

- ▶ $\|A\|_2 = \sigma_1$
- ▶ *El màxim s'assoleix en $\pm v_1$: $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.*
- ▶ $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| =$

$$\begin{cases} \sigma_n & \text{si } A \text{ té rang } n, \text{ i s'assoleix en } \pm v_n \\ 0 & \text{si } A \text{ té rang } < n \end{cases}$$
- ▶ *Si A és invertible, $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.*

Conseqüències geomètriques de la SVD:

Proposició

- ▶ $\|A\|_2 = \sigma_1$
- ▶ *El màxim s'assoleix en $\pm v_1$: $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.*
- ▶ $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| =$

$$\begin{cases} \sigma_n & \text{si } A \text{ té rang } n, \text{ i s'assoleix en } \pm v_n \\ 0 & \text{si } A \text{ té rang } < n \end{cases}$$
- ▶ *Si A és invertible, $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.*

Conseqüències geomètriques de la *SVD*:

Proposició

- ▶ $\|A\|_2 = \sigma_1$
- ▶ *El màxim s'assoleix en $\pm v_1$: $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.*
- ▶ $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| =$

$$\begin{cases} \sigma_n & \text{si } A \text{ té rang } n, \text{ i s'assoleix en } \pm v_n \\ 0 & \text{si } A \text{ té rang } < n \end{cases}$$
- ▶ *Si A és invertible, $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.*

Conseqüències geomètriques de la *SVD*:

Proposició

- ▶ $\|A\|_2 = \sigma_1$
- ▶ *El màxim s'assoleix en $\pm v_1$: $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|Av_1\|$.*
- ▶ $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| =$

$$\begin{cases} \sigma_n & \text{si } A \text{ té rang } n, \text{ i s'assoleix en } \pm v_n \\ 0 & \text{si } A \text{ té rang } < n \end{cases}$$
- ▶ *Si A és invertible, $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}$.*

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

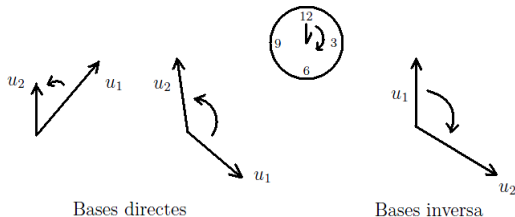
Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Orientació de $\mathbb{R}^2$

Una base u_1, u_2 de $\mathbb{R}^2$ té

- ▶ **orientació directa/positiva** si el gir més curt de u_1 a u_2 és anti-horari.
- ▶ **orientació inversa/negativa** si the el gir més curt de u_1 to u_2 és horari.



Orientacions

A $\mathbb{R}^n$ diem que la base estàndard té orientació directa/positiva.
Per les altres bases:

Definició

Una base $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ té **orientació directa/positiva**, si

$$\det(u_1, u_2, \dots, u_n) > 0$$

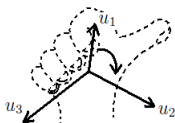
(calculat en coordenades estàndard); altrament, diem que la base té **orientació inversa/negativa**.

Interpretació geomètrica a $\mathbb{R}^3$

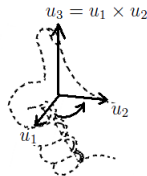
A $\mathbb{R}^3$, per veure si una base u_1, u_2, u_3 té orientació directa usem la *regla de la mà dreta*: posem el polze apuntant a u_3 i si el sentint de tancar la mà és el mateix que el del camí més curt de u_1 a u_2 , aleshores té orientació directa.



base directa



base inversa

El producte vectorial
dóna bases directes

► Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ són l.i. $\Rightarrow u, v, u \times v$ és una base directa,

$$\det(u, v, u \times v) > 0.$$

Isometries

Definició

Un endomorfisme $f \in \text{End}(E)$ és una **isometria** si preserva el producte escalar,

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v.$$

Ex: Si A és una matriu ortogonal, aleshores $x \xrightarrow{f} Ax$ és una isometria.

Proposició

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació lineal, són equivalents:

- ▶ *f és un isometria*
- ▶ *f envia la base estàndard a una b.o.n*
- ▶ *$M_e(f)$ (or en qualsevol b.o.n) és un matriu ortogonal*

Isometries

Definició

Un endomorfisme $f \in \text{End}(E)$ és una **isometria** si preserva el producte escalar,

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v.$$

Ex: Si A és una matriu ortogonal, aleshores $x \xrightarrow{f} Ax$ és una isometria.

Proposició

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació lineal, són equivalents:

- ▶ f és un isometria
- ▶ f envia la base estàndard a una b.o.n
- ▶ $M_e(f)$ (or en qualsevol b.o.n) és un matriu ortogonal

Isometries directes i inverses

Propietats: si f és un isometria, aleshores

- ▶ $\|f(u)\| = \|u\|$, per tot $u \in E$
- ▶ $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ per tot x, y
- ▶ angle entre $f(u)$ i $f(v)$ = angle (no orientat) entre u i v
- ▶ Si F és f -invariant $\Rightarrow F^\perp$ és f -invariant

Remarca: si f és una isometria de $\mathbb{R}^n \Rightarrow \det(f) = \pm 1$ i si λ és un VAP de f , aleshores $|\lambda| = 1$.

- ▶ Si $\det f = +1$ diem que és una **isometria directa** (preserva orientació).
- ▶ Si $\det f = -1$ diem que és una **isometria inversa** (canvia orientació).

Exemples d'isometries de $\mathbb{R}^2$

Les aplicacions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ següents són isometries:

- $f = \text{reflexió/simetria}$ respecte una recta l que conté l'origen, $l = [v]$. Aleshores

$$f(x) = 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\langle v, v \rangle} v - x, \quad M_e(f) = \frac{2}{\langle v, v \rangle} vv^t - Id,$$

i prenent u de $[v]^\perp$ ho podem escriure com:

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u \cdot u^t.$$

- $f = \text{gir anti-horari d'angle } \alpha$ respecte l'origen; aleshores

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

f és una isometria directa.

Exemples d'isometries de $\mathbb{R}^2$

Les aplicacions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ següents són isometries:

- $f = \text{reflexió/simetria}$ respecte una recta l que conté l'origen, $l = [v]$. Aleshores

$$f(x) = 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\langle v, v \rangle} v - x, \quad M_e(f) = \frac{2}{\langle v, v \rangle} vv^t - Id,$$

i prenent u de $[v]^\perp$ ho podem escriure com:

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u \cdot u^t.$$

- $f = \text{gir}$ anti-horari d'angle α respecte l'origen; aleshores

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

f és una isometria directa.

Classificació d'isometries a $\mathbb{R}^2$

Teorema

Si f és una isometria de $\mathbb{R}^2$, aleshores o bé

- ▶ *$\det f = 1$ i f és un gir anti-horari d' angle α respecte el $(0,0)$ i en qualsevol b.o.n directa $\mathbf{u}$,*

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

o

- ▶ *$\det f = -1$ i f és una reflexió/simetria respecte una recta $[v] \ni (0,0)$; si $u \in [v]^\perp \Rightarrow$*

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u \cdot u^t \quad M_{v,u}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Classificació d'isometries a $\mathbb{R}^2$

Teorema

Si f és una isometria de $\mathbb{R}^2$, aleshores o bé

- ▶ *$\det f = 1$ i f és un gir anti-horari d' angle α respecte el $(0,0)$ i en qualsevol b.o.n directa $\mathbf{u}$,*

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

o

- ▶ *$\det f = -1$ i f és una reflexió/simetria respecte una recta $[v] \ni (0,0)$; si $u \in [v]^\perp \Rightarrow$*

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u \cdot u^t \quad M_{v,u}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Classificació d'isometries a $\mathbb{R}^2$

Teorema

Si f és una isometria de $\mathbb{R}^2$, aleshores o bé

- ▶ *$\det f = 1$ i f és un gir anti-horari d' angle α respecte el $(0,0)$ i en qualsevol b.o.n directa $\mathbf{u}$,*

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

o

- ▶ *$\det f = -1$ i f és una reflexió/simetria respecte una recta $[v] \ni (0,0)$; si $u \in [v]^\perp \Rightarrow$*

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u \cdot u^t \quad M_{v,u}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x, y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- ▶ La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- ▶ M és ortogonal $\Rightarrow f$ és un isometria
- ▶ $\det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- ▶ Per trobar l'angle α : segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \alpha = 1/2, \sin \alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- ▶ O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)} \forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos \alpha = \frac{\langle v, f(v) \rangle}{\|v\| \|f(v)\|}$ i si $\det(v, f(v)) > 0$ (resp. $\det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x, y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- ▶ La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- ▶ M és ortogonal $\Rightarrow f$ és un isometria
- ▶ $\det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- ▶ Per trobar l'angle α : segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \alpha = 1/2, \sin \alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- ▶ O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)} \forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos \alpha = \frac{\langle v, f(v) \rangle}{\|v\| \|f(v)\|}$ i si $\det(v, f(v)) > 0$ (resp. $\det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x, y) = (\frac{x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x + y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- ▶ La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- ▶ M és ortogonal $\Rightarrow f$ és un isometria
- ▶ $\det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- ▶ Per trobar l'angle α : segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \alpha = 1/2, \sin \alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- ▶ O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)} \forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos \alpha = \frac{\langle v, f(v) \rangle}{\|v\| \|f(v)\|}$ i si $\det(v, f(v)) > 0$ (resp. $\det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x, y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- ▶ La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- ▶ M és ortogonal $\Rightarrow f$ és un isometria
- ▶ $\det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- ▶ Per trobar l'angle α : segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \alpha = 1/2, \sin \alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- ▶ O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)} \forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos \alpha = \frac{\langle v, f(v) \rangle}{\|v\| \|f(v)\|}$ i si $\det(v, f(v)) > 0$ (resp. $\det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemple de classificació d'isometria

Decidiu si l'aplicació $f(x, y) = (\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2})$ és una isometria i descriviu-la.

- ▶ La matriu estàndard de f és $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- ▶ M és ortogonal $\Rightarrow f$ és un isometria
- ▶ $\det(M) = 1 \Rightarrow f$ és un gir (pel Ta. de Classificació).
- ▶ Per trobar l'angle α : segons el Teorema, M ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \alpha = 1/2, \sin \alpha = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \alpha = \pi/3.$$

- ▶ O també: $\alpha = \widehat{v, f(v)} \forall v \Rightarrow$ prenem qualsevol $v \in \mathbb{R}^2$, calculem $\cos \alpha = \frac{\langle v, f(v) \rangle}{\|v\| \|f(v)\|}$ i si $\det(v, f(v)) > 0$ (resp. $\det(v, f(v)) < 0$) prenem $\alpha \in [0, \pi]$ (resp. $\alpha \in [\pi, 2\pi]$).

Exemples d'isometries a $\mathbb{R}^3$

$f = \text{gir/rotació}$ d'un cert angle respecte una recta
 $r \ni O = (0, 0, 0)$ (r s'anomena *eix de rotació*).

- ▶ Per distingir entre angle θ i $-\theta (= 2\pi - \theta)$ cal *orientar* r :
- ▶ Escollim un vector u de r , *orientem* $r = [u]$ per u usant la regla de la mà dreta: amb el polze en el sentit de u , gir positiu és en el sentit de tancar la mà (mirant des de la fletxa de u , gir anti-horari en el pla $r^\perp$). Aleshores θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui, per qualsevol $v \notin r$,

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) &\geq 0 &\Leftrightarrow \theta &\in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) &\leq 0 &\Leftrightarrow \theta &\in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{1}$$

- ▶ Preserva l'orientació de bases, $\Rightarrow$ és isometria directa ($\det(f) = 1$).

Exemples d'isometries a $\mathbb{R}^3$

$f = \text{gir/rotació}$ d'un cert angle respecte una recta

$r \ni O = (0, 0, 0)$ (r s'anomena *eix de rotació*).

- ▶ Per distingir entre angle θ i $-\theta (= 2\pi - \theta)$ cal *orientar* r :
- ▶ Escollim un vector u de r , **orientem** $r = [u]$ **per** u usant la regla de la mà dreta: amb el polze en el sentit de u , gir positiu és en el sentit de tancar la mà (mirant des de la fletxa de u , gir anti-horari en el pla $r^\perp$). Aleshores θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui, per qualsevol $v \notin r$,

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) &\geq 0 &\Leftrightarrow &\theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) &\leq 0 &\Leftrightarrow &\theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{1}$$

- ▶ Preserva l'orientació de bases, $\Rightarrow$ és isometria directa ($\det(f) = 1$).

Exemples d'isometries a $\mathbb{R}^3$

$f = \text{gir/rotació}$ d'un cert angle respecte una recta
 $r \ni O = (0, 0, 0)$ (r s'anomena *eix de rotació*).

- ▶ Per distingir entre angle θ i $-\theta$ ($= 2\pi - \theta$) cal *orientar* r :
- ▶ Escollim un vector u de r , **orientem** $r = [u]$ per u usant la regla de la mà dreta: amb el polze en el sentit de u , gir positiu és en el sentit de tancar la mà (mirant des de la fletxa de u , gir anti-horari en el pla $r^\perp$). Aleshores θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui, per qualsevol $v \notin r$,

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) &\geq 0 &\Leftrightarrow \theta &\in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) &\leq 0 &\Leftrightarrow \theta &\in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{1}$$

- ▶ Preserva l'orientació de bases, $\Rightarrow$ és isometria directa ($\det(f) = 1$).

Exemple de gir:

$f = \text{gir d'eix } r = [e_3], \text{ orientat per } e_3, \text{ i angle } \pi/3. \text{ Aleshores}$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Matriu d'un gir

f = gir d'eix $r = [u]$ (orientat per u) i angle θ . Prenem b.o.n. positiva $\mathbf{u} = u_1, u_2, u_3$ amb $u_3 = \frac{u}{\|u\|}$ ("b.o.n adaptada"), aleshores

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple: simetria axial

$f = \text{simetria axial}$ respecte una recta $r \ni O$.

- ▶ $f = \text{gir d'angle } \pi \text{ i eix } r \text{ (} \det(f) = 1 \text{)}.$
- ▶ Com $\pi = -\pi$, no necessitem orientació.
- ▶ Ex: trobeu $M_e(f)$ per $f = \text{simetria axial respecte l'eix } z$.

Exemple: simetria axial

$f = \text{simetria axial}$ respecte una recta $r \ni O$.

- ▶ $f = \text{gir d'angle } \pi$ i eix r ($\det(f) = 1$).
- ▶ Com $\pi = -\pi$, no necessitem orientació.
- ▶ Ex: trobeu $M_e(f)$ per $f = \text{simetria axial}$ respecte l'eix z .

Exemple: simetria axial

$f = \text{simetria axial}$ respecte una recta $r \ni O$.

- ▶ $f = \text{gir d'angle } \pi$ i eix r ($\det(f) = 1$).
- ▶ Com $\pi = -\pi$, no necessitem orientació.
- ▶ Ex: trobeu $M_e(f)$ per $f = \text{simetria axial}$ respecte l'eix z .

Exemple: Reflexió especular

$f =$ *reflexió especular/simetria* respecte un pla $H \ni O$.

- ▶ Canvia l'orientació $\Rightarrow \det(f) = -1$.
- ▶ Exemple: si $H = \{z = 0\}$, aleshores $f(x, y, z) = (x, y, -z)$
- ▶ Si $u \in H^\perp$, aleshores

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u \cdot u^t.$$

Exemple: Reflexió especular

$f =$ *reflexió especular/simetria* respecte un pla $H \ni O$.

- ▶ Canvia l'orientació $\Rightarrow \det(f) = -1$.
- ▶ Exemple: si $H = \{z = 0\}$, aleshores $f(x, y, z) = (x, y, -z)$
- ▶ Si $u \in H^\perp$, aleshores

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u \cdot u^t.$$

Exemple: Reflexió especular

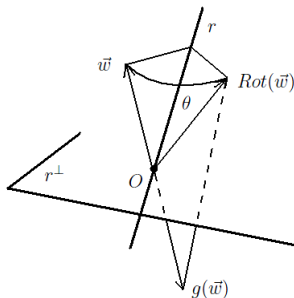
$f =$ *reflexió especular/simetria* respecte un pla $H \ni O$.

- ▶ Canvia l'orientació $\Rightarrow \det(f) = -1$.
- ▶ Exemple: si $H = \{z = 0\}$, aleshores $f(x, y, z) = (x, y, -z)$
- ▶ Si $u \in H^\perp$, aleshores

$$M_e(f) = Id - \frac{2}{\langle u, u \rangle} u \cdot u^t.$$

Exemple: Rotació seguida de reflexió especular

$g = \text{gir } R \text{ amb eix } r = [u] \text{ i angle } \theta \text{ seguida de reflexió especular respecte un pla ortogonal a } r, [u]^\perp.$



Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- ▶ **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ (*isometria directa*): f és un gir d'eix $r = [u] = \text{VEPs de VAP } 1$.
- ▶ **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ (*isometria inversa*): $f = \text{gir } R \text{ d'angle } \theta \text{ i eix } r = [u] (= \text{VEPs de VAP } -1), \text{ seguit de reflexió especular } S \text{ respecte el pla } [u]^\perp, f = S \circ R$.

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- ▶ **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ (*isometria directa*): f és un gir d'eix $r = [u] = \text{VEPs de VAP } 1$.
- ▶ **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ (*isometria inversa*): $f = \text{gir } R \text{ d'angle } \theta \text{ i eix } r = [u] (= \text{VEPs de VAP } -1), \text{ seguit de reflexió especular } S \text{ respecte el pla } [u]^\perp, f = S \circ R$.

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- ▶ **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ (*isometria directa*): f és un gir d'eix $r = [u] = \text{VEPs de VAP } 1$.
- ▶ **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ (*isometria inversa*): $f = \text{gir } R \text{ d'angle } \theta \text{ i eix } r = [u] (= \text{VEPs de VAP } -1)$, seguit de reflexió especular S respecte el pla $[u]^\perp$, $f = S \circ R$.

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- ▶ **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ (*isometria directa*): f és un gir d'eix $r = [u] = \text{VEPs de VAP } 1$.
- ▶ **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ (*isometria inversa*): $f = \text{gir } R \text{ d'angle } \theta \text{ i eix } r = [u] (= \text{VEPs de VAP } -1), \text{ seguit de reflexió especular } S \text{ respecte el pla } [u]^\perp, f = S \circ R$.

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Classificació d' isometries de $\mathbb{R}^3$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és un isometria, aleshores f està en un dels casos següents:

- ▶ **Cas 1.** $\boxed{\det f = +1}$ (*isometria directa*): f és un gir d'eix $r = [u]$ = VEPs de VAP 1.
- ▶ **Cas 2.** $\boxed{\det f = -1}$ (*isometria inversa*): f = gir R d'angle θ i eix $r = [u]$ (=VEPs de VAP -1), seguit de reflexió especular S respecte el pla $[u]^\perp$, $f = S \circ R$.

Tota isometria a $\mathbb{R}^3$ es pot descriure com un d'aquests casos (cas 1 si $\det f = 1$, cas 2 si $\det f = -1$). Important: en el cas 2, el pla de simetria és ortogonal a l'eix de gir.

Cas 1: $\det f = +1$, $f = \text{gir d'eix } r = [u]$.

Orientem l'eix per u de norma 1 i anomenem θ l'angle de gir.

Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = u\}$ és una b.o.n. directa (anomenada **base adaptada a f**), es té

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u]$ = VEPs de VAP 1 = vectors fixos per f .
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)-1}{2}$ i θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) &\geq 0 &\Leftrightarrow &\theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) &\leq 0 &\Leftrightarrow &\theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{2}$$

Cas 1: $\det f = +1$, $f = \text{gir d'eix } r = [u]$.

Orientem l'eix per u de norma 1 i anomenem θ l'angle de gir.

Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = u\}$ és una b.o.n. directa (anomenada **base adaptada a f**), es té

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- ▶ $[u] = \text{VEPs de VAP } 1 = \text{vectors fixos per } f$.
- ▶ $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- ▶ $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)-1}{2}$ i θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) &\geq 0 &\Leftrightarrow &\theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) &\leq 0 &\Leftrightarrow &\theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{2}$$

Cas 1: $\det f = +1$, $f = \text{gir d'eix } r = [u]$.

Orientem l'eix per u de norma 1 i anomenem θ l'angle de gir.

Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = u\}$ és una b.o.n. directa (anomenada **base adaptada a f**), es té

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- ▶ $[u] = \text{VEPs de VAP } 1 = \text{vectors fixos per } f$.
- ▶ $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- ▶ $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)-1}{2}$ i θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{aligned} \det(v, f(v), u) &\geq 0 &\Leftrightarrow &\theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) &\leq 0 &\Leftrightarrow &\theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \tag{2}$$

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, $R =$ gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^\perp$.

► **Case 2.a** $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^\perp$. Es té:

- $[u]$: VEPs de VAP -1
- Imatge d'un vector v :

$$S(v) = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

- Matriu de f :

$$M(S) = \text{Id} - \frac{2}{u^t u} u u^t$$

- H : vectors fixos by f , pla de VEPs de VAP 1.
- $H = [v - f(v)]^\perp$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, $R =$ gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^\perp$.

► **Case 2.a** $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^\perp$. Es té:

► $[u]$: VEPs de VAP -1

► Imatge d'un vector v :

$$S(v) = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

► Matriu de f :

$$M(S) = \text{Id} - \frac{2}{u^t u} u u^t$$

► H : vectors fixos by f , pla de VEPs de VAP 1.

► $H = [v - f(v)]^\perp$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, $R =$ gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^\perp$.

► **Case 2.a** $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^\perp$. Es té:

- $[u]$: VEPs de VAP -1
- Imatge d'un vector v :

$$S(v) = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

► Matriu de f :

$$M(S) = \text{Id} - \frac{2}{u^t u} u u^t$$

- H : vectors fixos by f , pla de VEPs de VAP 1.
- $H = [v - f(v)]^\perp$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, $R =$ gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^\perp$.

► **Case 2.a** $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^\perp$. Es té:

- $[u]$: VEPs de VAP -1
- Imatge d'un vector v :

$$S(v) = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

► Matriu de f :

$$M(S) = \text{Id} - \frac{2}{u^t u} u u^t$$

- H : vectors fixos by f , pla de VEPs de VAP 1.
- $H = [v - f(v)]^\perp$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, $R =$ gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^\perp$.

► **Case 2.a** $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^\perp$. Es té:

- $[u]$: VEPs de VAP -1
- Imatge d'un vector v :

$$S(v) = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

► Matriu de f :

$$M(S) = \text{Id} - \frac{2}{u^t u} u u^t$$

- H : vectors fixos by f , pla de VEPs de VAP 1.
- $H = [v - f(v)]^\perp$ per qualsevol $v \notin H$.

Cas 2: $\det f = -1$, $f = S \circ R$

$f = S \circ R$, $R =$ gir d'angle θ d'eix $r = [u] \ni O$ (orientat per u), S simetria respecte el pla $H = [u]^\perp$.

► **Case 2.a** $\theta = 0$, $f = S =$ simetria respecte pla $H = [u]^\perp$. Es té:

- $[u]$: VEPs de VAP -1
- Imatge d'un vector v :

$$S(v) = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

► Matriu de f :

$$M(S) = \text{Id} - \frac{2}{u^t u} u u^t$$

- H : vectors fixos by f , pla de VEPs de VAP 1.
- $H = [v - f(v)]^\perp$ per qualsevol $v \notin H$.

- **Cas 2.b:** $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u . Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] = \text{VEPs de VAP } -1$.
- H subespai invariant de dimensió 2.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)+1}{2}$
- θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

- **Cas 2.b:** $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u . Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] = \text{VEPs de VAP -1.}$
- H subespai invariant de dimensió 2.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)+1}{2}$
- θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

- **Cas 2.b:** $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u . Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] = \text{VEPs de VAP -1.}$
- H subespai invariant de dimensió 2.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)+1}{2}$
- θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

- **Cas 2.b:** $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u . Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] = \text{VEPs de VAP } -1$.
- H subespai invariant de dimensió 2.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)+1}{2}$
- θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

- **Cas 2.b:** $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u . Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] = \text{VEPs de VAP -1.}$
- H subespai invariant de dimensió 2.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)+1}{2}$
- θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

- **Cas 2.b:** $\theta \neq 0$, $f = S \circ R$. Orientem l'eix de gir per u . Aleshores si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3 = \frac{u}{\|u\|}\}$ és una b.o.n directa (base adaptada a f) i

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de f en qualsevol altra base es pot obtenir per canvi de base.

- $[u] = \text{VEPs de VAP } -1$.
- H subespai invariant de dimensió 2.
- $\theta = \widehat{v, f(v)}$ si v és ortogonal a l'eix $[u]$.
- $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(f)+1}{2}$
- θ pertany a $[0, \pi]$ o $[\pi, 2\pi]$ segons es tingui (per qualsevol $v \notin [u]$):

$$\begin{cases} \det(v, f(v), u) \geq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \\ \det(v, f(v), u) \leq 0 & \Leftrightarrow \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

Exemple

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- ▶ $\det(f) = 1 \Rightarrow f = \text{gir d'eix } [u] \text{ i angle } \theta$.
- ▶ Eix: VEPs de VAP 1, $r = [u = (1, 0, 1)]$.
- ▶ Angle: $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(f) = 5/3 \Rightarrow \cos \theta = 1/3$
- ▶ Orientem r per u , prenem $v = (1, 0, 0) \notin r$,
 $\det(v, f(v), u) = -2/3 < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi], \theta = 2\pi - 1.23$.

Exemple

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- ▶ $\det(f) = 1 \Rightarrow f = \text{gir d'eix } [u] \text{ i angle } \theta$.
- ▶ Eix: VEPs de VAP 1, $r = [u = (1, 0, 1)]$.
- ▶ Angle: $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(f) = 5/3 \Rightarrow \cos \theta = 1/3$
- ▶ Orientem r per u , prenem $v = (1, 0, 0) \notin r$,
 $\det(v, f(v), u) = -2/3 < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi], \theta = 2\pi - 1.23$.

Exemple

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- ▶ $\det(f) = 1 \Rightarrow f = \text{gir d'eix } [u] \text{ i angle } \theta$.
- ▶ Eix: VEPs de VAP 1, $r = [u = (1, 0, 1)]$.
- ▶ Angle: $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(f) = 5/3 \Rightarrow \cos \theta = 1/3$
- ▶ Orientem r per u , prenem $v = (1, 0, 0) \notin r$,
 $\det(v, f(v), u) = -2/3 < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi], \theta = 2\pi - 1.23$.

Exemple

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- ▶ $\det(f) = 1 \Rightarrow f = \text{gir d'eix } [u] \text{ i angle } \theta$.
- ▶ Eix: VEPs de VAP 1, $r = [u = (1, 0, 1)]$.
- ▶ Angle: $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(f) = 5/3 \Rightarrow \cos \theta = 1/3$
- ▶ Orientem r per u , prenem $v = (1, 0, 0) \notin r$,
 $\det(v, f(v), u) = -2/3 < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi], \theta = 2\pi - 1.23$.

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

SVD i aproximació pel rang

Teorema (Eckhart-Young)

Sigui A una matriu. Si $A = UDV^t$ i els valors singulars de A són $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ aleshores per tot $k \leq r$,

$$M = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \sigma_k & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} V^t$$

és la matriu de rang k més propera a A (i.e. $\|A - M\|_2$ és mínima entre les matrius M de rang k). Observem que $\|A - M\|_2 = \sigma_{k+1}$.

S'usa en compressió d'imatges, per exemple, perquè es pot comprimir la informació de A usant:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^t + \sigma_2 u_2 v_2^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t.$$

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Aproximació per mínims quadrats lineals

Problema: $Ax = b$ pot ser incompatible degut a errors en mesures de b , but voldríem una solució aproximada:

$$\begin{array}{ccc} \text{sistema} & & \\ Ax = b & \Leftrightarrow & b \notin \text{Im}(A) \\ \text{incompatible} & & \end{array}$$

Volem $\tilde{x}$ tal que $A\tilde{x}$ sigui el més proper a b possible.

Definició

Una **solució per mínims quadrats** de $Ax = b$ és un vector $\tilde{x}$ que minimitza $\|Ax - b\|$, és a dir

$$\|A\tilde{x} - b\| \leq \|Ax - b\| \text{ per tot } x$$

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- ▶ Canviem b pel vector de $\text{Im}(A)$ més proper a b : la *projecció ortogonal* de b en $\text{Im}(A)$, $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow \tilde{x}$ és solució de $Ax = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- ▶ El residu mesura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b) - b\text{)}.$$

norma del residu: $\|A\tilde{x} - b\|$

- ▶ Important: no ens cal calcular $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- ▶ Canviem b pel vector de $\text{Im}(A)$ més proper a b : la *projecció ortogonal* de b en $\text{Im}(A)$, $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow \tilde{x}$ és solució de $Ax = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- ▶ El *residu* mesura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b) - b).$$

$$\text{norma del residu: } \|A\tilde{x} - b\|$$

- ▶ Important: no ens cal calcular $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- ▶ Canviem b pel vector de $\text{Im}(A)$ més proper a b : la *projecció ortogonal* de b en $\text{Im}(A)$, $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow \tilde{x}$ és solució de $Ax = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- ▶ El residu mesura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b) - b).$$

$$\text{norma del residu: } \|A\tilde{x} - b\|$$

- ▶ Important: no ens cal calcular $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- ▶ Canviem b pel vector de $\text{Im}(A)$ més proper a b : la *projecció ortogonal* de b en $\text{Im}(A)$, $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow \tilde{x}$ és solució de $Ax = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- ▶ El **residu** mesura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b) - b\text{)}.$$

norma del residu: $\|A\tilde{x} - b\|$

- ▶ Important: no ens cal calcular $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Resolució del problema de mínims quadrats lineals

Gauss (1801)

- ▶ Canviem b pel vector de $\text{Im}(A)$ més proper a b : la *projecció ortogonal* de b en $\text{Im}(A)$, $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Aleshores $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b \Leftrightarrow \tilde{x}$ és solució de $Ax = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.
- ▶ Si x és una solució per mínims quadrats aleshores no compleix $Ax - b = \vec{0}$, però minimitza la norma $\|Ax - b\|$
- ▶ El **residu** mesura com de lluny està $\tilde{x}$ de ser solució del sistema:

$$\text{residu} = A\tilde{x} - b \text{ (que és } = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b) - b\text{)}.$$

norma del residu: $\|A\tilde{x} - b\|$

- ▶ Important: no ens cal calcular $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$ (pàgina següent).

Teorema

- ▶ $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ si, i només si, és una solució de les equacions normals:

$$A^t Ax = A^t b.$$

- ▶ Si el rang de A és igual al nombre de columnes, aleshores $A^t A$ és invertible i la solució per mínims quadrats és única i donada per

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

(calcular la inversa no és eficient)

- ▶ Si el sistema original és compatible, $\tilde{x}$ és solució del sistema original.

Teorema

- ▶ $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ si, i només si, és una solució de les *equacions normals*:

$$A^t Ax = A^t b.$$

- ▶ Si el rang de A és igual al nombre de columnes, aleshores $A^t A$ és invertible i la solució per mínims quadrats és única i donada per

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

(calcular la inversa no és eficient)

- ▶ Si el sistema original és compatible, $\tilde{x}$ és solució del sistema original.

Teorema

- ▶ $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ si, i només si, és una solució de les *equacions normals*:

$$A^t Ax = A^t b.$$

- ▶ Si el rang de A és igual al nombre de columnes, aleshores $A^t A$ és invertible i la solució per mínims quadrats és única i donada per

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

(calcular la inversa no és eficient)

- ▶ Si el sistema original és compatible, $\tilde{x}$ és solució del sistema original.

Teorema

- ▶ $\tilde{x}$ és una solució per mínims quadrats de $Ax = b$ si, i només si, és una solució de les *equacions normals*:

$$A^t Ax = A^t b.$$

- ▶ Si el rang de A és igual al nombre de columnes, aleshores $A^t A$ és invertible i la solució per mínims quadrats és única i donada per

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

(calcular la inversa no és eficient)

- ▶ Si el sistema original és compatible, $\tilde{x}$ és solució del sistema original.

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

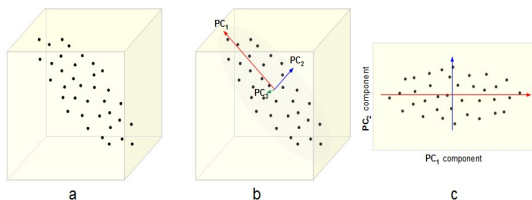
Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Anàlisi de components principals

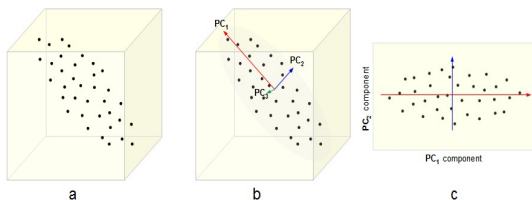
Goal: Donats N punts (dades) de $\mathbb{R}^3$, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$ altament correlacionats, volem trobar $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que el conjunt $\{t_i = ax_i + by_i + cz_i\}_i$ tingui màxima variància:



- Observem que $proj_{[v_1]}(p_i) = t_i v_1$
- $v_1 = (a, b, c)$ s'anomena primera component principal.
- Després podem buscar $v_2 \in [v_1]^\perp$ (2a component principal) que maximitzi la variància de $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$.
- O bé seguim o bé projectem sobre les primeres components principals per tal de reduir la dimensió del problema.

Anàlisi de components principals

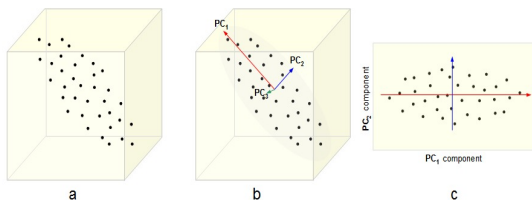
Goal: Donats N punts (dades) de $\mathbb{R}^3$, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$ altament correlacionats, volem trobar $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que el conjunt $\{t_i = ax_i + by_i + cz_i\}_i$ tingui màxima variància:



- Observem que $proj_{[v_1]}(p_i) = t_i v_1$
- $v_1 = (a, b, c)$ s'anomena primera component principal.
- Després podem buscar $v_2 \in [v_1]^\perp$ (2a component principal) que maximitzi la variància de $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$.
- O bé seguim o bé projectem sobre les primeres components principals per tal de reduir la dimensió del problema.

Anàlisi de components principals

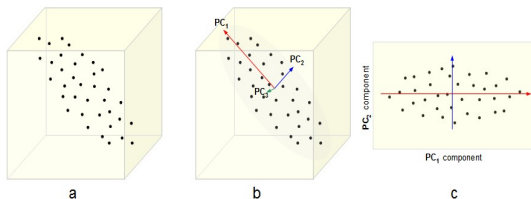
Goal: Donats N punts (dades) de $\mathbb{R}^3$, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$ altament correlacionats, volem trobar $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que el conjunt $\{t_i = ax_i + by_i + cz_i\}_i$ tingui màxima variància:



- ▶ Observem que $proj_{[v_1]}(p_i) = t_i v_1$
- ▶ $v_1 = (a, b, c)$ s'anomena primera component principal.
- ▶ Després podem buscar $v_2 \in [v_1]^\perp$ (2a component principal) que maximitzi la variància de $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$.
- ▶ O bé seguim o bé projectem sobre les primeres components principals per tal de reduir la dimensió del problem.

Anàlisi de components principals

Goal: Donats N punts (dades) de $\mathbb{R}^3$, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$ altament correlacionats, volem trobar $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que el conjunt $\{t_i = ax_i + by_i + cz_i\}_i$ tingui màxima variància:



- Observem que $proj_{[v_1]}(p_i) = t_i v_1$
- $v_1 = (a, b, c)$ s'anomena primera component principal.
- Després podem buscar $v_2 \in [v_1]^\perp$ (2a component principal) que maximitzi la variància de $proj_{[v_1]^\perp}(p_i)$.
- O bé seguim o bé projectem sobre les primeres components principals per tal de reduir la dimensió del problema.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \text{ de manera que } \sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0.$$

- ▶ Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = \|Mv_1\|^2$ sigui màxim.
- ▶ $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- ▶ Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $\text{proj}_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- ▶ $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- ▶ La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- ▶ I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \text{ de manera que } \sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0.$$

- ▶ Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = \|Mv_1\|^2$ sigui màxim.
- ▶ $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- ▶ Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $\text{proj}_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- ▶ $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- ▶ La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- ▶ I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \text{ de manera que } \sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0.$$

- ▶ Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = \|Mv_1\|^2$ sigui màxim.
- ▶ $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- ▶ Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $\text{proj}_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- ▶ $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- ▶ La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- ▶ I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \text{ de manera que } \sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0.$$

- ▶ Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = \|Mv_1\|^2$ sigui màxim.
- ▶ $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- ▶ Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $\text{proj}_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- ▶ $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- ▶ La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- ▶ I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \text{ de manera que } \sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0.$$

- ▶ Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = \|Mv_1\|^2$ sigui màxim.
- ▶ $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- ▶ Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $\text{proj}_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- ▶ $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- ▶ La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- ▶ I prosseguim de la mateixa manera.

Procediment

Assumim que el conjunt $\{p_i\}$ està centrat a l'origen. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \text{ de manera que } \sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0.$$

- ▶ Volem $v_1 = (a, b, c)$ de norma 1 tal que $\sum_i t_i^2 = \sum_i (ax_i + by_i + cz_i)^2 = \|Mv_1\|^2$ sigui màxim.
- ▶ $\Rightarrow v_1 =$ primera columna de V en la SVD: $M = UDV^t$.
- ▶ Aleshores matriu $M_2 = M - Mv_1v_1^t$ té $\text{proj}_{[v_1]^\perp}(p_i)$ a les seves files.
- ▶ $M_2 = \sigma_2 u_2 v_2^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t$.
- ▶ La direcció que maximitza la variància ara és v_2 (2n vector columna de V).
- ▶ I prosseguim de la mateixa manera.

Observacions:

- Si el conjunt $\{p_i\}$ no està centrat a l'origen el podem centrar: sigui $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_i (x_i, y_i, z_i) / N$, i considerem

$$M = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} & z_1 - \bar{z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - \bar{x} & y_N - \bar{y} & z_N - \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Procedim com abans amb aquesta M i aleshores sumem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ al resultat final.

- La matriu $M^t M$ és la matriu de *covariància empírica* i la component principal v_1 és el VEP dominant d'aquesta matriu.
- Per a conjunts de punts de $\mathbb{R}^n$ es pot fer el mateix.

Observacions:

- Si el conjunt $\{p_i\}$ no està centrat a l'origen el podem centrar: sigui $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_i (x_i, y_i, z_i) / N$, i considerem

$$M = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} & z_1 - \bar{z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - \bar{x} & y_N - \bar{y} & z_N - \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Procedim com abans amb aquesta M i aleshores sumem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ al resultat final.

- La matriu $M^t M$ és la matriu de *covariància empírica* i la component principal v_1 és el VEP dominant d'aquesta matriu.
- Per a conjunts de punts de $\mathbb{R}^n$ es pot fer el mateix.

Observacions:

- ▶ Si el conjunt $\{p_i\}$ no està centrat a l'origen el podem centrar: sigui $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_i (x_i, y_i, z_i) / N$, i considerem

$$M = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} & z_1 - \bar{z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N - \bar{x} & y_N - \bar{y} & z_N - \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Procedim com abans amb aquesta M i aleshores sumem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ al resultat final.

- ▶ La matriu $M^t M$ és la matriu de *covariància empírica* i la component principal v_1 és el VEP dominant d'aquesta matriu.
- ▶ Per a conjunts de punts de $\mathbb{R}^n$ es pot fer el mateix.

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Producte escalar a $\mathbb{C}^n$

Definició

A $\mathbb{C}^n$ l'anàleg al producte escalar estàndard és el **producte escalar**

hermític $\langle u, v \rangle$ de dos vectors $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

és

$$\langle u, v \rangle := u^t \bar{v} = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Exemple:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 - 2i \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle u, v \rangle = (1 \ i \ 1 - 2i) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 7i.$$

Producte escalar a $\mathbb{C}^n$

Definició

A $\mathbb{C}^n$ l'anàleg al producte escalar estàndard és el **producte escalar**

hermític $\langle u, v \rangle$ de dos vectors $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

és

$$\langle u, v \rangle := u^t \bar{v} = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Exemple:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 - 2i \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle u, v \rangle = (1 \ i \ 1 - 2i) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 7i.$$

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$ (positiu)
2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":

$$\alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle = \langle \alpha u + \beta u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, v \rangle$$

$$\alpha \langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \alpha \langle u, \lambda v \rangle + \alpha \langle u, \mu w \rangle = \lambda \alpha \langle u, v \rangle + \mu \alpha \langle u, w \rangle$$

5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és
 $\|u\| = \sqrt{u^t \bar{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}.$
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \dots v_d)$ aleshores,

$$A^t \bar{A} = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \dots, v_d\} \text{ és una base ortonormal.}$$

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$ (positiu)
2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
 - ▶ $\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle$;
 - ▶ $\langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = \overline{a_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{a_2} \langle u, v_2 \rangle$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és
 $\|u\| = \sqrt{u^t \bar{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \dots v_d)$ aleshores,
 $A^t \bar{A} = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_d\}$ és una base ortonormal.

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$ (positiu)
2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
 - ▶ $\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle$;
 - ▶ $\langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = \overline{a_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{a_2} \langle u, v_2 \rangle$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és
 $\|u\| = \sqrt{u^t \bar{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \dots v_d)$ aleshores,
 $A^t \bar{A} = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_d\}$ és una base ortonormal.

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$ (positiu)
2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
 - ▶ $\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle;$
 - ▶ $\langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = \overline{a_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{a_2} \langle u, v_2 \rangle.$
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és
 $\|u\| = \sqrt{u^t \bar{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}.$
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \dots v_d)$ aleshores,
 $A^t \bar{A} = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_d\}$ és una base ortonormal.

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$ (positiu)
2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
 - ▶ $\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle$;
 - ▶ $\langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = \overline{a_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{a_2} \langle u, v_2 \rangle$.
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és
 $\|u\| = \sqrt{u^t \bar{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}$.
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \dots v_d)$ aleshores,

$A^t \bar{A} = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_d\}$ és una base ortonormal.

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$ (positiu)
2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
 - ▶ $\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle;$
 - ▶ $\langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = \overline{a_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{a_2} \langle u, v_2 \rangle.$
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és
 $\|u\| = \sqrt{u^t \bar{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}.$
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \dots v_d)$ aleshores,

$A^t \bar{A} = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_d\}$ és una base ortonormal.

Propietats:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$ (positiu)
2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (no-degenerat).
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ("hermític").
4. "sesquilineal":
 - ▶ $\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle;$
 - ▶ $\langle u, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle = \overline{a_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{a_2} \langle u, v_2 \rangle.$
5. En aquest cas, la norma d'un vector $u \in \mathbb{C}^n$ és
 $\|u\| = \sqrt{u^t \overline{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \in \mathbb{R}.$
6. Base ortonormal per aquest producte escalar: definició anàloga.
7. Si escrivim les columnes d'una matriu $A = (v_1 \dots v_d)$ aleshores,

$A^t \overline{A} = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_d\}$ és una base ortonormal.

Matrïus unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu **unitària**.

- Si anomenem les columnes de A $v_1, \dots, v_n$, $A = (v_1 \dots v_n)$, aleshores,

$\overline{A}^t A = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base ortonormal.

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent preserva normes (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Matrïus unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu **unitària**.

- Si anomenem les columnes de A $v_1, \dots, v_n$, $A = (v_1 \dots v_n)$, aleshores,

$\overline{A}^t A = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base ortonormal.

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent **preserva normes** (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Matrius unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu **unitària**.

- ▶ Si anomenem les columnes de A $v_1, \dots, v_n$, $A = (v_1 \dots v_n)$, aleshores,

$\overline{A}^t A = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base ortonormal.

- ▶ A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- ▶ A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- ▶ Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent **preserva normes** (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- ▶ A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Matrïus unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu **unitària**.

- Si anomenem les columnes de A $v_1, \dots, v_n$, $A = (v_1 \dots v_n)$, aleshores,

$\overline{A}^t A = Id$ si i només si $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base ortonormal.

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent **preserva normes** (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Matrïus unitàries

Una matriu $n \times n$ que satisfà $\overline{A}^t A = Id$ s'anomena matriu **unitària**.

- Si anomenem les columnes de A $v_1, \dots, v_n$, $A = (v_1 \dots v_n)$, aleshores,

$$\overline{A}^t A = Id \quad \text{si i només si } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ és una base ortonormal.}$$

- A és unitària si, i només si $A^{-1} = \overline{A}^t$.
- A és unitària $\Rightarrow |\det A| = 1$.
- Si A és unitària, aleshores l'endomorfisme corresponent **preserva normes** (preserva la mesura de vectors):

$$\|Ax\| = \|x\| \text{ per tot } x$$

- A també preserva producte hermític i angles (i ortogonalitat) i per tant és una transformació que no deforma objectes.

Outline

Producte escalar

Matrius simètriques

Producte vectorial

Complement Ortogonal

Projecció ortogonal

Descomposició en valors singulars

Isometries

Aplicacions de SVD i projecció ortogonal

Aproximació pel rang

Mínims quadrats lineals

Anàlisi de components principals

Producte escalar a $\mathbb{C}$

Bibliografia

Bibliografia

Basic:

- ▶ D. Poole, Linear Algebra, A modern introduction (3rd edition), Brooks/Cole, 2011. Chapter 6.

Additional

- ▶ Hernández Rodríguez, E.; Vázquez Gallo, M.J.; Zurro Moro, M.A. Álgebra lineal y geometría [en línea]