Àlgebra lineal i geometria
1. Espais vectorials

Grau en Enginyeria Física

2023-24

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtiques

Marta Casanellas
Universitat Politècnica de Catalunya

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Índex

Índex

L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$

Considerem el conjunt de n-tuples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

i els seus elements els anomenem **vectors**.

Notació: Normalment pensem en $v \in \mathbb{R}^n$ com un vector columna,

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$

Considerem el conjunt de n-tuples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

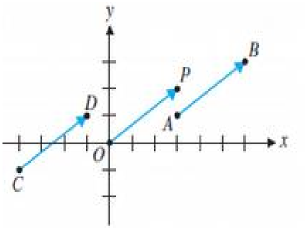
i els seus elements els anomenem **vectors**.

Notació: Normalment pensem en $v \in \mathbb{R}^n$ com un vector columna,

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

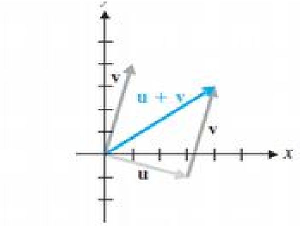
$\mathbb{R}^2$: Interpretació física

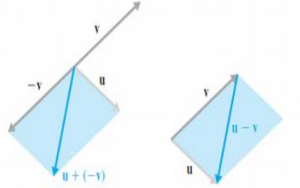
- Pensem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com un segment dirigit entre dos punts A i B, $(x_1, x_2) =$ "vector" $\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AB}$: desplaCcament necessari per anar de A a B: x_1 unitats en l'eix x i x_2 al llarg de l'eix y.
- Dos vectors son iguals si representen el mateix desplaCcament ($\Leftrightarrow$ tenen mateixa longitud, direcció i sentit).
- Sempre podem pensar en (x_1, x_2) com un vector amb punt inicial $(0, 0)$ i final (x_1, x_2).



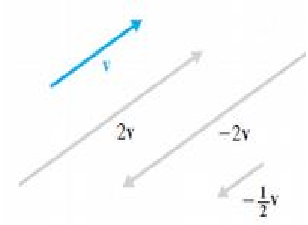
Operacions a $\mathbb{R}^2$

Podem sumar o restar vectors





i multiplicar un vector per una constant (*escalar*)



$\mathbb{R}^3$

- Els vectors de $\mathbb{R}^3$ tenen una interpretació física similar
- Podem sumar vectors i multiplicar-los per escalars. Aquestes operacions es poden fer en coordenades: si $u = (x_1, x_2, x_3)$ i $v = (y_1, y_2, y_3)$, aleshores

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$c \cdot u = (cx_1, cx_2, cx_3) \text{ per tot } c \in \mathbb{R}.$$

Operacions a $\mathbb{R}^n$

A $\mathbb{R}^n$ definim les operacions següents:

- *suma*: si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, aleshores

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- *multiplicació per escalars*: si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), c \in \mathbb{R}$, llavors

$$c \cdot u = (c\, x_1, c\, x_2, \ldots, c\, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Operacions a $\mathbb{R}^n$

A $\mathbb{R}^n$ definim les operacions següents:

- *suma*: si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, aleshores

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- *multiplicació per escalars*: si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), c \in \mathbb{R}$, llavors

$$c \cdot u = (c\, x_1, c\, x_2, \ldots, c\, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, *anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, *anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, *anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, *anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, *anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, *anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, *anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$*, anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$*,* $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Proposició

Aquestes operacions a $\mathbb{R}^n$ satisfan les propietats següents:

1. $u + v = v + u$. *Commutativitat*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$. *Associativitat*
3. $\exists$ *un element* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, *anomenat vector zero, tal que* $u + \mathbf{0} = u$.
4. *Per cada* $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ *un element* $-u \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$. *Distributiva*
6. $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$. *Distributiva*
7. $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$.
8. $1 \cdot u = u$.

Espai vectorial sobre $\mathbb{K}$

Sigui $\mathbb{K}$ un *cos* com $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Un **espai vectorial sobre $\mathbb{K}$** (o **$\mathbb{K}$-e.v.**) és un conjunt E amb dues operacions $+$ i $\cdot$

- $+$ donats $u, v \in E$, el assigna un altre element $u + v$ de E.
- $\cdot$ donat $u \in E$ i un escalar $c \in \mathbb{K}$, els assigna un element $c \cdot u \in E$

que satisfan les propietats de la pàgina anterior, i.e.,

- $+$ és commutativa, associativa, té un element neutre (denotat $\mathbf{0}$ o $\vec{0}$) i tot $u \in E$ té un element oposat respecte la $+$ (denotat $-u$),
- $\cdot$ i $+$ satisfan:

$$c\cdot(u+v) = c\cdot u + c\cdot v,\ \ (c+d)\cdot u = c\cdot u + d\cdot u,\ \ c\cdot(d\cdot u) = (cd)\cdot u,\ \ 1\cdot u = u$$

per qualssevol $u, v \in E$ i $c, d \in \mathbb{K}$.

Els elements d'un $\mathbb{K}$-e.v. s'anomenen **vectors**.

Examples d'espai vectorials

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{K}\}$ és un $\mathbb{K}$-e.v. amb la suma i el producte naturals heredats de $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$=$m \times n$ matrius amb entrades a $\mathbb{R}$ i les operacions naturals de suma de matrius i multiplicació per escalars és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_dx^d \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma usual de polinomis i la multplicació per escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable x i coeficients a } \mathbb{R}\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma de duncions habitual ($f + g$ és la funció $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$) i el producte per escalars ($c \cdot f$ és la funció $(c \cdot f)(x) = cf(x)$).

Examples d'espai vectorials

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ és un $\mathbb{K}$-e.v. amb la suma i el producte naturals heredats de $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$=$m \times n$ matrius amb entrades a $\mathbb{R}$ i les operacions naturals de suma de matrius i multiplicació per escalars és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma usual de polinomis i la multplicació per escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable x i coeficients a } \mathbb{R}\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma de duncions habitual ($f + g$ és la funció $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$) i el producte per escalars ($c \cdot f$ és la funció $(c \cdot f)(x) = cf(x)$).

Examples d'espai vectorials

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ és un $\mathbb{K}$-e.v. amb la suma i el producte naturals heredats de $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$=$m \times n$ matrius amb entrades a $\mathbb{R}$ i les operacions naturals de suma de matrius i multiplicació per escalars és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma usual de polinomis i la multplicació per escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable x i coeficients a } \mathbb{R}\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma de duncions habitual ($f + g$ és la funció $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$) i el producte per escalars ($c \cdot f$ és la funció $(c \cdot f)(x) = cf(x)$).

Examples d'espai vectorials

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ és un $\mathbb{K}$-e.v. amb la suma i el producte naturals heredats de $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$=$m \times n$ matrius amb entrades a $\mathbb{R}$ i les operacions naturals de suma de matrius i multiplicació per escalars és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma usual de polinomis i la multplicació per escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable x i coeficients a } \mathbb{R}\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de funcions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma de duncions habitual ($f + g$ és la funció $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$) i el producte per escalars ($c \cdot f$ és la funció $(c \cdot f)(x) = cf(x)$).

Examples d'espai vectorials

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{K}\}$ és un $\mathbb{K}$-e.v. amb la suma i el producte naturals heredats de $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$=$m \times n$ matrius amb entrades a $\mathbb{R}$ i les operacions naturals de suma de matrius i multiplicació per escalars és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_dx^d \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma usual de polinomis i la multplicació per escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable x i coeficients a } \mathbb{R}\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-e.v. amb la suma de duncions habitual ($f + g$ és la funció $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$) i el producte per escalars ($c \cdot f$ és la funció $(c \cdot f)(x) = cf(x)$).

Propietats

Si E és un $\mathbb{K}$-e.v., aleshores, $\forall u \in E$, $c \in \mathbb{K}$,

(a) $0 \cdot u = \mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0}$,

(b) $(-1) \cdot u = -u$,

(c) $(-c) \cdot u = c \cdot (-u) = -(c \cdot u)$ (i ho denotem per $-cu$),

(d) $c \cdot u = \mathbf{0} \Leftrightarrow c = 0$ o $u = 0$

Nota: Usualment ometem el punt "·"

Propietats

Si E és un $\mathbb{K}$-e.v., aleshores, $\forall u \in E$, $c \in \mathbb{K}$,

(a) $0 \cdot u = \mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0}$,

(b) $(-1) \cdot u = -u$,

(c) $(-c) \cdot u = c \cdot (-u) = -(c \cdot u)$ (i ho denotem per $-cu$),

(d) $c \cdot u = \mathbf{0} \Leftrightarrow c = 0$ o $u = 0$

Nota: Usualment ometem el punt "$\cdot$"

Propietats

Si E és un $\mathbb{K}$-e.v., aleshores, $\forall u \in E$, $c \in \mathbb{K}$,

(a) $0 \cdot u = \mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0}$,

(b) $(-1) \cdot u = -u$,

(c) $(-c) \cdot u = c \cdot (-u) = -(c \cdot u)$ (i ho denotem per $-cu$),

(d) $c \cdot u = \mathbf{0} \Leftrightarrow c = 0$ o $u = 0$

Nota: Usualment ometem el punt "$\cdot$"

Propietats

Si E és un $\mathbb{K}$-e.v., aleshores, $\forall u \in E$, $c \in \mathbb{K}$,

(a) $0 \cdot u = \mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0}$,

(b) $(-1) \cdot u = -u$,

(c) $(-c) \cdot u = c \cdot (-u) = -(c \cdot u)$ (i ho denotem per $-cu$),

(d) $c \cdot u = \mathbf{0} \Leftrightarrow c = 0$ o $u = 0$

Nota: Usualment ometem el punt "$\cdot$"

Combinacions lineals

Definició

Un vector u és una **combinació lineal** de vectors $u_1, \ldots, u_k$ si hi ha escalars $c_1, \ldots, c_k$ tals que $u = c_1 u_1 + \ldots + c_k u_k$ (els escalars c_i s'anomenen **coeficients** de la combinació lineal).

Decidir quan un vector de $\mathbb{K}^n$ és combinació lineal d'una col·lecció de vectors donada és equivalent a resoldre un sistema d'equacions lineals:

Proposició

El sistema $Ax = b$ és compatible si, i només si, b és una combinació lineal de les columnes de A.

Combinacions lineals

Definició

Un vector u és una **combinació lineal** de vectors $u_1, \ldots, u_k$ si hi ha escalars $c_1, \ldots, c_k$ tals que $u = c_1\, u_1 + \ldots + c_k\, u_k$ (els escalars c_i s'anomenen **coeficients** de la combinació lineal).

Decidir quan un vector de $\mathbb{K}^n$ és combinació lineal d'una col·lecció de vectors donada és equivalent a resoldre un sistema d'equacions lineals:

Proposició

El sistema $Ax = b$ és compatible si, i només si, b és una combinació lineal de les columnes de A.

Combinacions lineals

Definició

Un vector u és una **combinació lineal** de vectors $u_1, \ldots, u_k$ si hi ha escalars $c_1, \ldots, c_k$ tals que $u = c_1\, u_1 + \ldots + c_k\, u_k$ (els escalars c_i s'anomenen **coeficients** de la combinació lineal).

Decidir quan un vector de $\mathbb{K}^n$ és combinació lineal d'una col·lecció de vectors donada és equivalent a resoldre un sistema d'equacions lineals:

Proposició

El sistema $Ax = b$ és compatible si, i només si, b és una combinació lineal de les columnes de A.

Índex

Subespais vectorials

Definició

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. Aleshores un subconjunt $V \neq \emptyset$ de E és un **subespai vectorial** si V és un espai vectorial amb $+$ i $\cdot$ heredats de E. Això és equivalent a:

1. Si u i v estan a V, aleshores $u + v$ és de V.
2. Si u està V i c és un escalar, aleshores $c \cdot u$ és de V.

Ex:

- $V = \mathbb{K}^n$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.
- $V = \{\mathbf{0}\}$ és un subespai vectorial (de qualsevol E).
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, 3z = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- $F = \{(a + 2b, 0, b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Notes

- Tot subespai conté vector zero.
- Les propietats 1 i 2 es poden combinar:
  $V \neq \emptyset$ és un subespai $\Leftrightarrow$ per qualssevol $u_1, \ldots, u_k$ in V i $c_1, \ldots, c_k$ de $\mathbb{K}$, la combinació lineal

$$c_1 u_1 + \ldots + c_k u_k$$

  està a V.
  És a dir, els subespais vectorials son tancats respecte combinacions lineals.

Proposició

Sigui $Ax = 0$ un sistema lineal on $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Aleshores, el conjunt de solucions $V = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Notes

- Tot subespai conté vector zero.
- Les propietats 1 i 2 es poden combinar:
  $V \neq \emptyset$ és un subespai $\Leftrightarrow$ per qualssevol $u_1, \ldots, u_k$ in V i $c_1, \ldots, c_k$ de $\mathbb{K}$, la combinació lineal

  $$c_1 u_1 + \ldots + c_k u_k$$

  està a V.
  És a dir, els subespais vectorials son tancats respecte combinacions lineals.

Proposició

Sigui $Ax = 0$ un sistema lineal on $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Aleshores, el conjunt de solucions $V = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Notes

- Tot subespai conté vector zero.
- Les propietats 1 i 2 es poden combinar:
  $V \neq \emptyset$ és un subespai $\Leftrightarrow$ per qualssevol $u_1, \ldots, u_k$ in V i $c_1, \ldots, c_k$ de $\mathbb{K}$, la combinació lineal

  $$c_1 u_1 + \ldots + c_k u_k$$

  està a V.
  És a dir, els subespais vectorials son tancats respecte combinacions lineals.

Proposició

Sigui $Ax = 0$ un sistema lineal on $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Aleshores, el conjunt de solucions $V = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Notes

- Tot subespai conté vector zero.
- Les propietats 1 i 2 es poden combinar:
  $V \neq \emptyset$ és un subespai $\Leftrightarrow$ per qualssevol $u_1, \ldots, u_k$ in V i $c_1, \ldots, c_k$ de $\mathbb{K}$, la combinació lineal

$$c_1 u_1 + \ldots + c_k u_k$$

  està a V.
  És a dir, els subespais vectorials son tancats respecte combinacions lineals.

Proposició

Sigui $Ax = 0$ un sistema lineal on $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Aleshores, el conjunt de solucions $V = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectors de E.

Definició

El conjunt de totes les combinacions lineals de $v_1, v_2, \ldots, v_k$,

$$\{c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

s'anomena **subespai generat per** $v_1, v_2, \ldots, v_k$ i es denota per $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Proposició

$V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ és un subespai vectorial i és el menor subespai que conté $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Diem que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ és un **sistema de generadors de** V.

Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectors de E.

Definició

El conjunt de totes les combinacions lineals de $v_1, v_2, \ldots, v_k$,

$$\{c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

s'anomena **subespai generat per $v_1, v_2, \ldots, v_k$** i es denota per $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Proposició

$V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ és un subespai vectorial i és el menor subespai que conté $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Diem que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ és un **sistema de generadors de V**.

Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectors de E.

Definició

El conjunt de totes les combinacions lineals de $v_1, v_2, \ldots, v_k$,

$$\{c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

s'anomena **subespai generat per $v_1, v_2, \ldots, v_k$** i es denota per $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Proposició

$V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ *és un subespai vectorial i és el menor subespai que conté* $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Diem que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ és un **sistema de generadors de V**.

Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectors de E.

Definició

El conjunt de totes les combinacions lineals de $v_1, v_2, \ldots, v_k$,

$$\{c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

s'anomena **subespai generat per** $v_1, v_2, \ldots, v_k$ i es denota per $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Proposició

$V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ *és un subespai vectorial i és el menor subespai que conté* $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Diem que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ és un **sistema de generadors de** V.

Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectors de E.

Definició

El conjunt de totes les combinacions lineals de $v_1, v_2, \ldots, v_k$,

$$\{c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

s'anomena **subespai generat per $v_1, v_2, \ldots, v_k$** i es denota per $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Proposició

$V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ *és un subespai vectorial i és el menor subespai que conté* $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Diem que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ és un **sistema de generadors de V**.

Exemples:

- $\mathbb{R}^n = [(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)]$.
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, 3z = 0\} \Rightarrow V = [(1, 1, 0)]$.
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\} \Rightarrow V = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$.
- $F = \{(a + 2b, 0, b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0), (2, 0, 1)]$.

Un espai vectorial E és **finitament generat (f.g.)** si es pot generar per un nombre finit collection de vectors.

- $\mathbb{K}^n$ és f.g.
- $\mathbb{R}[x]$ no és f.g.

Exemples:

- $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)]$.
- $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0, 3z=0\} \Rightarrow V = [(1,1,0)]$.
- $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0\} \Rightarrow V = [(1,1,0),(0,0,1)]$.
- $F = \{(a+2b,0,b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0),(2,0,1)]$.

Un espai vectorial E és **finitament generat (f.g.)** si es pot generar per un nombre finit collection de vectors.

- $\mathbb{K}^n$ és f.g.
- $\mathbb{R}[x]$ no és f.g.

Índex

Dependència lineal

Definició

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ són **linealment dependents (l.d.)** si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, com a mínim un $\neq 0$, tal que
$c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$.
En cas contrari diem que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són **linealment independents (l.i.)**.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ tota combinació lineal
$c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$ té per forCca $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Notes:

1. Qualsevol conjunt de vectors que contingui $\mathbf{0}$ són linealment dependents
2. Dos vectors v_1, v_2 són l.d. $\Leftrightarrow$ un és múltiple de l'altre.
3. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in E són l.d. $\Leftrightarrow$ un dels vectors (com a mínim) es pot expressar com a combinació lineal dels altres.
4. Si $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. i $u \notin [v_1, \ldots, v_k] \Rightarrow v_1, \ldots, v_k, u$ són l.i.

Dependència lineal

Definició

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ són **linealment dependents (l.d.)** si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, com a mínim un $\neq 0$, tal que $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$.
En cas contrari diem que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són **linealment independents (l.i.)**.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ tota combinació lineal $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$ té per forCca $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Notes:

1. Qualsevol conjunt de vectors que contingui $\mathbf{0}$ són linealment dependents.
2. Dos vectors v_1, v_2 són l.d. $\Leftrightarrow$ un és múltiple de l'altre.
3. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in E són l.d. $\Leftrightarrow$ un dels vectors (com a mínim) es pot expressar com a combinació lineal dels altres.
4. Si $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. i $v \notin [v_1, \ldots, v_k] \Rightarrow v_1, \ldots, v_k, v$ són l.i.

Dependència lineal

Definició

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ són **linealment dependents (l.d.)** si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, com a mínim un $\neq 0$, tal que $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$.
En cas contrari diem que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són **linealment independents (l.i.)**.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ tota combinació lineal $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$ té per forCca $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Notes:

1. Qualsevol conjunt de vectors que contingui $\mathbf{0}$ són linealment dependents.
2. Dos vectors v_1, v_2 són l.d. $\Leftrightarrow$ un és multiple de l'altre.
3. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in E són l.d. $\Leftrightarrow$ un dels vectors (com a mínim) es pot expressar com a combinació lineal dels altres.
4. Si $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. i $u \notin [v_1, \ldots, v_k] \Rightarrow v_1, \ldots, v_k, u$ són l.i.

Dependència lineal

Definició

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ són **linealment dependents (l.d.)** si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, com a mínim un $\neq 0$, tal que $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$.
En cas contrari diem que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són **linealment independents (l.i.)**.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ tota combinació lineal $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$ té per forCca $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Notes:

1. Qualsevol conjunt de vectors que contingui $\mathbf{0}$ són linealment dependents.
2. Dos vectors v_1, v_2 són l.d. $\Leftrightarrow$ un és multiple de l'altre.
3. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in E són l.d. $\Leftrightarrow$ un dels vectors (com a mínim) es pot expressar com a combinació lineal dels altres.
4. Si $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. i $u \notin [v_1, \ldots, v_k] \Rightarrow v_1, \ldots, v_k, u$ són l.i.

Dependència lineal

Definició

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ són **linealment dependents (l.d.)** si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, com a mínim un $\neq 0$, tal que $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$.
En cas contrari diem que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són **linealment independents (l.i.)**.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ tota combinació lineal
$c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$ té per forCca $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Notes:

1. Qualsevol conjunt de vectors que contingui $\mathbf{0}$ són linealment dependents.
2. Dos vectors v_1, v_2 són l.d. $\Leftrightarrow$ un és multiple de l'altre.
3. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in E són l.d. $\Leftrightarrow$ un dels vectors (com a mínim) es pot expressar com a combinació lineal dels altres.
4. Si $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. i $u \notin [v_1, \ldots, v_k] \Rightarrow v_1, \ldots, v_k, u$ són l.i.

Dependència lineal

Definició

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ són **linealment dependents (l.d.)** si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, com a mínim un $\neq 0$, tal que $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$.
En cas contrari diem que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són **linealment independents (l.i.)**.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ tota combinació lineal $c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$ té per forCca $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Notes:

1. Qualsevol conjunt de vectors que contingui $\mathbf{0}$ són linealment dependents.
2. Dos vectors v_1, v_2 són l.d. $\Leftrightarrow$ un és multiple de l'altre.
3. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in E són l.d. $\Leftrightarrow$ un dels vectors (com a mínim) es pot expressar com a combinació lineal dels altres.
4. Si $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. i $u \notin [v_1, \ldots, v_k] \Rightarrow v_1, \ldots, v_k, u$ són l.i.

Dependència lineal

Definició

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ són **linealment dependents (l.d.)** si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, com a mínim un $\neq 0$, tal que
$c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$.
En cas contrari diem que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són **linealment independents (l.i.)**.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ tota combinació lineal
$c_1\, v_1 + \ldots + c_k\, v_k = \mathbf{0}$ té per forCca $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Notes:

1. Qualsevol conjunt de vectors que contingui $\mathbf{0}$ són linealment dependents.
2. Dos vectors v_1, v_2 són l.d. $\Leftrightarrow$ un és multiple de l'altre.
3. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in E són l.d. $\Leftrightarrow$ un dels vectors (com a mínim) es pot expressar com a combinació lineal dels altres.
4. Si $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. i $u \notin [v_1, \ldots, v_k] \Rightarrow v_1, \ldots, v_k, u$ són l.i.

Base d'un subespai vectorial

Definició

Sigui $V \subset E$ un subespai vectorial. Una col·lecció de vectors $\{v_1, \ldots, v_k\}$ és una **base de V** if

1. $V = [v_1, \ldots, v_k]$ i
2. $\{v_1, \ldots, v_k\}$ són linealment independents.

Ex: $(1,1,0), (0,0,1)$ és una base de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.

Base d'un subespai vectorial

Definició

Sigui $V \subset E$ un subespai vectorial. Una col·lecció de vectors $\{v_1, \dots, v_k\}$ és una **base de V** if

1. $V = [v_1, \dots, v_k]$ i
2. $\{v_1, \dots, v_k\}$ són linealment independents.

Ex: $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ és una base de $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.

Base d'un subespai vectorial

Definició

Sigui $V \subset E$ un subespai vectorial. Una col·lecció de vectors $\{v_1, \ldots, v_k\}$ és una **base de V** if

1. $V = [v_1, \ldots, v_k]$ i
2. $\{v_1, \ldots, v_k\}$ són linealment independents.

Ex: $(1,1,0),(0,0,1)$ és una base de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.

Base estàndard

Hi ha bases **estàndard** (o *naturals*, *canoniques*) d'alguns espais vectorials:

- $\mathbb{K}^n$: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ on $e_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0)$ per $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}$: $\{E_{i,j}\}_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ on $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ té 1 a l'entrada (i,j) i 0's a les altres.
- $\mathbb{R}_d[x]$: $\{1, x, \ldots, x^d\}$

Base estàndard

Hi ha bases **estàndard** (o *naturals*, *canoniques*) d'alguns espais vectorials:

- $\mathbb{K}^n$: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ on $e_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0)$ per $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}$: $\{E_{i,j}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ on $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ té 1 a l'entrada (i, j) i 0's a les altres.
- $\mathbb{R}_d[x]$: $\{1, x, \ldots, x^d\}$

Base estàndard

Hi ha bases **estàndard** (o *naturals*, *canoniques*) d'alguns espais vectorials:

- $\mathbb{K}^n$: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ on $e_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0)$ per $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}$: $\{E_{i,j}\}_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ on $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ té 1 a l'entrada (i,j) i 0's a les altres.
- $\mathbb{R}_d[x]$: $\{1, x, \ldots, x^d\}$

Coordenades

Teorema

Sigui $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Per cada vector $v \in E$, hi ha exactament una manera d'escriure v com a combinació lineal dels vectors de B, i.e, existeixen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tal que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$ i a més, aquests $c_1, \dots, c_n$ són unics.

Definició

Els coeficients $c_1, c_2, \dots, c_n$ s'anomenen les **coordenades de v en la base B**.

Usarem la notació

$$v_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Coordenades

Teorema

Sigui $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Per cada vector $v \in E$, hi ha exactament una manera d'escriure v com a combinació lineal dels vectors de B, i.e, existeixen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tal que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$ i a més, aquests $c_1, \ldots, c_n$ són unics.

Definició

Els coeficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ s'anomenen les **coordenades de v en la base B**.

Usarem la notació

$$v_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Coordenades

Teorema

Sigui $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Per cada vector $v \in E$, hi ha exactament una manera d'escriure v com a combinació lineal dels vectors de B, i.e, existeixen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tal que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$ i a més, aquests $c_1, \ldots, c_n$ són unics.

Definició

Els coeficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ s'anomenen les **coordenades de v en la base B**.

Usarem la notació

$$v_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Coordenades

Teorema

Sigui $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Per cada vector $v \in E$, hi ha exactament una manera d'escriure v com a combinació lineal dels vectors de B, i.e, existeixen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tal que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$ i a més, aquests $c_1, \ldots, c_n$ són unics.

Definició

Els coeficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ s'anomenen les **coordenades de v en la base B**.

Usarem la notació

$$v_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Coordenades

Teorema

Sigui $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E*. Per cada vector* $v \in E$*, hi ha exactament una manera d'escriure* v *com a combinació lineal dels vectors de* B*, i.e, existeixen* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ *tal que* $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$ *i a més, aquests* $c_1, \ldots, c_n$ *són unics.*

Definició

Els coeficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ s'anomenen les **coordenades de v en la base B**.

Usarem la notació

$$v_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Coordenades: de E a $\mathbb{K}^n$

Prendre coordenades de vectors en una base donada preserva les combinacions lineals:
Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de E i $u_1, \ldots, u_k \in E$, aleshores

$$(x_1 u_1 + \ldots + x_k u_k)_B = x_1 (u_1)_B + \ldots + x_k (u_k)_B.$$

En particular,

- $u_1, \ldots, u_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ $(u_1)_B, \ldots, (u_k)_B$ són l.i. a $\mathbb{K}^n$.

Coordenades: de E a $\mathbb{K}^n$

Prendre coordenades de vectors en una base donada preserva les combinacions lineals:
Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de E i $u_1, \ldots, u_k \in E$, aleshores

$$(x_1 u_1 + \ldots + x_k u_k)_B = x_1 (u_1)_B + \ldots + x_k (u_k)_B.$$

En particular,

- $u_1, \ldots, u_k$ són l.i. $\Leftrightarrow (u_1)_B, \ldots, (u_k)_B$ són l.i. a $\mathbb{K}^n$.

Base i dimensió

Proposició

Tot $\mathbb{K}$-e.v. (f.g.) $E \neq \vec{0}$ té una base.

Teorema (Lema de Substitució de Steinitz)

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. f.g. Si $v_1, \ldots, v_m$ són generadors de E i $u_1, \ldots, u_n \in E$ són l.i., aleshores $n \leq m$ i es pot substituir n vectors de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ per $u_1, \ldots, u_n$ de manera que la nova col·lecció de vectors és segueixen sent un sistema de generadors de E.

Corollary (El teorema de la base)

Totes les bases d'un espai vectorial f.g. tenen el mateix nombre d'elements.

Dimensió d'un espai vectorial: $\dim(E) =$ cardinal de qualsevol base de E. Conveni: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Base i dimensió

Proposició

Tot $\mathbb{K}$-e.v. (f.g.) $E \neq \vec{0}$ té una base.

Teorema (Lema de Substitució de Steinitz)

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. f.g. Si $v_1, \ldots, v_m$ són generadors de E i $u_1, \ldots, u_n \in E$ són l.i., aleshores $n \leq m$ i es pot substituir n vectors de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ per $u_1, \ldots, u_n$ de manera que la nova col·lecció de vectors és segueixen sent un sistema de generadors de E.

Corollary (El teorema de la base)

Totes les bases d'un espai vectorial f.g. tenen el mateix nombre d'elements.

Dimensió d'un espai vectorial: $\dim(E) =$ cardinal de qualsevol base de E. Conveni: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Base i dimensió

Proposició

Tot $\mathbb{K}$-e.v. (f.g.) $E \neq \vec{0}$ té una base.

Teorema (Lema de Substitució de Steinitz)

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. f.g. Si $v_1, \ldots, v_m$ són generadors de E i $u_1, \ldots, u_n \in E$ són l.i., aleshores $n \leq m$ i es pot substituir n vectors de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ per $u_1, \ldots, u_n$ de manera que la nova col·lecció de vectors és segueixen sent un sistema de generadors de E.

Corollary (El teorema de la base)

Totes les bases d'un espai vectorial f.g. tenen el mateix nombre d'elements.

Dimensió d'un espai vectorial: $\dim(E) =$ cardinal de qualsevol base de E. Conveni: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Base i dimensió

Proposició

Tot $\mathbb{K}$-e.v. (f.g.) $E \neq \vec{0}$ té una base.

Teorema (Lema de Substitució de Steinitz)

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. f.g. Si $v_1, \dots, v_m$ són generadors de E i $u_1, \dots, u_n \in E$ són l.i., aleshores $n \leq m$ i es pot substituir n vectors de $\{v_1, \dots, v_m\}$ per $u_1, \dots, u_n$ de manera que la nova col·lecció de vectors és segueixen sent un sistema de generadors de E.

Corollary (El teorema de la base)

Totes les bases d'un espai vectorial f.g. tenen el mateix nombre d'elements.

Dimensió d'un espai vectorial: $\dim(E) =$ cardinal de qualsevol base de E. Conveni: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Base i dimensió

Proposició

Tot $\mathbb{K}$-e.v. (f.g.) $E \neq \vec{0}$ té una base.

Teorema (Lema de Substitució de Steinitz)

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. f.g. Si $v_1, \ldots, v_m$ són generadors de E i $u_1, \ldots, u_n \in E$ són l.i., aleshores $n \leq m$ i es pot substituir n vectors de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ per $u_1, \ldots, u_n$ de manera que la nova col·lecció de vectors és segueixen sent un sistema de generadors de E.

Corollary (El teorema de la base)

Totes les bases d'un espai vectorial f.g. tenen el mateix nombre d'elements.

Dimensió d'un espai vectorial: $\dim(E) =$ cardinal de qualsevol base de E. Conveni: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Base i dimensió

Proposició

Tot $\mathbb{K}$-e.v. (f.g.) $E \neq \vec{0}$ té una base.

Teorema (Lema de Substitució de Steinitz)

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. f.g. Si $v_1, \ldots, v_m$ són generadors de E i $u_1, \ldots, u_n \in E$ són l.i., aleshores $n \leq m$ i es pot substituir n vectors de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ per $u_1, \ldots, u_n$ de manera que la nova col·lecció de vectors és segueixen sent un sistema de generadors de E.

Corollary (El teorema de la base)

Totes les bases d'un espai vectorial f.g. tenen el mateix nombre d'elements.

Dimensió d'un espai vectorial: $\dim(E) =$ cardinal de qualsevol base de E. Conveni: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Base i dimensió

Proposició

Tot $\mathbb{K}$*-e.v. (f.g.)* $E \neq \vec{0}$ *té una base.*

Teorema (Lema de Substitució de Steinitz)

Sigui E *un* $\mathbb{K}$*-e.v. f.g. Si* $v_1, \ldots, v_m$ *són generadors de* E *i* $u_1, \ldots, u_n \in E$ *són l.i., aleshores* $n \leq m$ *i es pot substituir* n *vectors de* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *per* $u_1, \ldots, u_n$ *de manera que la nova col·lecció de vectors és segueixen sent un sistema de generadors de* E*.*

Corollary (El teorema de la base)

Totes les bases d'un espai vectorial f.g. tenen el mateix nombre d'elements.

Dimensió d'un espai vectorial: $\dim(E) =$ cardinal de qualsevol base de E. Conveni: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Proposició

Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $n \geq 1$. Aleshores:

1. *Tot sistema de generadors de E té $\geq n$ vectors. A més, conté una base de E.*
2. *Tot conjunt de vectors linealment independents de E conté $\leq n$ vectors. A més, es pot estendre a una base de E (escollint convenientment vectors d'una base de E donada).*
3. *Tot conjunt de n vectors de E linealment independents és una base de E.*
4. *Tot sistema de generadors de E format per n vectors és una base de E.*

Així,

$$\begin{aligned} n &= \text{mínim nombre d'elements en un sistema de generadors de } E \\ &= \text{màxim nombre de vectors l.i. de } E. \end{aligned}$$

Proposició

Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $n \geq 1$. Aleshores:

1. *Tot sistema de generadors de E té $\geq n$ vectors. A més, conté una base de E.*
2. *Tot conjunt de vectors linealment independents de E conté $\leq n$ vectors. A més, es pot estendre a una base de E (escollint convenientment vectors d'una base de E donada).*
3. *Tot conjunt de n vectors de E linealment independents és una base de E.*
4. *Tot sistema de generadors de E format per n vectors és una base de E.*

Així,

$$n = \text{mínim nombre d'elements en un sistema de generadors de } E$$
$$= \text{màxim nombre de vectors l.i. de } E.$$

Proposició

Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $n \geq 1$. Aleshores:

1. *Tot sistema de generadors de E té $\geq n$ vectors. A més, conté una base de E.*
2. *Tot conjunt de vectors linealment independents de E conté $\leq n$ vectors. A més, es pot estendre a una base de E (escollint convenientment vectors d'una base de E donada).*
3. *Tot conjunt de n vectors de E linealment independents és una base de E.*
4. *Tot sistema de generadors de E format per n vectors és una base de E.*

Així,

$$n = \text{mínim nombre d'elements en un sistema de generadors de } E$$
$$= \text{màxim nombre de vectors l.i. de } E.$$

Proposició

Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $n \geq 1$. Aleshores:

1. *Tot sistema de generadors de E té $\geq n$ vectors. A més, conté una base de E.*
2. *Tot conjunt de vectors linealment independents de E conté $\leq n$ vectors. A més, es pot estendre a una base de E (escollint convenientment vectors d'una base de E donada).*
3. *Tot conjunt de n vectors de E linealment independents és una base de E.*
4. *Tot sistema de generadors de E format per n vectors és una base de E.*

Així,

$$n = \text{mínim nombre d'elements en un sistema de generadors de } E$$
$$= \text{màxim nombre de vectors l.i. de } E.$$

Proposició

Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $n \geq 1$. Aleshores:

1. *Tot sistema de generadors de E té $\geq n$ vectors. A més, conté una base de E.*
2. *Tot conjunt de vectors linealment independents de E conté $\leq n$ vectors. A més, es pot estendre a una base de E (escollint convenientment vectors d'una base de E donada).*
3. *Tot conjunt de n vectors de E linealment independents és una base de E.*
4. *Tot sistema de generadors de E format per n vectors és una base de E.*

Així,

$$\begin{aligned} n &= \text{mínim nombre d'elements en un sistema de generadors de } E \\ &= \text{màxim nombre de vectors l.i. de } E. \end{aligned}$$

Proposició

Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $n \geq 1$. Aleshores:

1. *Tot sistema de generadors de E té $\geq n$ vectors. A més, conté una base de E.*
2. *Tot conjunt de vectors linealment independents de E conté $\leq n$ vectors. A més, es pot estendre a una base de E (escollint convenientment vectors d'una base de E donada).*
3. *Tot conjunt de n vectors de E linealment independents és una base de E.*
4. *Tot sistema de generadors de E format per n vectors és una base de E.*

Així,

$$n = \text{mínim nombre d'elements en un sistema de generadors de } E$$
$$= \text{màxim nombre de vectors l.i. de } E.$$

Proposició

Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $n \geq 1$. Aleshores:

1. *Tot sistema de generadors de E té $\geq n$ vectors. A més, conté una base de E.*
2. *Tot conjunt de vectors linealment independents de E conté $\leq n$ vectors. A més, es pot estendre a una base de E (escollint convenientment vectors d'una base de E donada).*
3. *Tot conjunt de n vectors de E linealment independents és una base de E.*
4. *Tot sistema de generadors de E format per n vectors és una base de E.*

Així,

$$\begin{aligned} n &= \text{mínim nombre d'elements en un sistema de generadors de } E \\ &= \text{màxim nombre de vectors l.i. de } E. \end{aligned}$$

Teorema

Siguin $V_1 \subset V_2$ *subespais de* E *i* $\dim(E) = n$. *Aleshores:*

1. $dim V_1 \leq dim V_2 \leq n$.
2. $dim V_1 = dim V_2$ *si, i només si,* $V_1 = V_2$.

Teorema

Siguin $V_1 \subset V_2$ *subespais de* E *i* $\dim(E) = n$. *Aleshores:*

1. $dim V_1 \leq dim V_2 \leq n$.
2. $dim V_1 = dim V_2$ *si, i només si,* $V_1 = V_2$.

Teorema

Siguin $V_1 \subset V_2$ *subespais de* E *i* $\dim(E) = n$. *Aleshores:*

1. $dim V_1 \leq dim V_2 \leq n$.
2. $dim V_1 = dim V_2$ *si, i només si,* $V_1 = V_2$.

Rang (revisat)

Teorema

Donats $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$, *si* $A = (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$, *llavors*

a) $v_1, v_2, \dots, v_k$ *són l.d.* $\Leftrightarrow$ *el sistema homogeni* $Ax = 0$ *té solucions no trivials (sistema indeterminat).*

b) $v_1, v_2, \dots, v_k$ *són l.i.* $\Leftrightarrow$ $rang(A) = k$.

c) $v_1, v_2, \dots, v_k$ *són un sistema de generadors de* $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $rang(A) = n$.

d) $v_1, v_2, \dots, v_k$ *és una base de* $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $k = n$ *i* $rang(A) = n$.

Proposició

El **rang** *d'una matriu A coincideix amb:*

Rang (revisat)

Teorema

Donats $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$, *si* $A = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$, *llavors*

a) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *són l.d.* $\Leftrightarrow$ *el sistema homogeni* $Ax = 0$ *té solucions no trivials (sistema indeterminat).*

b) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *són l.i.* $\Leftrightarrow$ $rang(A) = k$.

c) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *són un sistema de generadors de* $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $rang(A) = n$.

d) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *és una base de* $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $k = n$ *i* $rang(A) = n$.

Proposició

El ***rang*** *d'una matriu A coincideix amb:*

Rang (revisat)

Teorema

Donats $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$, si $A = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$, llavors

a) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *són l.d.* $\Leftrightarrow$ *el sistema homogeni $Ax = 0$ té solucions no trivials (sistema indeterminat).*

b) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *són l.i.* $\Leftrightarrow$ $rang(A) = k$.

c) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *són un sistema de generadors de* $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow rang(A) = n$.

d) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *és una base de* $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow k = n$ *i* $rang(A) = n$.

Proposició

El **rang** *d'una matriu A coincideix amb:*

- *la dimensió del subespai generat per les files A (max. nombre de files l.i.) i*
- *la dimensió del subespai generat per les columnes de A (max. nombre de columnes l.i.).*

Rang (revisat)

Teorema

Donats $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$, si $A = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$, llavors

a) *$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.d. $\Leftrightarrow$ el sistema homogeni $Ax = 0$ té solucions no trivials (sistema indeterminat).*

b) *$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són l.i. $\Leftrightarrow$ $rang(A) = k$.*

c) *$v_1, v_2, \ldots, v_k$ són un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $rang(A) = n$.*

d) *$v_1, v_2, \ldots, v_k$ és una base de $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $k = n$ i $rang(A) = n$.*

Proposició

El **rang** *d'una matriu A coincideix amb:*

- *la dimensió del subespai generat per les files A (max. nombre de files l.i.) i*
- *la dimensió del subespai generat per les columnes de A (max. nombre de columnes l.i.).*

Rang (revisat)

Teorema

Donats $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$, *si* $A = (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$, *llavors*

a) $v_1, v_2, \dots, v_k$ *són l.d.* $\Leftrightarrow$ *el sistema homogeni* $Ax = 0$ *té solucions no trivials (sistema indeterminat).*

b) $v_1, v_2, \dots, v_k$ *són l.i.* $\Leftrightarrow rang(A) = k$.

c) $v_1, v_2, \dots, v_k$ *són un sistema de generadors de* $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow rang(A) = n$.

d) $v_1, v_2, \dots, v_k$ *és una base de* $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow k = n$ *i* $rang(A) = n$.

Proposició

El **rang** *d'una matriu A coincideix amb:*

- *la dimensió del subespai generat per les files A (max. nombre de files l.i.) i*
- *la dimensió del subespai generat per les columnes de A (max. nombre de columnes l.i.).*

$\mathbb{K}^n$: Trobar base a partir de generadors

Si $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k] \subset \mathbb{K}^n$, aleshores una base de V es pot obtenir d'una d'aquestes maneres:

1. Posar els vectors $v_1, \ldots, v_k$ com a files d'una matriu A, i reduir A a forma esglaonada $\bar{A}$ (fent Gauss). Les files no nul·les de $\bar{A}$ són una base de V.
2. Escriure els vectors $v_1, \ldots, v_k$ com a columnes d'una matriu B i reduir B a forma esglaonada $\bar{B}$ (fent Gauss). Les columnes de $\bar{B}$ que tenen pivots indiquen quins vectors $v_1, \ldots, v_k$ s'han d'escollir per tenir una base de V.

$\mathbb{K}^n$: Trobar base a partir de generadors

Si $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k] \subset \mathbb{K}^n$, aleshores una base de V es pot obtenir d'una d'aquestes maneres:

1. Posar els vectors $v_1, \ldots, v_k$ com a files d'una matriu A, i reduir A a forma esglaonada $\bar{A}$ (fent Gauss). Les files no nul·les de $\bar{A}$ són una base de V.
2. Escriure els vectors $v_1, \ldots, v_k$ com a columnes d'una matriu B i reduir B a forma esglaonada $\bar{B}$ (fent Gauss). Les columnes de $\bar{B}$ que tenen pivots indiquen quins vectors $v_1, \ldots, v_k$ s'han d'escollir per tenir una base de V.

Estendre a una base de $\mathbb{K}^n$

Si $u_1, \dots, u_k$ són vectors l.i. de $\mathbb{K}^n$, es poden estendre a una base de $\mathbb{K}^n$:

- Posem els vectors $u_1, \dots, u_k$ com a columnes d'una matriu B i considerem $M = (B \mid I_n)$.
- Reduïm M a forma esglaonada $\bar{M} = (\bar{B} \mid \bar{I}_n)$ (fent Gauss).
- Mirem les columnes de $\bar{I}_n$ que tneen pivot i escollim els vectors corresponents de la base estàndard (columnes de I_n) de $\mathbb{K}^n$.
- $u_1, \dots, u_k$ junt amb aquests últims vectors formen una base de $\mathbb{K}^n$.

Es pot fer el mateix si $u_1, \dots, u_k$ són vectors l.i. d'un subespai vectorial V:
en lloc de I_n, considerem una matriu que tingui per columnes una base $v_1, \dots, v_d$ de V i fem el mateix procés de dalt per $M = (u_1, \dots, u_k | v_1, \dots, v_d)$.

Estendre a una base de $\mathbb{K}^n$

Si $u_1, \ldots, u_k$ són vectors l.i. de $\mathbb{K}^n$, es poden estendre a una base de $\mathbb{K}^n$:

- Posem els vectors $u_1, \ldots, u_k$ com a columnes d'una matriu B i considerem $M = (B \mid I_n)$.
- Reduïm M a forma esglaonada $\bar{M} = (\bar{B} \mid \bar{I}_n)$ (fent Gauss).
- Mirem les columnes de $\bar{I}_n$ que tneen pivot i escollim els vectors corresponents de la base estàndard (columnes de I_n) de $\mathbb{K}^n$.
- $u_1, \ldots, u_k$ junt amb aquests últims vectors formen una base de $\mathbb{K}^n$.

Es pot fer el mateix si $u_1, \ldots, u_k$ són vectors l.i. d'un subespai vectorial V:
en lloc de I_n, considerem una matriu que tingui per columnes una base $v_1, \ldots, v_d$ de V i fem el mateix procés de dalt per $M = (u_1, \ldots, u_k | v_1, \ldots, v_d)$.

Subespais de $\mathbb{K}^n$: Generadors $\leftrightarrow$ Equacions

De "generadors" a "equacions":
Si $V = [v_1, \ldots, v_k] \subset \mathbb{K}^n$:
Prenem $M = (v_1, \ldots, v_k)$, i formem una matriu ampliada $(M|x)$ amb $x =$ columna amb entrades $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Aleshores $x \in [v_1, \ldots, v_k]$ si, i només si $rank(M|x) = rank(M)$.
Tenim 2 opcions:

- Reduir M a forma esglaonada $(\bar{M}|\bar{x})$ fent Gauss $\Rightarrow$ un sistema lineal d'equacions per V s'obté escrivint les equacions que corresponen a les files nul·les de $\bar{M}$.
- Si $rank(M) = k$, les equacions venen donades per l'anul·lació dels menors $(k+1) \times (k+1)$ de $(M|x)$ que contenen un submenor $k \times k$ no nul pre-escollit de M.

Subespais de $\mathbb{K}^n$: Generadors $\leftrightarrow$ Equacions

De "generadors" a "equacions":

Si $V = [v_1, \dots, v_k] \subset \mathbb{K}^n$:

Prenem $M = (v_1, \dots, v_k)$, i formem una matriu ampliada $(M|x)$ amb $x =$ columna amb entrades $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Aleshores $x \in [v_1, \dots, v_k]$ si, i només si $rank(M|x) = rank(M)$.

Tenim 2 opcions:

- Reduir M a forma esglaonada $(\bar{M}|\bar{x})$ fent Gauss $\Rightarrow$ un sistema lineal d'equacions per V s'obté escrivint les equacions que corresponen a les files nul·les de $\bar{M}$.
- Si $rank(M) = k$, les equacions venen donades per l'anul·lació dels menors $(k+1) \times (k+1)$ de $(M|x)$ que contenen un submenor $k \times k$ no nul pre-escollit de M.

Subespais de $\mathbb{K}^n$: Generadors $\leftrightarrow$ Equacions

D' "equacions" a "generadors":

Si $V = \{u \in \mathbb{K}^n \mid Au = 0\}$ (solucions d'un sistema homogeni):

- És suficient resoldre el sistema per obtenir un sistema de generadors de V.
- A més, si donem valors 0's i 1's a les variables lliures, aquests generadors formen una base i $dim(V) = n - rang(A)$.

Hem demostrat:

Corol·lari

Un subconjunt V de $\mathbb{K}^n$ és un subespai $\Leftrightarrow$ és el conjunt de solucions d'un sistema homogeni.

Subespais de $\mathbb{K}^n$: Generadors $\leftrightarrow$ Equacions

D' "equacions" a "generadors":

Si $V = \{u \in \mathbb{K}^n \mid Au = 0\}$ (solucions d'un sistema homogeni):

- És suficient resoldre el sistema per obtenir un sistema de generadors de V.
- A més, si donem valors 0's i 1's a les variables lliures, aquests generadors formen una base i $dim(V) = n - rang(A)$.

Hem demostrat:

Corol·lari

Un subconjunt V de $\mathbb{K}^n$ és un subespai $\Leftrightarrow$ és el conjunt de solucions d'un sistema homogeni.

Índex

Canvi de base

Siguin $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ i $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ dues bases de E. Denotem per $A_{B\to C}$ matriu $n \times n$ que té per columnes són les coordendades $(u_1)_C, \dots, (u_n)_C$ dels vectors de B en base C. S'anomena **matriu de canvi de base de B a C**:

$$A_{B\to C} = \begin{pmatrix} (u_1)_C & \dots & (u_n)_C \end{pmatrix}.$$

Proposició

Propietats:

1. $A_{B\to C} w_B = w_C$ *per tot* $w \in E$.
2. $A_{B\to C}$ *és invertible, i* $(A_{B\to C})^{-1} = A_{C\to B}$.
3. *Si* D *és una altra base de* E*, aleshores* $A_{C\to D} A_{B\to C} = A_{B\to D}$.

Canvi de base

Siguin $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dues bases de E. Denotem per $A_{B\to C}$ matriu $n \times n$ que té per columnes són les coordendades $(u_1)_C, \ldots, (u_n)_C$ dels vectors de B en base C. S'anomena **matriu de canvi de base de B a C**:

$$A_{B\to C} = \begin{pmatrix} (u_1)_C & \ldots & (u_n)_C \end{pmatrix}.$$

Proposició

Propietats:

1. $A_{B\to C} w_B = w_C$ *per tot* $w \in E$.
2. $A_{B\to C}$ *és invertible, i* $(A_{B\to C})^{-1} = A_{C\to B}$.
3. *Si* D *és una altra base de* E, *aleshores* $A_{C\to D} A_{B\to C} = A_{B\to D}$.

Canvi de base

Siguin $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ i $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ dues bases de E. Denotem per $A_{B\to C}$ matriu $n \times n$ que té per columnes són les coordendades $(u_1)_C, \dots, (u_n)_C$ dels vectors de B en base C. S'anomena **matriu de canvi de base de B a C**:

$$A_{B\to C} = \begin{pmatrix} (u_1)_C & \dots & (u_n)_C \end{pmatrix}.$$

Proposició

Propietats:

1. $A_{B\to C} w_B = w_C$ *per tot* $w \in E$.
2. $A_{B\to C}$ *és invertible, i* $(A_{B\to C})^{-1} = A_{C\to B}$.
3. *Si* D *és una altra base de* E*, aleshores* $A_{C\to D} A_{B\to C} = A_{B\to D}$.

Canvi de base

Siguin $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ i $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ dues bases de E. Denotem per $A_{B\to C}$ matriu $n \times n$ que té per columnes són les coordendades $(u_1)_C, \dots, (u_n)_C$ dels vectors de B en base C. S'anomena **matriu de canvi de base de B a C**:

$$A_{B\to C} = \begin{pmatrix} (u_1)_C & \dots & (u_n)_C \end{pmatrix}.$$

Proposició

Propietats:

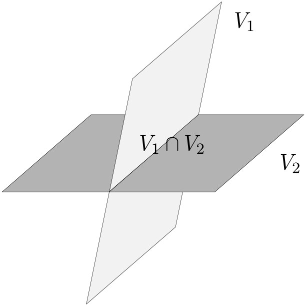
1. $A_{B\to C} w_B = w_C$ *per tot* $w \in E$.
2. $A_{B\to C}$ *és invertible, i* $(A_{B\to C})^{-1} = A_{C\to B}$.
3. *Si* D *és una altra base de* E*, aleshores* $A_{C\to D} A_{B\to C} = A_{B\to D}$.

Índex

Intersecció i suma de subespais

Donats V_1, V_2 subespais vectorials E, definim

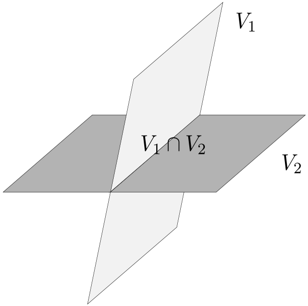
1. La **intersecció de V_1 i V_2** és
$V_1 \cap V_2 = \{v \in E \mid v \in V_1, v \in V_2\}$.
2. La **suma de V_1 i V_2** és
$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \in E \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
Càlcul: Si $V_1 = [u_1, \dots, u_r]$ i $V_2 = [v_1, \dots, v_s]$, aleshores
$V_1 + V_2 = [u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s]$.



Intersecció i suma de subespais

Donats V_1, V_2 subespais vectorials E, definim

1. La **intersecció de V_1 i V_2** és
   $V_1 \cap V_2 = \{v \in E \mid v \in V_1, v \in V_2\}$.
2. La **suma de V_1 i V_2** és
   $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \in E \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
   Càlcul: Si $V_1 = [u_1, \ldots, u_r]$ i $V_2 = [v_1, \ldots, v_s]$, aleshores
   $V_1 + V_2 = [u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s]$.



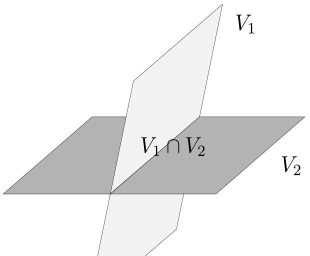
Teorema

1. *$V_1 \cap V_2$ i $V_1 + V_2$ són subespais vectorials de E.*
2. *Fórmula de Grassmann: si* $\dim(E) < \infty$, *aleshores*

$$dim(V_1 \cap V_2) + dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2).$$

Ex:

$$V_1 = [(1,0,1),(0,2,3)] \qquad V_1 \cap V_2 = [(1,0,1)]$$
$$V_2 = [(0,1,0),(1,1,1)] \qquad V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$$



Suma directa

Definició

E és **suma directa** de subspais F_1 i F_2 si tot $w \in E$ es pot escriure d'una **única manera** com $w = v_1 + v_2$ amb $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$.
En aquest cas usem la notació $E = F_1 \oplus F_2$.

Proposició

Siguin F_1, F_2 dos subespais de E. Aleshores $E = F_1 \oplus F_2$ si, i només si, es té:

$$E = F_1 + F_2 \quad i$$

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

Si $E = F_1 \oplus F_2$, direm que F_2 és un **subespai complementari** de F_1 (i vice-versa).

Suma directa

Definició

E és **suma directa** de subspais F_1 i F_2 si tot $w \in E$ es pot escriure d'una **única manera** com $w = v_1 + v_2$ amb $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$.
En aquest cas usem la notació $E = F_1 \oplus F_2$.

Proposició

Siguin F_1, F_2 dos subespais de E. Aleshores $E = F_1 \oplus F_2$ si, i només si, es té:

$$E = F_1 + F_2 \quad i$$

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

Si $E = F_1 \oplus F_2$, direm que F_2 és un **subespai complementari** de F_1 (i vice-versa).

Suma directa

Definició

E és **suma directa** de subspais F_1 i F_2 si tot $w \in E$ es pot escriure d'una **única manera** com $w = v_1 + v_2$ amb $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$.
En aquest cas usem la notació $E = F_1 \oplus F_2$.

Proposició

Siguin F_1, F_2 dos subespais de E. Aleshores $E = F_1 \oplus F_2$ si, i només si, es té:

$$E = F_1 + F_2 \quad i$$

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

Si $E = F_1 \oplus F_2$, direm que F_2 és un **subespai complementari** de F_1 (i vice-versa).

Suma directa

Definició

E és **suma directa** de subspais F_1 i F_2 si tot $w \in E$ es pot escriure d'una **única manera** com $w = v_1 + v_2$ amb $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$.
En aquest cas usem la notació $E = F_1 \oplus F_2$.

Proposició

Siguin F_1, F_2 dos subespais de E. Aleshores $E = F_1 \oplus F_2$ si, i només si, es té:

$$E = F_1 + F_2 \quad i$$

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

Si $E = F_1 \oplus F_2$, direm que F_2 és un **subespai complementari** de F_1 (i vice-versa).

Suma directa

Definició

E és **suma directa** de subspais F_1 i F_2 si tot $w \in E$ es pot escriure d'una **única manera** com $w = v_1 + v_2$ amb $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$.
En aquest cas usem la notació $E = F_1 \oplus F_2$.

Proposició

Siguin F_1, F_2 dos subespais de E. Aleshores $E = F_1 \oplus F_2$ si, i només si, es té:

$$E = F_1 + F_2 \quad i$$

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

Si $E = F_1 \oplus F_2$, direm que F_2 és un **subespai complementari** de F_1 (i vice-versa).

Índex

Bibliografia

Basic:

- D. Poole, Linear Algebra, A modern introduction (3rd edition), Brooks/Cole, 2011. Chapter 6.

Additional

- Hernández Rodríguez, E.; Vàzquez Gallo, M.J.; Zurro Moro, M.A. Álgebra lineal y geometría [en línia]