

Àlgebra lineal i geometria

3. Diagonalització

Grau en Enginyeria Física
2025-26

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtiques

Marta Casanellas
Universitat Politècnica de Catalunya



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Outline

Valors i vectors propis

Teorema de Diagonalizació

Aplicacions

Bibliography

Outline

Valors i vectors propis

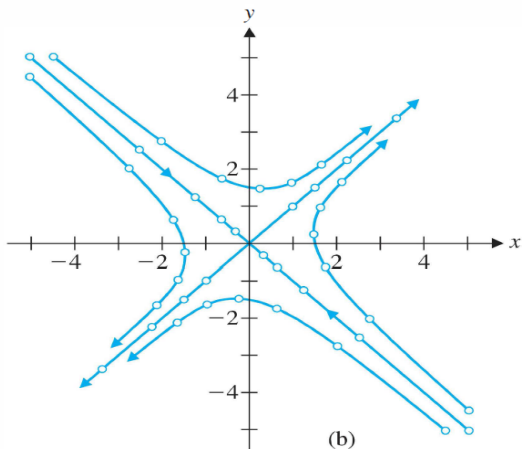
Teorema de Diagonalizació

Aplicacions

Bibliography

Motivació

$$A^m x$$



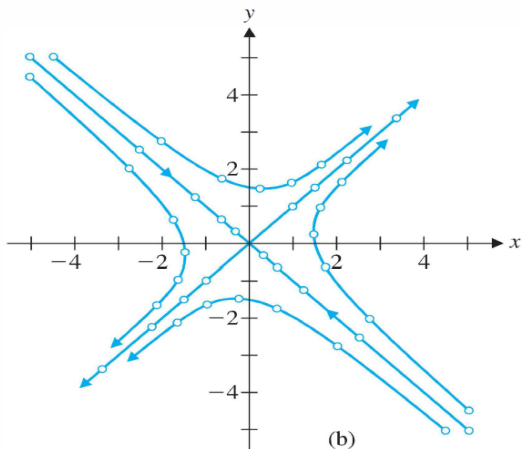
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Motivació

$$A^m x$$



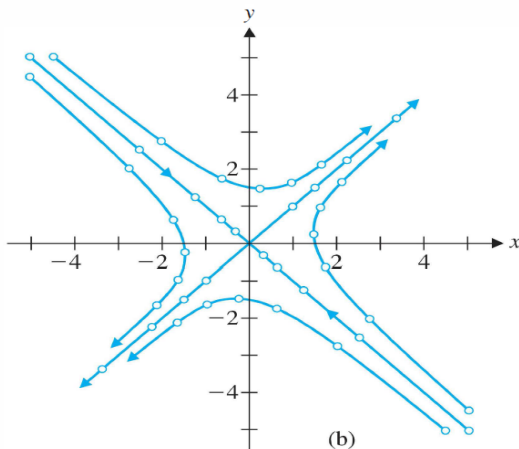
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Motivació

$$A^m x$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensió finita n i $f \in \text{End}(E)$.

- ▶ Objectiu: **calcular potències de matrius**.
- ▶ Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- ▶ Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}M_{\mathbf{e}}(f)P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensió finita n i $f \in \text{End}(E)$.

- ▶ Objectiu: **calcular potències de matrius**.
- ▶ Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- ▶ Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}M_{\mathbf{e}}(f)P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensió finita n i $f \in \text{End}(E)$.

- ▶ Objectiu: **calcular potències de matrius**.
- ▶ Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- ▶ Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}M_{\mathbf{e}}(f)P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensió finita n i $f \in \text{End}(E)$.

- ▶ Objectiu: **calcular potències de matrius**.
- ▶ Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- ▶ Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}M_e(f)P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensió finita n i $f \in \text{End}(E)$.

- ▶ Objectiu: **calcular potències de matrius**.
- ▶ Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- ▶ Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}M_{\mathbf{e}}(f)P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

- ▶ Una matriu $n \times n$ **diagonalitza** si existeix una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ és una matriu diagonal.
- ▶ Si M diagonalitza, aleshores $M = PDP^{-1}$ per certa matriu diagonal D i M^m es calcula facilment:

$$M^m = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^mP^{-1}.$$

- ▶ Una matriu $n \times n$ **diagonalitza** si existeix una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ és una matriu diagonal.
- ▶ Si M diagonalitza, aleshores $M = PDP^{-1}$ per certa matriu diagonal D i M^m es calcula facilment:

$$M^m = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^mP^{-1}.$$

VAPs i VEPs

Remarca: Si $M_v(f)$ és diagonal, aleshores $f(v_i) = d_i v_i$ ($d_i = i$ -èssim valor a la diagonal).

Definició

Sigui $f \in \text{End}(E)$. Un vector $u \neq 0 \in E$ és un **VEP** (**eigenvector**) de f si $f(u) = \lambda u$ per algun $\lambda \in \mathbb{K}$. En tal cas diem que λ és un **VAP** (**eigenvalue**) de f i que u és un VEP de VAP λ .

Exemple

Considerem l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ donat per $f(x, y) = (5x, 2y)$. Aleshores, $e_1 = (1, 0)$ és un VEP de f de VAP 1, i $e_2 = (0, 1)$ és un VEP de f de VAP 2.

La matriu estàndard de f és

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

VAPs i VEPs

Remarca: Si $M_{\mathbf{v}}(f)$ és diagonal, aleshores $f(v_i) = d_i v_i$ ($d_i = i$ -èssim valor a la diagonal).

Definició

Sigui $f \in \text{End}(E)$. Un vector $u \neq 0 \in E$ és un **VEP** (**eigenvector**) de f si $f(u) = \lambda u$ per algun $\lambda \in \mathbb{K}$. En tal cas diem que λ és un **VAP** (**eigenvalue**) de f i que u és un VEP de VAP λ .

Exemple

Considerem l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ donat per $f(x, y) = (5x, 2y)$. Aleshores, $e_1 = (1, 0)$ és un VEP de f de VAP 1, i $e_2 = (0, 1)$ és un VEP de f de VAP 2.

La matriu estàndard de f és

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple

1. Considerem $f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$. Aleshores, $u_1 = (1, 1)$ és VEP de VAP 4; $u_2 = (1, -1)$ és VEP de VAP 2.
La matriu estàndard de f és

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En la base $\{u_1, u_2\}$, la matriu de f és diagonal i igual a

$$M_u(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Per $\lambda \in \mathbb{K}$ considerem l'homotècia $f(v) = \lambda v \ \forall v \in E$.
Aleshores, tot vector és VEP de f de VAP λ . La matriu de f en qualsevol base $\mathbf{u}$ és λId_n .

L'objectiu del tema és estudiar per quins endomorfismes f podem obtenir una base tal que la matriu de f sigui diagonal.

Exemple

1. Considerem $f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$. Aleshores, $u_1 = (1, 1)$ és VEP de VAP 4; $u_2 = (1, -1)$ és VEP de VAP 2.
La matriu estàndard de f és

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En la base $\{u_1, u_2\}$, la matriu de f és diagonal i igual a

$$M_u(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Per $\lambda \in \mathbb{K}$ considerem l'homotècia $f(v) = \lambda v \ \forall v \in E$.
Aleshores, tot vector és VEP de f de VAP λ . La matriu de f en qualsevol base u és λId_n .

L'objectiu del tema és estudiar per quins endomorfismes f podem obtenir una base tal que la matriu de f sigui diagonal.

Exemple

1. Considerem $f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$. Aleshores, $u_1 = (1, 1)$ és VEP de VAP 4; $u_2 = (1, -1)$ és VEP de VAP 2.
La matriu estàndard de f és

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En la base $\{u_1, u_2\}$, la matriu de f és diagonal i igual a

$$M_u(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Per $\lambda \in \mathbb{K}$ considerem l'homotècia $f(v) = \lambda v \ \forall v \in E$.
Aleshores, tot vector és VEP de f de VAP λ . La matriu de f en qualsevol base $\mathbf{u}$ és λId_n .

L'objectiu del tema és estudiar per quins endomorfismes f podem obtenir una base tal que la matriu de f sigui diagonal.

VEPs i VAPs

Lema

- ▶ $u \in E$ és un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{Id})$ i $u \neq 0$.
- ▶ $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda \text{Id}) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f ,

$$E_\lambda := \text{Nuc}(f - \lambda \text{Id}) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el **0**.

- ▶ $E_0 = \text{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f)$.
- ▶ L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- ▶ $u \in E$ és un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f - \lambda Id)$ i $u \neq 0$.
- ▶ $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f ,

$$E_\lambda := \text{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el **0**.

- ▶ $E_0 = \text{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f)$.
- ▶ L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- ▶ $u \in E$ és un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f - \lambda Id)$ i $u \neq 0$.
- ▶ $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f ,

$$E_\lambda := \text{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el **0**.

- ▶ $E_0 = \text{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f)$.
- ▶ L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- ▶ $u \in E$ és un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f - \lambda Id)$ i $u \neq 0$.
- ▶ $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f ,

$$E_\lambda := \text{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el **0**.

- ▶ $E_0 = \text{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f)$.
- ▶ L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- ▶ $u \in E$ és un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f - \lambda Id)$ i $u \neq 0$.
- ▶ $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f ,

$$E_\lambda := \text{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el **0**.

- ▶ $E_0 = \text{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f)$.
- ▶ L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- ▶ $u \in E$ és un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f - \lambda Id)$ i $u \neq 0$.
- ▶ $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f ,

$$E_\lambda := \text{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el **0**.

- ▶ $E_0 = \text{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \text{Nuc}(f)$.
- ▶ L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VAPs i Polinomi característic

Definició

El **polinomi característic de** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és

$$P_A(x) := \det(A - xId) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - x & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - x & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - x \end{vmatrix}.$$

Si $f \in \text{End}(E)$, el **polinomi característic de** f és $p_A(x)$ on $A = M_{\mathbf{u}}(f)$ per alguna base $\mathbf{u}$.

Propietats

Proposició

1. $P_f(x)$ no depèn de la base $\mathbf{u}$ escollida.
2. $P_f(x)$ és un polinomi de grau n ,
 $P_f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$. A més, si
 $M_{\mathbf{u}}(f) = (a_{i,j})$, $\Rightarrow$

$$c_n = (-1)^n,$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(f) = (-1)^{n-1} (a_{1,1} + \dots + a_{n,n}),$$

$$c_0 = \det(f).$$

3. Les arrels de $P_f(x)$ són els VAPs de f , és a dir,
 $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.

Propietats

Proposició

1. $P_f(x)$ no depèn de la base $\mathbf{u}$ escollida.
2. $P_f(x)$ és un polinomi de grau n ,
 $P_f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$. A més, si
 $M_{\mathbf{u}}(f) = (a_{i,j})$, $\Rightarrow$

$$c_n = (-1)^n,$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(f) = (-1)^{n-1} (a_{1,1} + \dots + a_{n,n}),$$

$$c_0 = \det(f).$$

3. Les arrels de $P_f(x)$ són els VAPs de f , és a dir,
 $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.

Propietats

Proposició

1. $P_f(x)$ no depèn de la base $\mathbf{u}$ escollida.
2. $P_f(x)$ és un polinomi de grau n ,
 $P_f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$. A més, si
 $M_{\mathbf{u}}(f) = (a_{i,j})$, $\Rightarrow$

$$c_n = (-1)^n,$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(f) = (-1)^{n-1} (a_{1,1} + \dots + a_{n,n}),$$

$$c_0 = \det(f).$$

3. Les arrels de $P_f(x)$ són els VAPs de f , és a dir,
 $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.

Propietats

Proposició

1. $P_f(x)$ no depèn de la base $\mathbf{u}$ escollida.
2. $P_f(x)$ és un polinomi de grau n ,
 $P_f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$. A més, si
 $M_{\mathbf{u}}(f) = (a_{i,j})$, $\Rightarrow$

$$c_n = (-1)^n,$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(f) = (-1)^{n-1} (a_{1,1} + \dots + a_{n,n}),$$

$$c_0 = \det(f).$$

3. Les arrels de $P_f(x)$ són els VAPs de f , és a dir,
 $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.

Multiplicitat algebraica i geomètrica dels VAPs

Definició

Si λ és un VAP de f , la **multiplicitat algebraica de λ** , denotada com a_λ , és la multiplicitat de λ com a arrel de $P_f(x)$.

Definició

La **multiplicitat geomètrica de λ** , denotada com g_λ , és la dimensió del subespai propi $\text{Nuc}(f - \lambda Id)$, és a dir, $n - \text{rk}(A - \lambda I)$.

Proposició

Es té $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.

Multiplicitat algebraica i geomètrica dels VAPs

Definició

Si λ és un VAP de f , la **multiplicitat algebraica de λ** , denotada com a_λ , és la multiplicitat de λ com a arrel de $P_f(x)$.

Definició

La **multiplicitat geomètrica de λ** , denotada com g_λ , és la dimensió del subespai propi $\text{Nuc}(f - \lambda Id)$, és a dir, $n - \text{rk}(A - \lambda I)$.

Proposició

Es té $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.

Multiplicitat algebraica i geomètrica dels VAPs

Definició

Si λ és un VAP de f , la **multiplicitat algebraica de λ** , denotada com a_λ , és la multiplicitat de λ com a arrel de $P_f(x)$.

Definició

La **multiplicitat geomètrica de λ** , denotada com g_λ , és la dimensió del subespai propi $\text{Nuc}(f - \lambda Id)$, és a dir, $n - \text{rk}(A - \lambda I)$.

Proposició

Es té $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.

Outline

Valors i vectors propis

Teorema de Diagonalizació

Aplicacions

Bibliography

Independència lineal de VEPs

Si sigui $f \in \text{End}(E)$. Aleshores,

Lema

- ▶ Si u, v són VEPs de diferents VAPs $\Rightarrow u, v$ són l.i.
- ▶ Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són diferents VAPs $\Rightarrow$ la suma $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r}$ és suma directa,

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

Corollary

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són diferents VAPs de f i $B_i = \{v_1^i, \dots, v_{d_i}^i\}$ és una base de E_{λ_i} per $i = 1, \dots, r$, aleshores $B_1 \cup \dots \cup B_r$ és una col·lecció de vectors linealment independents.

Independència lineal de VEPs

Sigui $f \in \text{End}(E)$. Aleshores,

Lema

- ▶ Si u, v són VEPs de diferent VAPs $\Rightarrow u, v$ són l.i.
- ▶ Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són diferent VAPs $\Rightarrow$ la suma $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r}$ és suma directa,

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

Corollary

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són diferent VAPs de f i $B_i = \{v_1^i, \dots, v_{d_i}^i\}$ és una base de E_{λ_i} per $i = 1, \dots, r$, aleshores $B_1 \cup \dots \cup B_r$ és una col·lecció de vectors linealment independents.

Independència lineal de VEPs

Sigui $f \in \text{End}(E)$. Aleshores,

Lema

- ▶ Si u, v són VEPs de diferent VAPs $\Rightarrow u, v$ són l.i.
- ▶ Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són diferent VAPs $\Rightarrow$ la suma $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r}$ és suma directa,

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

Corollary

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són diferent VAPs de f i $B_i = \{v_1^i, \dots, v_{d_i}^i\}$ és una base de E_{λ_i} per $i = 1, \dots, r$, aleshores $B_1 \cup \dots \cup B_r$ és una col·lecció de vectors linealment independents.

Independència lineal de VEPs

Sigui $f \in \text{End}(E)$. Aleshores,

Lema

- ▶ Si u, v són VEPs de diferents VAPs $\Rightarrow u, v$ són l.i.
- ▶ Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són diferents VAPs $\Rightarrow$ la suma $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r}$ és suma directa,

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

Corollary

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són diferents VAPs de f i $B_i = \{v_1^i, \dots, v_{d_i}^i\}$ és una base de E_{λ_i} per $i = 1, \dots, r$, aleshores $B_1 \cup \dots \cup B_r$ és una col·lecció de vectors linealment independents.

Teorema de Diagonalizació

Teorema (Teorema de Diagonalizació)

Un endomorfisme f de E és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si, i només si

1. *$P_f(x)$ té totes les seves arrels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a $\mathbb{K}$ (P_f descomposa totalment a $\mathbb{K}$)
i*
2. *per cada VAP λ_i , la multiplicitat algebraica i la geomètrica coincideixen: $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$.*

Si f diagonalitza, ho fa en una base de VEPs.

Corollary

Si totes les arrels de $P_f(x)$ estan a $\mathbb{K}$ i són simples ($a_{\lambda_i} = 1 \ \forall \lambda_i$), aleshores f diagonalitza.

Teorema de Diagonalizació

Teorema (Teorema de Diagonalizació)

Un endomorfisme f de E és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si, i només si

1. *$P_f(x)$ té totes les seves arrels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a $\mathbb{K}$ (P_f descomposa totalment a $\mathbb{K}$)
i*
2. *per cada VAP λ_i , la multiplicitat algebraica i la geomètrica coincideixen: $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$.*

Si f diagonalitza, ho fa en una base de VEPs.

Corollary

Si totes les arrels de $P_f(x)$ estan a $\mathbb{K}$ i són simples ($a_{\lambda_i} = 1 \ \forall \lambda_i$), aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{K}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = \det(A - x \text{Id})$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{K}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{K}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i , calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i} .
4. Per cada λ_i , calculem $\text{Nuc}(A - \lambda_i \text{Id})$: el subespai de VEPs de VAP λ_i . La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i .
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i , aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{K}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = \det(A - x Id)$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{K}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{K}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i , calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i} .
4. Per cada λ_i , calculem $\text{Nuc}(A - \lambda_i Id)$: el subespai de VEPs de VAP λ_i . La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i .
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i , aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{K}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = \det(A - x \text{Id})$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{K}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{K}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i , calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i} .
4. Per cada λ_i , calculem $\text{Nuc}(A - \lambda_i \text{Id})$: el subespai de VEPs de VAP λ_i . La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i .
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i , aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{K}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = \det(A - x \text{Id})$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{K}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{K}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i , calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i} .
4. Per cada λ_i , calculem $\text{Nuc}(A - \lambda_i \text{Id})$: el subespai de VEPs de VAP λ_i . La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i .
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i , aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{K}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = \det(A - x Id)$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{K}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{K}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i , calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i} .
4. Per cada λ_i , calculem $\text{Nuc}(A - \lambda_i Id)$: el subespai de VEPs de VAP λ_i . La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i .
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i , aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

En aquest cas, per cada VAP λ_i , sigui $\{v_1^i, \dots, v_{a_{\lambda_i}}^i\}$ una base de $\text{Nuc}(A - \lambda_i Id)$. Aleshores,

1. $\mathbf{v} = \bigcup_{i=1}^k \{v_1^i, \dots, v_{a_{\lambda_i}}^i\}$ és base de $\mathbb{K}^n$.
2. $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal:

$$M_{\mathbf{v}}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Notem que $M_{\mathbf{v}}(f)$ es podria calcular amb un canvi de base: si $\mathbf{e}$ és la base estàndard de $\mathbb{K}^n$, aleshores

$$A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} A A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}} = D.$$

(Equivalentment, $A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}} D A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} = A$).

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

En aquest cas, per cada VAP λ_i , sigui $\{v_1^i, \dots, v_{a_{\lambda_i}}^i\}$ una base de $\text{Nuc}(A - \lambda_i Id)$. Aleshores,

1. $\mathbf{v} = \bigcup_{i=1}^k \{v_1^i, \dots, v_{a_{\lambda_i}}^i\}$ és base de $\mathbb{K}^n$.
2. $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal:

$$M_{\mathbf{v}}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Notem que $M_{\mathbf{v}}(f)$ es podria calcular amb un canvi de base: si $\mathbf{e}$ és la base estàndard de $\mathbb{K}^n$, aleshores

$$A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} A A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}} = D.$$

(Equivalentment, $A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}} D A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} = A$).

Triangularització d'endomorfismes

Lema

Per tot $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ existeix una base $\mathbf{u}$ de $\mathbb{C}^n$ en la qual $M_{\mathbf{u}}(f)$ és triangular, té els VAP's $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (repetits si cal) de f a la diagonal i

$$\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n,$$

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Encara es pot fer més: obtenir una **forma canònica de Jordan**, i.e. una matriu diagonal per blocs, amb blocs del tipus:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Outline

Valors i vectors propis

Teorema de Diagonalizació

Aplicacions

Bibliography

Estudi de $A^k x$ quan $k \rightarrow \infty$

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, amb $A = PDP^{-1}$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P =$ canvi-de-base $= A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Aleshores,

► $A^k = PD^kP^{-1}$.

► Si $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Rightarrow A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n$

► Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, aleshores λ_1^k creix més ràpidament que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$A^k x \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran,}$$

► Això és el "mètode de la potència": la base tècnica per calcular VAPs (i VEPs) de forma eficient.

Estudi de $A^k x$ quan $k \rightarrow \infty$

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, amb $A = PDP^{-1}$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P =$ canvi-de-base $= A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Aleshores,

- ▶ $A^k = PD^kP^{-1}$.
- ▶ Si $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Rightarrow A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n$
- ▶ Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, aleshores λ_1^k creix més ràpidament que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$A^k x \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran,}$$

- ▶ Això és el “mètode de la potència”: la base tècnica per calcular VAPs (i VEPs) de forma eficient.

Estudi de $A^k x$ quan $k \rightarrow \infty$

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, amb $A = PDP^{-1}$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P =$ canvi-de-base $= A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Aleshores,

- ▶ $A^k = PD^kP^{-1}$.
- ▶ Si $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Rightarrow A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n$
- ▶ Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, aleshores λ_1^k creix més ràpidament que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$A^k x \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran,}$$

- ▶ Això és el “mètode de la potència”: la base tècnica per calcular VAPs (i VEPs) de forma eficient.

Estudi de $A^k x$ quan $k \rightarrow \infty$

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, amb $A = PDP^{-1}$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P =$ canvi-de-base $= A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Aleshores,

- ▶ $A^k = PD^k P^{-1}$.
- ▶ Si $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Rightarrow A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n$
- ▶ Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, aleshores λ_1^k creix més ràpidament que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$A^k x \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran,}$$

- ▶ Això és el “mètode de la potència”: la base tècnica per calcular VAPs (i VEPs) de forma eficient.

Sistemes dinàmics lineals discrets

Definició

Un **sistema dinàmic lineal discret homogeni** és una equació matricial de la forma

$$\mathbf{x}(k+1) = A \mathbf{x}(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

on A és una matriu $n \times n$ i

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

El vector $\mathbf{x}(0)$ s'anomena **condició inicial**.

Una **solució** (o trajectòria) és una col·lecció de vectors $\{\mathbf{x}(k)\}_{k \geq 0}$ tal que cada $\mathbf{x}(k)$ satisfà l'equació de dalt.

Lema

Les solucions de $\mathbf{x}(k+1) = A \mathbf{x}(k)$ són $\{\mathbf{x}(k) = A^k \mathbf{x}(0)\}_k$.

Sistemes dinàmics lineals discrets

Definició

Un **sistema dinàmic lineal discret homogeni** és una equació matricial de la forma

$$\mathbf{x}(k+1) = A \mathbf{x}(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

on A és una matriu $n \times n$ i

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

El vector $\mathbf{x}(0)$ s'anomena **condició inicial**.

Una **solució** (o trajectòria) és una col·lecció de vectors $\{\mathbf{x}(k)\}_{k \geq 0}$ tal que cada $\mathbf{x}(k)$ satisfà l'equació de dalt.

Lema

Les solucions de $\mathbf{x}(k+1) = A \mathbf{x}(k)$ són $\{\mathbf{x}(k) = A^k \mathbf{x}(0)\}_k$.

Sistemes dinàmics discrets (cont.)

Si A diagonalitza amb VAPs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, i $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de VEPs, les solucions $x(k) = A^k x(0)$ satisfan

- ▶ Si $x(0) = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Rightarrow$
 $x(k) = A^k x(0) = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n$
- ▶ Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lambda_1^k$ creix més ràpid que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$x(k) \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran.}$$

Definició

Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \forall i$, λ_1 s'anomena el VAP dominant.

Sistemes dinàmics discrets (cont.)

Si A diagonalitza amb VAPs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, i $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de VEPs, les solucions $x(k) = A^k x(0)$ satisfan

- ▶ Si $x(0) = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Rightarrow$
 $x(k) = A^k x(0) = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n$
- ▶ Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lambda_1^k$ creix més ràpid que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$x(k) \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran.}$$

Definició

Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \forall i$, λ_1 s'anomena el VAP dominant.

Sistemes dinàmics discrets (cont.)

Si A diagonalitza amb VAPs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, i $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de VEPs, les solucions $x(k) = A^k x(0)$ satisfan

- ▶ Si $x(0) = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Rightarrow$
 $x(k) = A^k x(0) = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n$
- ▶ Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lambda_1^k$ creix més ràpid que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$x(k) \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran.}$$

Definició

Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \forall i$, λ_1 s'anomena el **VAP dominant**.

Matrius estocàstiques

Definició

Una **matriu estocàstica** (per columnes) és una matriu $n \times n$ no negativa on cada columna suma 1.

Es pot definir anàlogament per files.

Si A és una matriu estocàstica es té:

- ▶ 1 és un VAP de A .
- ▶ Si x suma 1, aleshores Ax també suma 1.

Matrius estocàstiques

Definició

Una **matriu estocàstica** (per columnes) és una matriu $n \times n$ no negativa on cada columna suma 1.

Es pot definir anàlogament per files.

Si A és una matriu estocàstica es té:

- ▶ 1 és un VAP de A .
- ▶ Si x suma 1, aleshores Ax també suma 1.

Matrius estocàstiques

Definició

Una **matriu estocàstica** (per columnes) és una matriu $n \times n$ no negativa on cada columna suma 1.

Es pot definir anàlogament per files.

Si A és una matriu estocàstica es té:

- ▶ 1 és un VAP de A .
- ▶ Si x suma 1, aleshores Ax també suma 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- ▶ *$1 > |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- ▶ *$g_1 = 1$*
- ▶ *1 té un VEP no-negatiu v .*
- ▶ *cap altre VAP té VEPs positius.*
- ▶ *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = (v \ v \ \dots \ v)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = v$$

per qualsevol vector x positiu que sumi 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- ▶ *$1 > |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- ▶ *$g_1 = 1$*
- ▶ *1 té un VEP no-negatiu v .*
- ▶ *cap altre VAP té VEPs positius.*
- ▶ *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = (v \ v \ \dots \ v)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = v$$

per qualsevol vector x positiu que sumi 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- ▶ *$1 > |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- ▶ *$g_1 = 1$*
- ▶ *1 té un VEP no-negatiu v .*
- ▶ *cap altre VAP té VEPs positius.*
- ▶ *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = (v \ v \ \dots \ v)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = v$$

per qualsevol vector x positiu que sumi 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- ▶ *$1 > |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- ▶ *$g_1 = 1$*
- ▶ *1 té un VEP no-negatiu v .*
- ▶ *cap altre VAP té VEPs positius.*
- ▶ *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = (v \ v \ \dots \ v)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = v$$

per qualsevol vector x positiu que sumi 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- ▶ *$1 > |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- ▶ *$g_1 = 1$*
- ▶ *1 té un VEP no-negatiu v .*
- ▶ *cap altre VAP té VEPs positius.*
- ▶ *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = (v \ v \ \dots \ v)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = v$$

per qualsevol vector x positiu que sumi 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

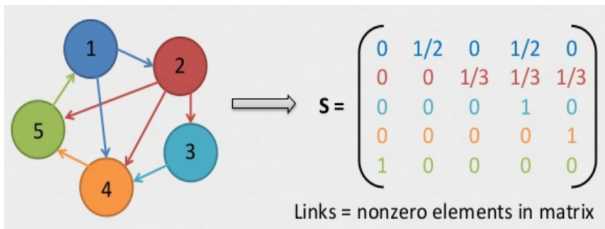
- ▶ *$1 > |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- ▶ *$g_1 = 1$*
- ▶ *1 té un VEP no-negatiu v .*
- ▶ *cap altre VAP té VEPs positius.*
- ▶ *Si v és VEP de VAP 1 que **suma 1**, aleshores*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = (v \ v \ \dots \ v)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x} = v$$

*per **qualsevol** vector $\mathbf{x}$ positiu que sumi 1.*

Ranking de pàgines web (Google pagerank)



Volem v positiu tal que $Av = av$ ($A = S^t$) per algun $a \Rightarrow v = \text{VEP}$ dominant, $a = 1$.

Càlcul de v : $\lim A^k x$ per qualsevol x positiu.

Teorema de Cayley-Hamilton

Theorem (Cayley-Hamilton)

Si $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ té polinomi característic

$P_f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ i A és la seva matriu estàndard, aleshores

$$a_0 Id + a_1 A + \dots + a_n A^n = 0.$$

Conseqüències:

- ▶ A^n es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, A^2, \dots, A^{n-1}$
- ▶ Si A és invertible $\Rightarrow A^{-1}$ es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, \dots, A^{n-1}$
- ▶ És útil per calcular $\exp(A)$ (pàg. següent).

Teorema de Cayley-Hamilton

Theorem (Cayley-Hamilton)

Si $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ té polinomi característic

$P_f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ i A és la seva matriu estàndard, aleshores

$$a_0 Id + a_1 A + \dots + a_n A^n = 0.$$

Conseqüències:

- ▶ A^n es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, A^2, \dots, A^{n-1}$
- ▶ Si A és invertible $\Rightarrow A^{-1}$ es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, \dots, A^{n-1}$
- ▶ És útil per calcular $\exp(A)$ (pàg. següent).

Teorema de Cayley-Hamilton

Theorem (Cayley-Hamilton)

Si $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ té polinomi característic

$P_f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ i A és la seva matriu estàndard, aleshores

$$a_0Id + a_1A + \dots + a_nA^n = 0.$$

Conseqüències:

- ▶ A^n es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, A^2, \dots, A^{n-1}$
- ▶ Si A és invertible $\Rightarrow A^{-1}$ es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, \dots, A^{n-1}$
- ▶ És útil per calcular $\exp(A)$ (pàg. següent).

Teorema de Cayley-Hamilton

Theorem (Cayley-Hamilton)

Si $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ té polinomi característic

$P_f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ i A és la seva matriu estàndard, aleshores

$$a_0 Id + a_1 A + \dots + a_n A^n = 0.$$

Conseqüències:

- ▶ A^n es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, A^2, \dots, A^{n-1}$
- ▶ Si A és invertible $\Rightarrow A^{-1}$ es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, \dots, A^{n-1}$
- ▶ És útil per calcular $\exp(A)$ (pàg. següent).

Exponential d'una matriu

Si f és un endomorfisme diagonalitzable amb matriu estàndard $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = P D P^{-1}$ amb D diagonal:

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P = A_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}}$, i $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ és la base de VEPs corresponent. Aleshores, definim l'**exponential** de la matriu A :

$$e^A = P e^D P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

i coincideix amb $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$.

Matrius reals amb VAPs complexos

Si A és una matriu **real** i permetem diagonalització a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aleshores els VAP's i VEP's van “en parelles conjugades”:

- ▶ $p_A(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \lambda$ és VAP de A si, i només si $\bar{\lambda}$ és VAP de A .
- ▶ Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, i $w \in \mathbb{C}^n$ és VEP de VAP λ , aleshores podem escriure $w = u + iv$ amb $u, v \in \mathbb{R}^n$ i
- ▶ $\bar{w} := u - iv$ és VEP de VAP $\bar{\lambda}$.

Si volem treballar només a $\mathbb{R}$, podem reorganitzar els VAPs i VEPs complexos en parells conjugats per obtenir una “diagonalització” de A en blocks 2×2 : cal usar u, v en lloc dels VEPs $w, \bar{w}$.

Matrius reals amb VAPs complexos

Si A és una matriu **real** i permetem diagonalització a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aleshores els VAP's i VEP's van “en parelles conjugades”:

- ▶ $p_A(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \lambda$ és VAP de A si, i només si $\bar{\lambda}$ és VAP de A .
- ▶ Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, i $w \in \mathbb{C}^n$ és VEP de VAP λ , aleshores podem escriure $w = u + iv$ amb $u, v \in \mathbb{R}^n$ i
- ▶ $\bar{w} := u - iv$ és VEP de VAP $\bar{\lambda}$.

Si volem treballar només a $\mathbb{R}$, podem reorganitzar els VAPs i VEPs complexos en parells conjugats per obtenir una “diagonalització” de A en blocks 2×2 : cal usar u, v en lloc dels VEPs $w, \bar{w}$.

Matrïus reals amb VAPs complexos

Si A és una matriu **real** i permetem diagonalització a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aleshores els VAP's i VEP's van “en parelles conjugades”:

- ▶ $p_A(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \lambda$ és VAP de A si, i només si $\bar{\lambda}$ és VAP de A .
- ▶ Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, i $w \in \mathbb{C}^n$ és VEP de VAP λ , aleshores podem escriure $w = u + iv$ amb $u, v \in \mathbb{R}^n$ i
- ▶ $\bar{w} := u - iv$ és VEP de VAP $\bar{\lambda}$.

Si volem treballar només a $\mathbb{R}$, podem reorganitzar els VAPs i VEPs complexos en parells conjugats per obtenir una “diagonalització” de A en blocks 2×2 : cal usar u, v en lloc dels VEPs $w, \bar{w}$.

Outline

Valors i vectors propis

Teorema de Diagonalizació

Aplicacions

Bibliography

Bibliography

Basic:

- ▶ D. Poole, Linear Algebra, A modern introduction (3rd edition), Brooks/Cole, 2011. Chapter 6.

Additional

- ▶ Hernández Rodríguez, E.; Vázquez Gallo, M.J.; Zurro Moro, M.A. Álgebra lineal y geometría [en línea]