Àlgebra lineal i geometria
3. Diagonalització

Grau en Enginyeria Física

2024-25

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtiques

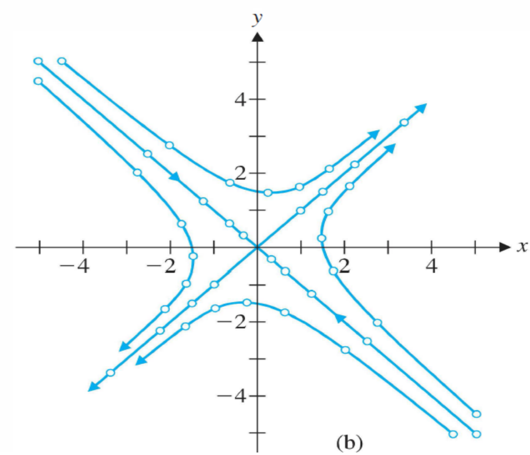
Marta Casanellas
Universitat Politècnica de Catalunya

Outline

Outline

Motivació

$$A^m x$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

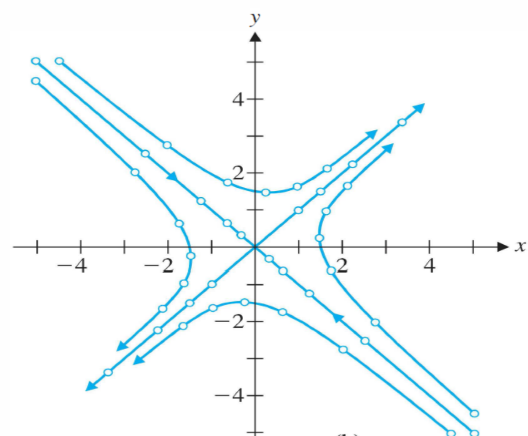
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

[D.Poole]

Motivació

$$A^m x$$



(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

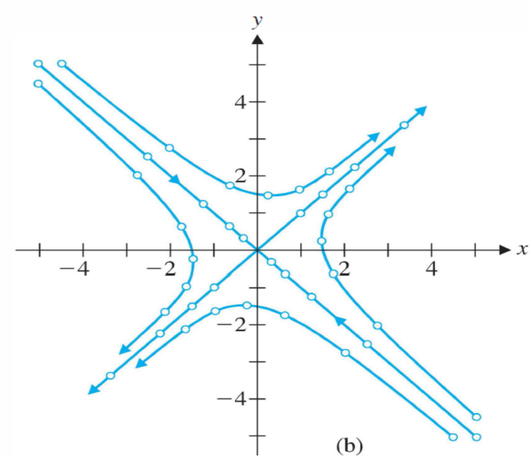
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

[D.Poole]

Motivació

$$A^m x$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

[D.Poole]

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensió finita n i $f \in End(E)$.

- Objectiu: calcular potències de matrius.
- Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \to E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1} M_{\mathbf{e}}(f) P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensió finita n i $f \in End(E)$.

- Objectiu: calcular potències de matrius.
- Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \to E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1} M_{\mathbf{e}}(f) P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensió finita n i $f \in End(E)$.

- Objectiu: calcular potències de matrius.
- Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \to E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1} M_{\mathbf{e}}(f) P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

Motivació

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensió finita n i $f \in End(E)$.

- Objectiu: calcular potències de matrius.
- Si M és diagonal, és fàcil calcular M^m per qualsevol $m \in \mathbb{N}$.
- Si M no és diagonal, existeix un canvi de base que la converteixi a diagonal?

Definició

Diem que un endomorfisme $f : E \to E$ és **diagonalitzable** a $\mathbb{K}$ si existeix una base $\mathbf{v}$ de E tal que $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

És a dir, f és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1} M_{\mathbf{e}}(f) P$$

és una matriu diagonal (P es pot pensar com matriu de canvi de base).

- Una matriu $n \times n$ **diagonalitza** si existeix una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ és una matriu diagonal.
- Si M diagonalitza, aleshores $M = PDP^{-1}$ per certa matriu diagonal D i M^m es calcula facilment:

$$M^m = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^mP^{-1}.$$

- Una matriu $n \times n$ **diagonalitza** si existeix una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ és una matriu diagonal.
- Si M diagonalitza, aleshores $M = PDP^{-1}$ per certa matriu diagonal D i M^m es calcula facilment:

$$M^m = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^mP^{-1}.$$

VAPs i VEPs

Remarca: Si $M_{\mathbf{v}}(f)$ és diagonal, aleshores $f(v_i) = d_i v_i$ ($d_i =$ i-èssim valor a la diagonal).

Definició

Sigui $f \in End(E)$. Un vector $u \neq 0 \in E$ és un **VEP** (**eigenvector**) de f si $f(u) = \lambda\, u$ per algun $\lambda \in \mathbb{K}$. En tal cas diem que λ és un **VAP** (**eigenvalue**) de f i que u és un VEP de VAP λ.

Exemple

Considerem l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ donat per $f(x, y) = (5x, 2y)$. Aleshores, $e_1 = (1, 0)$ és un VEP de f de VAP 1, i $e_2 = (0, 1)$ és un VEP de f de VAP 2.
La matriu estàndard de f és

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

VAPs i VEPs

Remarca: Si $M_{\mathbf{v}}(f)$ és diagonal, aleshores $f(v_i) = d_i v_i$ ($d_i =$ i-èssim valor a la diagonal).

Definició

Sigui $f \in End(E)$. Un vector $u \neq 0 \in E$ és un **VEP** (**eigenvector**) de f si $f(u) = \lambda\, u$ per algun $\lambda \in \mathbb{K}$. En tal cas diem que λ és un **VAP** (**eigenvalue**) de f i que u és un VEP de VAP λ.

Exemple

Considerem l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ *donat per* $f(x, y) = (5x, 2y)$*.*
Aleshores, $e_1 = (1, 0)$ *és un VEP de f de VAP 1, i* $e_2 = (0, 1)$ *és un VEP de f de VAP 2.*
La matriu estàndard de f és

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple

1. *Considerem* $f(x,y) = (3x+y, x+3y)$. *Aleshores,* $u_1 = (1,1)$ *és VEP de VAP 4;* $u_2 = (1,-1)$ *és VEP de VAP 2.*
   La matriu estàndard de f *és*
   $$M_e(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   En la base $\{u_1, u_2\}$, *la matriu de* f *és diagonal i igual a*
   $$M_u(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. *Per* $\lambda \in \mathbb{K}$ *considerem l'homotècia* $f(v) = \lambda v \ \forall v \in E$. *Aleshores, tot vector és VEP de* f *de VAP* λ. *La matriu de* f *en qualsevol base* $\mathbf{u}$ *és* λId_n.

L'objectiu del tema és estudiar per quins endomorfismes f podem obtenir una base tal que la matriu de f sigui diagonal.

Exemple

1. *Considerem* $f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$. *Aleshores,* $u_1 = (1, 1)$ *és VEP de VAP 4;* $u_2 = (1, -1)$ *és VEP de VAP 2.*
   La matriu estàndard de f *és*

   $$M_e(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   En la base $\{u_1, u_2\}$, *la matriu de* f *és diagonal i igual a*

   $$M_u(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. *Per* $\lambda \in \mathbb{K}$ *considerem l'homotècia* $f(v) = \lambda v \; \forall v \in E$. *Aleshores, tot vector és VEP de* f *de VAP* λ. *La matriu de* f *en qualsevol base* $\mathbf{u}$ *és* λId_n.

L'objectiu del tema és estudiar per quins endomorfismes f podem obtenir una base tal que la matriu de f sigui diagonal.

Exemple

1. *Considerem* $f(x,y) = (3x+y, x+3y)$*. Aleshores,* $u_1 = (1,1)$ *és VEP de VAP 4;* $u_2 = (1,-1)$ *és VEP de VAP 2.*
   La matriu estàndard de f *és*
   $$M_e(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   En la base $\{u_1, u_2\}$*, la matriu de* f *és diagonal i igual a*
   $$M_u(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. *Per* $\lambda \in \mathbb{K}$ *considerem l'homotècia* $f(v) = \lambda v \ \forall v \in E$*. Aleshores, tot vector és VEP de* f *de VAP* λ*. La matriu de* f *en qualsevol base* $\mathbf{u}$ *és* λId_n*.*

L'objectiu del tema és estudiar per quins endomorfismes f podem obtenir una base tal que la matriu de f sigui diagonal.

VEPs i VAPs

Lema

- *$u \in E$ és un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id)$ i $u \neq 0$.*
- *$\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.*

Definició

Per cada λ VAP de f,

$$E_\lambda := \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el $\mathbf{0}$.

- $E_0 = \mathrm{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f)$.
- L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- $u \in E$ *és un VEP de VAP* $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id)$ *i* $u \neq 0$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ *és un VAP de* $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f,

$$E_\lambda := \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el $\mathbf{0}$.

- $E_0 = \mathrm{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f)$.
- L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- $u \in E$ *és un VEP de VAP* $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id)$ *i* $u \neq 0$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ *és un VAP de* $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f,

$$E_\lambda := \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el $\mathbf{0}$.

- $E_0 = \mathrm{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f)$.
- L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- *$u \in E$ és un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id)$ i $u \neq 0$.*
- *$\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.*

Definició

Per cada λ VAP de f,

$$E_\lambda := \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el $\mathbf{0}$.

- $E_0 = \mathrm{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f)$.
- L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- $u \in E$ *és un VEP de VAP* $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id)$ *i* $u \neq 0$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ *és un VAP de* $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f,

$$E_\lambda := \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el $\mathbf{0}$.

- $E_0 = \mathrm{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f)$.
- L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VEPs i VAPs

Lema

- $u \in E$ *és un VEP de VAP* $\lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id)$ *i* $u \neq 0$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ *és un VAP de* $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$.

Definició

Per cada λ VAP de f,

$$E_\lambda := \mathrm{Nuc}(f - \lambda Id) \subseteq E$$

s'anomena el **subespai propi** de λ . És el subespai format per tots els VEP's de VAP λ més el $\mathbf{0}$.

- $E_0 = \mathrm{Nuc}(f)$; $u \neq 0$ és un VEP de VAP $0 \Leftrightarrow u \in \mathrm{Nuc}(f)$.
- L' **espectre** de f és el conjunt de tots els seus VAPs i es denota per $\sigma(f)$.

VAPs i Polinomi característic

Definició

El **polinomi característic de** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és

$$P_A(x) := det(A - xId) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - x & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - x & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - x \end{vmatrix}.$$

Si $f \in End(E)$, el **polinomi característic de** f és $p_A(x)$ on $A = M_{\mathbf{u}}(f)$ per alguna base $\mathbf{u}$.

Propietats

Proposició

1. *$P_f(x)$ no depèn de la base $\mathbf{u}$ escollida.*
2. *$P_f(x)$ és un polinomi de grau n,*
   $P_f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. A més, si $M_{\mathbf{u}}(f) = (a_{i,j})$, $\Rightarrow$
   $$c_n = (-1)^n,$$
   $$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(f) = (-1)^{n-1}(a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}),$$
   $$c_0 = \det(f).$$
3. *Les arrels de $P_f(x)$ són els VAPs de f, és a dir, $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.*

Propietats

Proposició

1. *$P_f(x)$ no depèn de la base $\mathbf{u}$ escollida.*
2. *$P_f(x)$ és un polinomi de grau n,*
   $P_f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. A més, si $M_{\mathbf{u}}(f) = (a_{i,j})$, $\Rightarrow$

$$c_n = (-1)^n,$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(f) = (-1)^{n-1}(a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}),$$

$$c_0 = \det(f).$$

3. *Les arrels de $P_f(x)$ són els VAPs de f, és a dir,*
   $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.

Propietats

Proposició

1. *$P_f(x)$ no depèn de la base $\mathbf{u}$ escollida.*
2. *$P_f(x)$ és un polinomi de grau n,*
   $P_f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. A més, si $M_{\mathbf{u}}(f) = (a_{i,j})$, $\Rightarrow$
   $$c_n = (-1)^n,$$
   $$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(f) = (-1)^{n-1}(a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}),$$
   $$c_0 = \det(f).$$
3. *Les arrels de $P_f(x)$ són els VAPs de f, és a dir, $\lambda \in \mathbb{K}$ és un VAP de $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.*

Propietats

Proposició

1. $P_f(x)$ *no depèn de la base* $\mathbf{u}$ *escollida.*
2. $P_f(x)$ *és un polinomi de grau* n*,*
   $P_f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$*. A més, si*
   $M_{\mathbf{u}}(f) = (a_{i,j})$*,* $\Rightarrow$
   $$c_n = (-1)^n,$$
   $$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(f) = (-1)^{n-1}(a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}),$$
   $$c_0 = \det(f).$$
3. *Les arrels de* $P_f(x)$ *són els VAPs de* f*, és a dir,*
   $\lambda \in \mathbb{K}$ *és un VAP de* $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$*.*

Multiplicitat algebraica i geomètrica dels VAPs

Definició

Si λ és un VAP de f, la **multiplicitat algebraica de λ**, denotada com a_λ, és la multiplicitat de λ com a arrel de $P_f(x)$.

Definició

La **multiplicitat geomètrica de λ**, denotada com g_λ, és la dimensió del subespai propi $\mathrm{Nuc}(f - \lambda Id)$, és a dir, $n - rk(A - \lambda I)$.

Proposició

Es té $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.

Multiplicitat algebraica i geomètrica dels VAPs

Definició

Si λ és un VAP de f, la **multiplicitat algebraica de λ**, denotada com a_λ, és la multiplicitat de λ com a arrel de $P_f(x)$.

Definició

La **multiplicitat geomètrica de λ**, denotada com g_λ, és la dimensió del subespai propi $\mathrm{Nuc}(f - \lambda Id)$, és a dir, $n - rk(A - \lambda I)$.

Proposició

Es té $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.

Multiplicitat algebraica i geomètrica dels VAPs

Definició

Si λ és un VAP de f, la **multiplicitat algebraica de λ**, denotada com a_λ, és la multiplicitat de λ com a arrel de $P_f(x)$.

Definició

La **multiplicitat geomètrica de λ**, denotada com g_λ, és la dimensió del subespai propi $\text{Nuc}(f - \lambda Id)$, és a dir, $n - rk(A - \lambda I)$.

Proposició

Es té $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.

Outline

Independència lineal de VEPs

Sigui $f \in End(E)$. Aleshores,

Lema

- *Si u, v són VEPs de diferent VAPs $\Rightarrow$ u, v són l.i.*
- *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ són diferent VAPs $\Rightarrow$ la suma $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r}$ és suma directa,*

$$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$$

Corollary

Si $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ són diferent VAPs de f i $B_i = \{v_1^i, \ldots v_{d_i}^i\}$ és una base de E_{λ_i} per $i = 1, \ldots, r$, aleshores $B_1 \cup \ldots \cup B_r$ és una col·lecció de vectors linealment independents.

Independència lineal de VEPs

Sigui $f \in End(E)$. Aleshores,

Lema

- *Si u, v són VEPs de diferent VAPs $\Rightarrow$ u, v són l.i.*
- *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ són diferent VAPs $\Rightarrow$ la suma $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r}$ és suma directa,*

$$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$$

Corollary

Si $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ són diferent VAPs de f i $B_i = \{v_1^i, \ldots v_{d_i}^i\}$ és una base de E_{λ_i} per $i = 1, \ldots, r$, aleshores $B_1 \cup \ldots \cup B_r$ és una col·lecció de vectors linealment independents.

Independència lineal de VEPs

Sigui $f \in End(E)$. Aleshores,

Lema

- *Si* u, v *són VEPs de diferent VAPs* $\Rightarrow$ u, v *són l.i.*
- *Si* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *són diferent VAPs* $\Rightarrow$ *la suma* $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r}$ *és suma directa,*

$$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$$

Corollary

Si $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ *són diferent VAPs de* f *i* $B_i = \{v_1^i, \ldots v_{d_i}^i\}$ *és una base de* E_{λ_i} *per* $i = 1, \ldots, r$, *aleshores* $B_1 \cup \ldots \cup B_r$ *és una col·lecció de vectors linealment independents.*

Independència lineal de VEPs

Sigui $f \in End(E)$. Aleshores,

Lema

- *Si* u, v *són VEPs de diferent VAPs* $\Rightarrow$ u, v *són l.i.*
- *Si* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *són diferent VAPs* $\Rightarrow$ *la suma* $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r}$ *és suma directa,*

$$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$$

Corollary

Si $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ *són diferent VAPs de* f *i* $B_i = \{v_1^i, \ldots v_{d_i}^i\}$ *és una base de* E_{λ_i} *per* $i = 1, \ldots, r$*, aleshores* $B_1 \cup \ldots \cup B_r$ *és una col·lecció de vectors linealment independents.*

Teorema de Diagonalització

Teorema (Teorema de Diagonalització)

Un endomorfisme f de E és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si, i només si

1. *$P_f(x)$ té totes les seves arrels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a $\mathbb{K}$ (P_f descomposa totalment a $\mathbb{K}$)*
   i
2. *per cada VAP λ_i, la multiplicitat algebraica i la geomètrica coincideixen: $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$.*

Si f diagonalitza, ho fa en una base de VEPs.

Corollary

Si totes les arrels de $P_f(x)$ estan a $\mathbb{K}$ i són simples ($a_{\lambda_i} = 1 \ \forall \lambda_i$), aleshores f diagonalitza.

Teorema de Diagonalització

Teorema (Teorema de Diagonalització)

Un endomorfisme f de E és diagonalitzable a $\mathbb{K}$ si, i només si

1. $P_f(x)$ *té totes les seves arrels* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *a* $\mathbb{K}$ *(*P_f *descomposa totalment a* $\mathbb{K}$*)*
   i
2. *per cada VAP* λ_i*, la multiplicitat algebraica i la geomètrica coincideixen:* $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$.

Si f diagonalitza, ho fa en una base de VEPs.

Corollary

Si totes les arrels de $P_f(x)$ *estan a* $\mathbb{K}$ *i són simples (*$a_{\lambda_i} = 1\ \forall \lambda_i$*), aleshores* f *diagonalitza.*

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = det(A - x\,Id)$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{R}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i, calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i}.
4. Per cada λ_i, calculem Nuc$(A - \lambda_i Id)$: el subespai de VEPs de VAP λ_i. La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i.
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{R}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i, aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = det(A - x\,Id)$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{R}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i, calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i}.
4. Per cada λ_i, calculem Nuc$(A - \lambda_i Id)$: el subespai de VEPs de VAP λ_i. La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i.
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{R}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i, aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = det(A - x\,Id)$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{R}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i, calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i}.
4. Per cada λ_i, calculem Nuc$(A - \lambda_i Id)$: el subespai de VEPs de VAP λ_i. La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i.
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{R}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i, aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = det(A - x\,Id)$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{R}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i, calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i}.
4. Per cada λ_i, calculem $\mathrm{Nuc}(A - \lambda_i Id)$: el subespai de VEPs de VAP λ_i. La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i.
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{R}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i, aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

Donat un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$, sigui A la seva matriu estàndard.

1. Calculem el polinomi característic $P_f(x) = det(A - x\,Id)$.
2. Calculem les arrels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $P_f(x)$: si $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ per algun $i \Rightarrow f$ no diagonalitza a $\mathbb{R}$. Altrament,
3. Per cada VAP λ_i, calculem la seva multiplicitat com a arrel de $P_f(x)$, a_{λ_i}.
4. Per cada λ_i, calculem $\text{Nuc}(A - \lambda_i Id)$: el subespai de VEPs de VAP λ_i. La dimensió d'aquest espai és la multiplicitat geomètrica g_{λ_i} de λ_i.
5. Si $\lambda_i \in \mathbb{R}$ i $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot VAP λ_i, aleshores f diagonalitza.

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

En aquest cas, per cada VAP λ_i, sigui $\{v_1^i, \ldots, v_{a_{\lambda_i}}^i\}$ una base de $\mathrm{Nuc}(A - \lambda_i\, Id)$. Aleshores,

1. $\mathbf{v} = \bigcup_{i=1}^{k} \{v_1^i, \ldots, v_{a_{\lambda_i}}^i\}$ és base de $\mathbb{R}^n$.
2. $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal:

$$M_{\mathbf{v}}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Notem que $M_{\mathbf{v}}(f)$ es podria calcular amb un canvi de base: si $\mathbf{e}$ és la base estàndard de $\mathbb{R}^n$, aleshores

$$A_{\mathbf{e}\to\mathbf{v}}\, A\, A_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}} = D.$$

$$(\text{Equivalentment, } A_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}}\, D\, A_{\mathbf{e}\to\mathbf{v}} = A).$$

Procediment per diagonalitzar un endomorfisme

En aquest cas, per cada VAP λ_i, sigui $\{v_1^i, \dots, v_{a_{\lambda_i}}^i\}$ una base de $\mathrm{Nuc}(A - \lambda_i\, Id)$. Aleshores,

1. $\mathbf{v} = \bigcup_{i=1}^k \{v_1^i, \dots, v_{a_{\lambda_i}}^i\}$ és base de $\mathbb{R}^n$.
2. $M_{\mathbf{v}}(f)$ és una matriu diagonal:

$$M_{\mathbf{v}}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Notem que $M_{\mathbf{v}}(f)$ es podria calcular amb un canvi de base: si $\mathbf{e}$ és la base estàndard de $\mathbb{R}^n$, aleshores

$$A_{\mathbf{e}\to\mathbf{v}}\; A\; A_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}} = D.$$

$$(\text{Equivalentment, } A_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}}\; D\; A_{\mathbf{e}\to\mathbf{v}} = A).$$

Triangularització d'endomorfismes

Lema

Per tot $f \in End(\mathbb{R}^n)$ existeix una base $\mathbf{u}$ de $\mathbb{C}^n$ en la qual $M_{\mathbf{u}}(f)$ és triangular, té els VAP's $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (repetits si cal) de f a la diagonal i

$$\det(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_n,$$

$$tr(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Encara es pot fer més: obtenir una forma canònica de Jordan, i.e. una matriu diagonal per blocs, amb blocs del tipus:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Outline

Estudi de $A^k x$ quan $k \to \infty$

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, amb $A = PDP^{-1}$, $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P =$ canvi-de-base $= A_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Aleshores,

- $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Si $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \Rightarrow A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, aleshores λ_1^k creix més ràpidament que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,
$$A^k x \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran},$$
- Això és el "mètode de la potència": la base tècnica per calcular VAPs (i VEPs) de forma eficient.

Estudi de $A^k x$ quan $k \to \infty$

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, amb $A = PDP^{-1}$, $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P =$ canvi-de-base $= A_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Aleshores,

- $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Si $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \Rightarrow A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, aleshores λ_1^k creix més ràpidament que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$A^k x \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran,}$$

- Això és el "mètode de la potència": la base tècnica per calcular VAPs (i VEPs) de forma eficient.

Estudi de $A^k x$ quan $k \to \infty$

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, amb $A = PDP^{-1}$, $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $P =$ canvi-de-base $= A_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Aleshores,

- $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Si $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \Rightarrow A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, aleshores λ_1^k creix més ràpidament que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,
$$A^k x \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran},$$
- Això és el "mètode de la potència": la base tècnica per calcular VAPs (i VEPs) de forma eficient.

Estudi de $A^k x$ quan $k \to \infty$

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, amb $A = PDP^{-1}$, $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P =$ canvi-de-base $= A_{\mathbf{v} \to \mathbf{e}}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Aleshores,

- $A^k = PD^k P^{-1}$.
- Si $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \Rightarrow A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, aleshores λ_1^k creix més ràpidament que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,
  $$A^k x \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran},$$
- Això és el "mètode de la potència": la base tècnica per calcular VAPs (i VEPs) de forma eficient.

Sistemes dinàmics lineals discrets

Definició

Un **sistema dinàmic lineal discret homogeni** és una equació matricial de la forma

$$\mathrm{x}(k+1) = A\,\mathrm{x}(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

on A és una matriu $n \times n$ i

$$\mathrm{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

El vector $\mathrm{x}(0)$ s'anomena **condició inicial**.
Una **solució** (o trajectòria) és una col·lecció de vectors $\{\mathrm{x}(k)\}_{k\geq 0}$ tal que cada $\mathrm{x}(k)$ satisfà l'equació de dalt.

Lema

Les solucions de $\mathrm{x}(k+1) = A\,\mathrm{x}(k)$ són $\{\mathrm{x}(k) = A^k\mathrm{x}(0)\}_k$.

Sistemes dinàmics lineals discrets

Definició

Un **sistema dinàmic lineal discret homogeni** és una equació matricial de la forma

$$\mathrm{x}(k+1) = A\,\mathrm{x}(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

on A és una matriu $n \times n$ i

$$\mathrm{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

El vector $\mathrm{x}(0)$ s'anomena **condició inicial**.
Una **solució** (o trajectòria) és una col·lecció de vectors $\{\mathrm{x}(k)\}_{k\geq 0}$ tal que cada $\mathrm{x}(k)$ satisfà l'equació de dalt.

Lema

Les solucions de $\mathrm{x}(k+1) = A\,\mathrm{x}(k)$ són $\{\mathrm{x}(k) = A^k\mathrm{x}(0)\}_k$.

Sistemes dinàmics discrets (cont.)

Si A diagonalitza amb VAPs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de VEPs, les solucions $x(k) = A^k x(0)$ satisfan

- Si $x(0) = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \Rightarrow$
  $x(k) = A^k x(0) = c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lambda_1^k$ creix més ràpid que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$x(k) \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran.}$$

Definició

Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ $\forall i$, λ_1 s'anomena el VAP dominant.

Sistemes dinàmics discrets (cont.)

Si A diagonalitza amb VAPs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de VEPs, les solucions $x(k) = A^k x(0)$ satisfan

- Si $x(0) = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \Rightarrow$
  $x(k) = A^k x(0) = c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lambda_1^k$ creix més ràpid que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$x(k) \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran.}$$

Definició

Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|\ \forall i$, λ_1 s'anomena el VAP dominant.

Sistemes dinàmics discrets (cont.)

Si A diagonalitza amb VAPs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de VEPs, les solucions $x(k) = A^k x(0)$ satisfan

- Si $x(0) = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \Rightarrow$
  $x(k) = A^k x(0) = c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lambda_1^k$ creix més ràpid que λ_i^k i si $c_1 \neq 0$,

$$x(k) \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{per } k \text{ gran.}$$

Definició

Si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \; \forall i$, λ_1 s'anomena el VAP dominant.

Matrius estocàstiques

Definició

Una **matriu estocàstica** (per columnes) és una matriu $n \times n$ no negativa on cada columna suma 1.

Es pot definir anàlogament per files.
Si A és una matriu estocàstica es té:

- 1 és un VAP de A.
- Si x suma 1, aleshores $A\mathrm{x}$ també suma 1.

Matrius estocàstiques

Definició

Una **matriu estocàstica** (per columnes) és una matriu $n \times n$ no negativa on cada columna suma 1.

Es pot definir anàlogament per files.
Si A és una matriu estocàstica es té:

- 1 és un VAP de A.
- Si x suma 1, aleshores $A\mathrm{x}$ també suma 1.

Matrius estocàstiques

Definició

Una **matriu estocàstica** (per columnes) és una matriu $n \times n$ no negativa on cada columna suma 1.

Es pot definir anàlogament per files.
Si A és una matriu estocàstica es té:

- 1 és un VAP de A.
- Si $\mathtt{x}$ suma 1, aleshores $A\mathtt{x}$ també suma 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- $1 > |\lambda|$ *per qualsevol altre VAP* λ *(1 és VAP dominant)*
- $g_1 = 1$
- *1 té un VEP no-negatiu* v.
- *cap altre VAP té VEPs positius.*
- *Si* v *és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim A^k = (v\, v \dots v)$$

$$i \qquad \lim A^k \mathrm{x} = v$$

per qualsevol vector x *positiu que sumi 1.*

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- *1 $> |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- $g_1 = 1$
- *1 té un VEP no-negatiu v.*
- *cap altre VAP té VEPs positius.*
- *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim A^k = (v\, v \ldots v)$$

$$i \qquad \lim A^k \mathrm{x} = v$$

per qualsevol vector x positiu que sumi 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- *$1 > |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- $g_1 = 1$
- *1 té un VEP no-negatiu v.*
- *cap altre VAP té VEPs positius.*
- *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim A^k = (v\, v \dots v)$$

$$i \qquad \lim A^k \mathrm{x} = v$$

per qualsevol vector x positiu que sumi 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- *1* $> |\lambda|$ *per qualsevol altre VAP* λ *(1 és VAP dominant)*
- $g_1 = 1$
- *1 té un VEP no-negatiu* v.
- *cap altre VAP té VEPs positius.*
- *Si* v *és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim A^k = (v\, v \dots v)$$

$$i \qquad \lim A^k \mathrm{x} = v$$

per qualsevol vector x *positiu que sumi 1.*

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

- *1 $> |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- $g_1 = 1$
- *1 té un VEP no-negatiu v.*
- *cap altre VAP té VEPs positius.*
- *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim A^k = (v\, v \ldots v)$$

$$i \qquad \lim A^k \mathrm{x} = v$$

per qualsevol vector x positiu que sumi 1.

Teorema de Perron-Frobenius per a matriu estocàstiques

Theorem

Si A és una matriu estocàstica positiva, aleshores 1 és VAP i

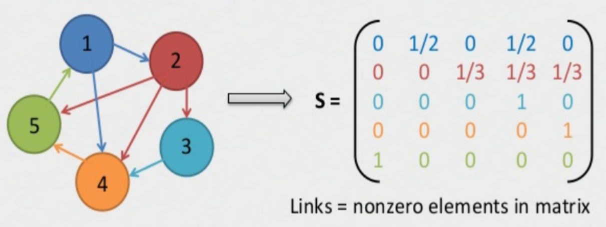
- *$1 > |\lambda|$ per qualsevol altre VAP λ (1 és VAP dominant)*
- $g_1 = 1$
- *1 té un VEP no-negatiu v.*
- *cap altre VAP té VEPs positius.*
- *Si v és VEP de VAP 1 que suma 1, aleshores*

$$\lim A^k = (v\, v \ldots v)$$

$$i \qquad \lim A^k \mathtt{x} = v$$

per qualsevol vector $\mathtt{x}$ positiu que sumi 1.

Ranking de pàgines web (Google pagerank)



Volem v positiu tal que $Av = av$ $(A = S^t)$ per algun $a \Rightarrow v =$ VEP dominant, $a = 1$.
Càlcul de v: $\lim A^k \mathtt{x}$ per qualsevol $\mathtt{x}$ positiu.

Teormea de Cayley-Hamilton

Theorem (Cayley-Hamilton)

Si $f \in End(\mathbb{R}^n)$ té polinomi característic $P_f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ i A és la seva matriu estàndard, aleshores

$$a_0 Id + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0.$$

Conseqüències:

- A^n es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$
- Si A és invertible $\Rightarrow$ A^{-1} es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, \ldots, A^{n-1}$
- És útil per calcular $exp(A)$ (pàg. següent).

Teormea de Cayley-Hamilton

Theorem (Cayley-Hamilton)

Si $f \in End(\mathbb{R}^n)$ té polinomi característic $P_f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ i A és la seva matriu estàndard, aleshores

$$a_0 Id + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0.$$

Conseqüències:

- A^n es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$
- Si A és invertible $\Rightarrow$ A^{-1} es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, \ldots, A^{n-1}$
- És útil per calcular $exp(A)$ (pàg. següent).

Teormea de Cayley-Hamilton

Theorem (Cayley-Hamilton)

Si $f \in End(\mathbb{R}^n)$ té polinomi característic $P_f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ i A és la seva matriu estàndard, aleshores

$$a_0 Id + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0.$$

Conseqüències:

- A^n es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$
- Si A és invertible $\Rightarrow$ A^{-1} es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, \ldots, A^{n-1}$
- És útil per calcular $exp(A)$ (pàg. següent).

Teormea de Cayley-Hamilton

Theorem (Cayley-Hamilton)

Si $f \in End(\mathbb{R}^n)$ té polinomi característic $P_f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ i A és la seva matriu estàndard, aleshores

$$a_0 Id + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0.$$

Conseqüències:

- A^n es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$
- Si A és invertible $\Rightarrow$ A^{-1} es pot calcular com combinació lineal de $Id, A, \ldots, A^{n-1}$
- És útil per calcular $exp(A)$ (pàg. següent).

Exponential d'una matriu

Si f és un endomorfisme diagonalitzable amb matriu estàndard $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = P\ D\ P^{-1}$ amb D diagonal: $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $P = A_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}}$, i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és la base de VEPs corresponent. Aleshores, definim l'**exponential** de la matriu A:

$$e^A = P\ e^D\ P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

i coincideix amb $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$.

Matrius reals amb VAPs compexos

Si A és una matriu real i permetem diagonalització a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aleshores els VAP's i VEP's van "en parelles conjugades":

- $p_A(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \lambda$ és VAP de A si, i només si $\bar{\lambda}$ és VAP de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, i $w \in \mathbb{C}^n$ és VEP de VAP λ, aleshores podem escriure $w = u + iv$ amb $u, v \in \mathbb{R}^n$ i
- $\bar{w} := u - iv$ és VEP de VAP $\bar{\lambda}$.

Si volem treballar només a $\mathbb{R}$, podem reorganitzar els VAPs i VEPs complexos en parells conjugats per obtenir una "diagonalizació" de A en blocks 2×2: cal usar u, v en lloc dels VEPs $w, \bar{w}$.

Matrius reals amb VAPs compexos

Si A és una matriu real i permetem diagonalització a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aleshores els VAP's i VEP's van "en parelles conjugades":

- $p_A(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \lambda$ és VAP de A si, i només si $\bar{\lambda}$ és VAP de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, i $w \in \mathbb{C}^n$ és VEP de VAP λ, aleshores podem escriure $w = u + iv$ amb $u, v \in \mathbb{R}^n$ i
- $\bar{w} := u - iv$ és VEP de VAP $\bar{\lambda}$.

Si volem treballar només a $\mathbb{R}$, podem reorganitzar els VAPs i VEPs complexos en parells conjugats per obtenir una "diagonalizació" de A en blocks 2×2: cal usar u, v en lloc dels VEPs $w, \bar{w}$.

Matrius reals amb VAPs compexos

Si A és una matriu real i permetem diagonalització a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aleshores els VAP's i VEP's van "en parelles conjugades":

- $p_A(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \lambda$ és VAP de A si, i només si $\bar{\lambda}$ és VAP de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, i $w \in \mathbb{C}^n$ és VEP de VAP λ, aleshores podem escriure $w = u + iv$ amb $u, v \in \mathbb{R}^n$ i
- $\bar{w} := u - iv$ és VEP de VAP $\bar{\lambda}$.

Si volem treballar només a $\mathbb{R}$, podem reorganitzar els VAPs i VEPs complexos en parells conjugats per obtenir una "diagonalizació" de A en blocks 2×2: cal usar u, v en lloc dels VEPs $w, \bar{w}$.

Outline

Bibliography

Basic:

- D. Poole, Linear Algebra, A modern introduction (3rd edition), Brooks/Cole, 2011. Chapter 6.

Additional

- Hernández Rodríguez, E.; Vàzquez Gallo, M.J.; Zurro Moro, M.A. Álgebra lineal y geometría [en línia]