Àlgebra lineal i geometria
2. Aplicacions lineals

Grau en Enginyeria Física

2024-25

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtiques

Marta Casanellas
Universitat Politècnica de Catalunya

Outline

Outline

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x, y, z) = (x + y, z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x, y) = (-y, x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0, 0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda.v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, Id.
- Exemple d'aplicació no lineal

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y,z) = (x+y, z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y) = (-y, x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0,0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda . v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, Id.
- Exemple d'aplicació no lineal

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y,z) = (x+y, z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y) = (-y, x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0,0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda.v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, *Id*.
- Exemple d'aplicació no lineal

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y,z) = (x+y, z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y) = (-y,x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0,0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda.v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, *Id*.
- Exemple d'aplicació no lineal

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y,z) = (x+y, z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y) = (-y, x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0,0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda.v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, *Id*.
- Exemple d'aplicació no lineal

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y,z) = (x+y,z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y) = (-y,x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0,0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda.v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, Id.
- Exemple d'aplicació no lineal

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y,z) = (x+y, z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y) = (-y, x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0,0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda.v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, Id.
- Exemple d'aplicació no lineal

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y,z) = (x+y,z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y) = (-y,x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0,0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda.v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, Id.
- Exemple d'aplicació no lineal

Definició

A **aplicació lineal** (o transformació lineal) entre dos $\mathbb{K}-$e.v. E i F és una aplicació que preserva combinacions lineals. Concretament,

Definició

$f : E \longrightarrow F$ és una **aplicació lineal** si

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per tot $u, v \in E$, i
2. $f(cv) = cf(v)$ per tot $c \in \mathbb{K}$ i $v \in E$.

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y,z) = (x+y,z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ on $f(x,y) = (-y,x)$ (*rotació* de $\pi/2$ i centre $(0,0)$)
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $f(v) = \lambda.v$ per $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homotècia*).
- $f : E \longrightarrow F$, $f(v) = \mathbf{0}$ $\forall v \in E$ s'anomena l'aplicació *zero*.
- $f : E \longrightarrow E$ $f(v) = v$ s'anomena *identitat*, Id.
- Exemple d'aplicació no lineal

Propietats d'aplicacions lineals

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v. Aleshores:

- f lineal $\Leftrightarrow f(au + bv) = af(u) + bf(v)\ \forall u, v \in E$ i $a, b \in \mathbb{K}$.
- f lineal $\Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Una aplicació lineal f ve determinada per la imatge d'una base (qualsevol):

Proposició

Donats una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E i vectors $v_1, \ldots, v_n \in F$ qualssevol, existeix una única aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ tal que $f(u_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Propietats d'aplicacions lineals

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v. Aleshores:

- f lineal $\Leftrightarrow f(au+bv) = af(u) + bf(v)$ $\forall u, v \in E$ i $a, b \in \mathbb{K}$.
- f lineal $\Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Una aplicació lineal f ve determinada per la imatge d'una base (qualsevol):

Proposició

Donats una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E i vectors $v_1, \ldots, v_n \in F$ qualssevol, existeix una única aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ tal que $f(u_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Propietats d'aplicacions lineals

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v. Aleshores:

- f lineal $\Leftrightarrow f(au + bv) = af(u) + bf(v)\ \forall u, v \in E$ i $a, b \in \mathbb{K}$.
- f lineal $\Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Una aplicació lineal f ve determinada per la imatge d'una base (qualsevol):

Proposició

Donats una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de E i vectors $v_1, \dots, v_n \in F$ qualssevol, existeix una única aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ tal que $f(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Propietats d'aplicacions lineals

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v. Aleshores:

- f lineal $\Leftrightarrow f(au + bv) = af(u) + bf(v)$ $\forall u, v \in E$ i $a, b \in \mathbb{K}$.
- f lineal $\Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Una aplicació lineal f ve determinada per la imatge d'una base (qualsevol):

Proposició

Donats una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E i vectors $v_1, \ldots, v_n \in F$ qualssevol, existeix una única aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ tal que $f(u_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Aplicacions $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ i matrius

- Exemple bàsic d'aplicació lineal: donada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, l'aplicació $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ definida com

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(v) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Totes les aplicacions lineals $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ són d'aquest tipus: en coordenades estàndard vénen donades per polinomis homogenis de grau 1:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \cdots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$$

i f correspon a $v \mapsto Av$ on $A = (a_{i,j})$; la columna i de A és $f(e_i)$.
- La **matriu estàndard** $M(f)$ d'una aplicació lineal $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és la matriu $m \times n$ que té per columnes els vectors $f(e_i)$:

$$M(f) = (f(e_1) \cdots f(e_n))$$

Aplicacions $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ i matrius

- Exemple bàsic d'aplicació lineal: donada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, l'aplicació $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ definida com

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(v) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Totes les aplicacions lineals $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ són d'aquest tipus: en coordenades estàndard vénen donades per polinomis homogenis de grau 1:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \cdots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$$

i f correspon a $v \mapsto Av$ on $A = (a_{i,j})$; la columna i de A és $f(e_i)$.

- La **matriu estàndard** $M(f)$ d'una aplicació lineal $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és la matriu $m \times n$ que té per columnes els vectors $f(e_i)$:

$$M(f) = (f(e_1) \cdots f(e_n))$$

Aplicacions $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ i matrius

- Exemple bàsic d'aplicació lineal: donada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, l'aplicació $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ definida com

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(v) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Totes les aplicacions lineals $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ són d'aquest tipus: en coordenades estàndard vénen donades per polinomis homogenis de grau 1:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \cdots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$$

  i f correspon a $v \mapsto Av$ on $A = (a_{i,j})$; la columna i de A és $f(e_i)$.
- La **matriu estàndard** $M(f)$ d'una aplicació lineal $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és la matriu $m \times n$ que té per columnes els vectors $f(e_i)$:

$$M(f) = (f(e_1) \cdots f(e_n))$$

Outline

Definicions

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v.

- f és **injectiva** si vectors diferents sempre tenen imatges diferents ($f(u) = f(v)$ implica $u = v$).
- f és **exhaustiva** si tot vector $v \in F$ és la imatge d'un vector $u \in E$, $v = f(u)$.
- EL conjunt de totes les imatges de vectore de E s'anomena la **Imatge** de f,

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F \mid v = f(u) \text{ per algun u } \in E\} \subseteq F$$

- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{Im}(f) = F$.
- f és **bijectiva** si és alhora injectiva i exhaustiva. Una aplicació lineal bijectiva s'anomena **isomorfisme**.

Definicions

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v.

- f és **injectiva** si vectors diferents sempre tenen imatges diferents ($f(u) = f(v)$ implica $u = v$).
- f és **exhaustiva** si tot vector $v \in F$ és la imatge d'un vector $u \in E$, $v = f(u)$.
- EL conjunt de totes les imatges de vectore de E s'anomena la **Imatge** de f,

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F \mid v = f(u) \text{ per algun u } \in E\} \subseteq F$$

- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{Im}(f) = F$.
- f és **bijectiva** si és alhora injectiva i exhaustiva. Una aplicació lineal bijectiva s'anomena **isomorfisme**.

Definicions

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v.

- f és **injectiva** si vectors diferents sempre tenen imatges diferents ($f(u) = f(v)$ implica $u = v$).
- f és **exhaustiva** si tot vector $v \in F$ és la imatge d'un vector $u \in E$, $v = f(u)$.
- EL conjunt de totes les imatges de vectore de E s'anomena la **Imatge** de f,

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F \mid v = f(u) \text{ per algun u } \in E\} \subseteq F$$

- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{Im}(f) = F$.
- f és **bijectiva** si és alhora injectiva i exhaustiva. Una aplicació lineal bijectiva s'anomena **isomorfisme**.

Definicions

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v.

- f és **injectiva** si vectors diferents sempre tenen imatges diferents ($f(u) = f(v)$ implica $u = v$).
- f és **exhaustiva** si tot vector $v \in F$ és la imatge d'un vector $u \in E$, $v = f(u)$.
- EL conjunt de totes les imatges de vectore de E s'anomena la **Imatge** de f,

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F \mid \ v = f(u) \text{ per algun u } \in E\} \subseteq F$$

- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{Im}(f) = F$.
- f és **bijectiva** si és alhora injectiva i exhaustiva. Una aplicació lineal bijectiva s'anomena **isomorfisme**.

Definicions

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació entre $\mathbb{K}$-e.v.

- f és **injectiva** si vectors diferents sempre tenen imatges diferents ($f(u) = f(v)$ implica $u = v$).
- f és **exhaustiva** si tot vector $v \in F$ és la imatge d'un vector $u \in E$, $v = f(u)$.
- EL conjunt de totes les imatges de vectore de E s'anomena la **Imatge** de f,

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F \mid v = f(u) \text{ per algun u } \in E\} \subseteq F$$

- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{Im}(f) = F$.
- f és **bijectiva** si és alhora injectiva i exhaustiva. Una aplicació lineal bijectiva s'anomena **isomorfisme**.

Nucli

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

El **nucli** (o *kernel o nullspace*) de f és el subespai

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in E \mid f(v) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \subset E.$$

Teorema

Una aplicació lineal f és injectiva si, i només si, $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és lineal i A és la seva matriu estàndard, aleshores

- $\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.
- $\dim \mathrm{Nuc}(f) = n - \mathrm{rang}(A)$.
- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$ (=nombre de columnes).
- f injectiva $\Rightarrow n \leq m$.

Nucli

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

El **nucli** (o *kernel o nullspace*) de f és el subespai

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in E \mid f(v) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \subset E.$$

Teorema

Una aplicació lineal f és injectiva si, i només si, $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és lineal i A és la seva matriu estàndard, aleshores

- $\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.
- $\dim \mathrm{Nuc}(f) = n - \mathrm{rang}(A)$.
- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$ (=nombre de columnes).
- f injectiva $\Rightarrow n \leq m$.

Nucli

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

El **nucli** (o *kernel o nullspace*) de f és el subespai

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in E \mid f(v) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \subset E.$$

Teorema

Una aplicació lineal f és injectiva si, i només si, $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és lineal i A és la seva matriu estàndard, aleshores

- $\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.
- $\dim \mathrm{Nuc}(f) = n - \mathrm{rang}(A)$.
- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$ (=nombre de columnes).
- f injectiva $\Rightarrow n \leq m$.

Nucli

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

El **nucli** (o *kernel o nullspace*) de f és el subespai

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in E \mid f(v) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \subset E.$$

Teorema

Una aplicació lineal f és injectiva si, i només si, $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és lineal i A és la seva matriu estàndard, aleshores

- $\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.
- $\dim \mathrm{Nuc}(f) = n - \mathrm{rang}(A)$.
- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$ (=nombre de columnes).
- f injectiva $\Rightarrow n \leq m$.

Nucli

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

El **nucli** (o *kernel o nullspace*) de f és el subespai

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in E \mid f(v) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \subset E.$$

Teorema

Una aplicació lineal f és injectiva si, i només si, $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és lineal i A és la seva matriu estàndard, aleshores

- $\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.
- $\dim \mathrm{Nuc}(f) = n - \mathrm{rang}(A)$.
- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$ (=nombre de columnes).
- f injectiva $\Rightarrow n \leq m$.

Nucli

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

El **nucli** (o *kernel o nullspace*) de f és el subespai

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in E \mid f(v) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \subset E.$$

Teorema

Una aplicació lineal f és injectiva si, i només si, $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és lineal i A és la seva matriu estàndard, aleshores

- $\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.
- $\dim \mathrm{Nuc}(f) = n - \mathrm{rang}(A)$.
- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$ (=nombre de columnes).
- f injectiva $\Rightarrow n \leq m$.

Nucli

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

El **nucli** (o *kernel o nullspace*) de f és el subespai

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in E \mid f(v) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \subset E.$$

Teorema

Una aplicació lineal f és injectiva si, i només si, $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és lineal i A és la seva matriu estàndard, aleshores

- $\mathrm{Nuc}(f) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.
- $\dim \mathrm{Nuc}(f) = n - \mathrm{rang}(A)$.
- f és injectiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = n$ (=nombre de columnes).
- f injectiva $\Rightarrow n \leq m$.

Imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

La **imatge de** $V \subseteq E$ és el conjunt

$$f(V) := \{w \in F |\, w = f(u) \text{ per algun } u \in V\}.$$

- Si V és un subespai $\Rightarrow f(V)$ és també un subespai.
- Si $V = [u_1, \dots, u_d] \subset E \Rightarrow f(V) = [f(u_1), \dots, f(u_d)] \subset F$.
- Si $u_1, \dots, u_d$ són linealment independents, $f(u_1), \dots, f(u_d)$ NO són necessàriament l.i.
- $\mathrm{Im}(f) = f(E) = [f(u_1), \dots, f(u_n)]$ si $\{u_1, \dots, u_n\}$ és una base de E.
- $\dim \mathrm{Im}(f)$ s'anomena **rang** de f.

Imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

La **imatge de** $V \subseteq E$ és el conjunt

$$f(V) := \{w \in F \mid w = f(u) \text{ per algun } u \in V\}.$$

- Si V és un subespai $\Rightarrow f(V)$ és també un subespai.
- Si $V = [u_1, \ldots, u_d] \subset E \Rightarrow f(V) = [f(u_1), \ldots, f(u_d)] \subset F$.
- Si $u_1, \ldots, u_d$ són linealment independents, $f(u_1), \ldots, f(u_d)$ NO són necessàriament l.i.
- $\mathrm{Im}(f) = f(E) = [f(u_1), \ldots, f(u_n)]$ si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de E.
- $\dim \mathrm{Im}(f)$ s'anomena **rang** de f.

Imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

La **imatge de** $V \subseteq E$ és el conjunt

$$f(V) := \{w \in F | \, w = f(u) \text{ per algun } u \in V\}.$$

- Si V és un subespai $\Rightarrow f(V)$ és també un subespai.
- Si $V = [u_1, \ldots, u_d] \subset E \Rightarrow f(V) = [f(u_1), \ldots, f(u_d)] \subset F$.
- Si $u_1, \ldots, u_d$ són linealment independents, $f(u_1), \ldots, f(u_d)$ NO són necessàriament l.i.
- $\text{Im}(f) = f(E) = [f(u_1), \ldots, f(u_n)]$ si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de E.
- $\dim \text{Im}(f)$ s'anomena **rang** de f.

Imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

La **imatge de** $V \subseteq E$ és el conjunt

$$f(V) := \{w \in F \mid w = f(u) \text{ per algun } u \in V\}.$$

- Si V és un subespai $\Rightarrow f(V)$ és també un subespai.
- Si $V = [u_1, \ldots, u_d] \subset E \Rightarrow f(V) = [f(u_1), \ldots, f(u_d)] \subset F$.
- Si $u_1, \ldots, u_d$ són linealment independents, $f(u_1), \ldots, f(u_d)$ NO són necessàriament l.i.
- $\mathrm{Im}(f) = f(E) = [f(u_1), \ldots, f(u_n)]$ si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de E.
- $\dim \mathrm{Im}(f)$ s'anomena **rang** de f.

Imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

La **imatge de** $V \subseteq E$ és el conjunt

$$f(V) := \{w \in F \,|\, w = f(u) \text{ per algun } u \in V\}.$$

- Si V és un subespai $\Rightarrow f(V)$ és també un subespai.
- Si $V = [u_1, \dots, u_d] \subset E \Rightarrow f(V) = [f(u_1), \dots, f(u_d)] \subset F$.
- Si $u_1, \dots, u_d$ són linealment independents, $f(u_1), \dots, f(u_d)$ NO són necessàriament l.i.
- $\mathrm{Im}(f) = f(E) = [f(u_1), \dots, f(u_n)]$ si $\{u_1, \dots, u_n\}$ és una base de E.
- $\dim \mathrm{Im}(f)$ s'anomena **rang** de f.

Imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

La **imatge de** $V \subseteq E$ és el conjunt

$$f(V) := \{w \in F |\, w = f(u) \text{ per algun } u \in V\}.$$

- Si V és un subespai $\Rightarrow f(V)$ és també un subespai.
- Si $V = [u_1, \dots, u_d] \subset E \Rightarrow f(V) = [f(u_1), \dots, f(u_d)] \subset F$.
- Si $u_1, \dots, u_d$ són linealment independents, $f(u_1), \dots, f(u_d)$ NO són necessàriament l.i.
- $\mathrm{Im}(f) = f(E) = [f(u_1), \dots, f(u_n)]$ si $\{u_1, \dots, u_n\}$ és una base de E.
- $\dim \mathrm{Im}(f)$ s'anomena **rang** de f.

Imatge per a $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

Sigui $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i sigui A la seva matriu estàndard. Aleshores,

- $\mathrm{Im}(f) = [\text{columnes de A}]$.
- $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rang}(A)$.
- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{rang}(A) = m$ ($=$ nombre de files).
- f exhaustiva $\Rightarrow m \leq n$.

Imatge per a $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

Sigui $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i sigui A la seva matriu estàndard. Aleshores,

- $\mathrm{Im}(f) = [\text{columnes de A}]$.
- $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rang}(A)$.
- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{rang}(A) = m$ ($=$ nombre de files).
- f exhaustiva $\Rightarrow m \leq n$.

Imatge per a $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

Sigui $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i sigui A la seva matriu estàndard. Aleshores,

- $\mathrm{Im}(f) = [\text{columnes de A}]$.
- $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rang}(A)$.
- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{rang}(A) = m$ ($=$ nombre de files).
- f exhaustiva $\Rightarrow m \leq n$.

Imatge per a $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

Sigui $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ una aplicació lineal i sigui A la seva matriu estàndard. Aleshores,

- $\mathrm{Im}(f) = [\text{columnes de A}]$.
- $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rang}(A)$.
- f és exhaustiva si, i només si, $\mathrm{rang}(A) = m$ ($=$ nombre de files).
- f exhaustiva $\Rightarrow m \leq n$.

Teorema (Teorema del rang)

Sigui $f : E \longrightarrow F$ *una aplicació lineal i suposem que* E *té dimensió finita. Aleshores,* $\mathrm{Nuc}(f)$ *i* $\mathrm{Im}(f)$ *tenen dimensió finita i*

$$\dim \mathrm{Nuc}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$$

Anti-imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

L'**anti-imatge** de $W \subseteq F$ és $f^{-1}(W) := \{u \in E \mid f(u) \in W\} \subseteq E$.

Lema

1. *Si $u \in E$ i $v \in F$ satisfan $f(u) = v$, aleshores*

$$f^{-1}(\{v\}) = \{u + w \mid w \in \mathrm{Nuc}(f)\}.$$

2. *Si W és un subespai, $f^{-1}(W)$ també ho és.*

Anti-imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

L'**anti-imatge** de $W \subseteq F$ és $f^{-1}(W) := \{u \in E \mid f(u) \in W\} \subseteq E$.

Lema

1. *Si $u \in E$ i $v \in F$ satisfan $f(u) = v$, aleshores*

$$f^{-1}(\{v\}) = \{u + w \mid w \in \mathrm{Nuc}(f)\}.$$

2. *Si W és un subespai, $f^{-1}(W)$ també ho és.*

Anti-imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

L'**anti-imatge** de $W \subseteq F$ és $f^{-1}(W) := \{u \in E \mid f(u) \in W\} \subseteq E$.

Lema

1. *Si $u \in E$ i $v \in F$ satisfan $f(u) = v$, aleshores*

$$f^{-1}(\{v\}) = \{u + w \,|\, w \in \mathrm{Nuc}(f)\}.$$

2. *Si W és un subespai, $f^{-1}(W)$ també ho és.*

Anti-imatge d'un subespai

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Definició

L'**anti-imatge** de $W \subseteq F$ és $f^{-1}(W) := \{u \in E \mid f(u) \in W\} \subseteq E$.

Lema

1. *Si* $u \in E$ *i* $v \in F$ *satisfan* $f(u) = v$*, aleshores*

$$f^{-1}(\{v\}) = \{u + w \,|\, w \in \mathrm{Nuc}(f)\}.$$

2. *Si* W *és un subespai,* $f^{-1}(W)$ *també ho és.*

Outline

Composició d'aplicacions lineals

Sigui $f : E \longrightarrow F$ i $g : F \longrightarrow G$ aplicacions lineals, la **composició** de g amb f és l'aplicació lineal $g \circ f : E \longrightarrow G$ definida com:

$$\begin{array}{rcccl} g \circ f : E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ v & \mapsto & f(v) & \mapsto & (g \circ f)(v) := g(f(v)) \end{array} .$$

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ té matriu estàndard A i $g : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^p$ té matriu estàndard $B \Rightarrow$ la matriu estàndard de $g \circ f$ és

$$M(g \circ f) = BA.$$

Inversa d'aplicacions lineals

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, diem que $g : F \longrightarrow E$ és la **inversa** de f (i es denota $g = f^{-1}$) si

$$g \circ f = f \circ g = Id.$$

Nota: f és invertible $\Leftrightarrow$ f és bijectiva.

Una aplicació lineal invertible s'anomena **isomorfisme**. Dos $\mathbb{K}$-ev. són **isomorfs** si existeix un isomorfisme $f : E \longrightarrow F$; en aquest cas usem la notació $E \cong F$.

Propietats:

- Si f és iso. $\Rightarrow$ f^{-1} és aplicació lineal.
- Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ és iso. i té matriu estàndard $A \Rightarrow M(f^{-1}) = A^{-1}$.
- Si f té aplicació inversa f^{-1}, aleshores l'anti-imatge $f^{-1}(W)$ d'un subespai W coincideix amb la seva imatge per f^{-1}.

Inversa d'aplicacions lineals

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, diem que $g : F \longrightarrow E$ és la **inversa** de f (i es denota $g = f^{-1}$) si

$$g \circ f = f \circ g = Id.$$

Nota: f és invertible $\Leftrightarrow$ f és bijectiva.

Una aplicació lineal invertible s'anomena **isomorfisme**. Dos $\mathbb{K}$-ev. són **isomorfs** si existeix un isomorfisme $f : E \longrightarrow F$; en aquest cas usem la notació $E \cong F$.

Propietats:

- Si f és iso. $\Rightarrow$ f^{-1} és aplicació lineal.
- Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ és iso. i té matriu estàndard $A \Rightarrow M(f^{-1}) = A^{-1}$.
- Si f té aplicació inversa f^{-1}, aleshores l'anti-imatge $f^{-1}(W)$ d'un subespai W coincideix amb la seva imatge per f^{-1}.

Inversa d'aplicacions lineals

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, diem que $g : F \longrightarrow E$ és la **inversa** de f (i es denota $g = f^{-1}$) si

$$g \circ f = f \circ g = Id.$$

Nota: f és invertible $\Leftrightarrow$ f és bijectiva.

Una aplicació lineal invertible s'anomena **isomorfisme**. Dos $\mathbb{K}$-ev. són **isomorfs** si existeix un isomorfisme $f : E \longrightarrow F$; en aquest cas usem la notació $E \cong F$.

Propietats:

- Si f és iso. $\Rightarrow$ f^{-1} és aplicació lineal.
- Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ és iso. i té matriu estàndard $A \Rightarrow$ $M(f^{-1}) = A^{-1}$.
- Si f té aplicació inversa f^{-1}, aleshores l'anti-imatge $f^{-1}(W)$ d'un subespai W coincideix amb la seva imatge per f^{-1}.

Caracteritzations d'aplicacions inj./exh.

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal entre espais vectorials de dimensió finita, aleshores:

- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$.
- f és exhaustiva $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = \dim F \Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Nuc}(f) = \dim E - \dim F$.
- f és bijectiva $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$ i $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$ $\dim E = \dim F$ i $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$.
- Si $\dim E = \dim F$, aleshores f és bijectiva $\Leftrightarrow$ injectiva $\Leftrightarrow$ exhaustiva.

Caracteritzations d'aplicacions inj./exh.

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal entre espais vectorials de dimensió finita, aleshores:

- f és injectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = \dim E$.
- f és exhaustiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = \dim F \Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Nuc}(f) = \dim E - \dim F$.
- f és bijectiva $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$ i $\operatorname{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$ $\dim E = \dim F$ i $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim F$.
- Si $\dim E = \dim F$, aleshores f és bijectiva $\Leftrightarrow$ injectiva $\Leftrightarrow$ exhaustiva.

Caracteritzations d'aplicacions inj./exh.

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal entre espais vectorials de dimensió finita, aleshores:

- f és injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$.
- f és exhaustiva $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = \dim F \Leftrightarrow \dim \mathrm{Nuc}(f) = \dim E - \dim F$.
- f és bijectiva $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$ i $\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim E = \dim F$ i $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$.
- Si $\dim E = \dim F$, aleshores f és bijectiva $\Leftrightarrow$ injectiva $\Leftrightarrow$ exhaustiva.

Caracteritzations d'aplicacions inj./exh.

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal entre espais vectorials de dimensió finita, aleshores:

- f és injectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = \dim E$.
- f és exhaustiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = \dim F \Leftrightarrow \dim \operatorname{Nuc}(f) = \dim E - \dim F$.
- f és bijectiva $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$ i $\operatorname{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim E = \dim F$ i $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim F$.
- Si $\dim E = \dim F$, aleshores f és bijectiva $\Leftrightarrow$ injectiva $\Leftrightarrow$ exhaustiva.

Isomorfisme de e.v. de dimensió finita

Proposició

Si $\dim(E) = n$ *i* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *és una base de* E*, aleshores*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ v & \mapsto & v_B \end{array}$$

és un isomorfisme.

Teorema

Si E *i* F *són* $\mathbb{K}$*-e.v. de dimensió finita, aleshores*

$$E \cong F \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F).$$

En particular, tot $\mathbb{K}$*-e.v. de dimensió* n *és isomorf a* $\mathbb{K}^n$*.*

Isomorfisme de e.v. de dimensió finita

Proposició

Si $\dim(E) = n$ *i* $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *és una base de* E*, aleshores*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ v & \mapsto & v_B \end{array}$$

és un isomorfisme.

Teorema

Si E *i* F *són* $\mathbb{K}$*-e.v. de dimensió finita, aleshores*

$$E \cong F \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F).$$

En particular, tot $\mathbb{K}$*-e.v. de dimensió* n *és isomorf a* $\mathbb{K}^n$*.*

Outline

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal entre $\mathbb{K}$-e.v. amb $n = \dim E$, $m = \dim F$. Siguin $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de E i F (resp.).

Definició

La **matriu de f en bases u,v** és la matriu $m \times n$ que té per columnes les coordenades de $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ en la base $\mathbf{v}$:

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = \Big(f(u_1)_{\mathbf{v}} \cdots f(u_n)_{\mathbf{v}} \Big).$$

Propietats:

- Si $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$ i $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ son les bases estàndard $\Rightarrow$ obtenim la *matriu estàndard* $M(f)$.
- Si $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = (a_{i,j})_{i,j} \Rightarrow f(u_j) = \sum_i a_{i,j} v_i$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f)(w_{\mathbf{u}}) = (f(w))_{\mathbf{v}}$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(g \circ f) = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g) M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)$:

$$g \circ f : E_{\mathbf{u}} \xrightarrow[M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)]{f} F_{\mathbf{w}} \xrightarrow[M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g)]{g} G_{\mathbf{v}}.$$

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal entre $\mathbb{K}$-e.v. amb $n = \dim E$, $m = \dim F$. Siguin $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de E i F (resp.).

Definició

La **matriu de f en bases u,v** és la matriu $m \times n$ que té per columnes les coordenades de $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ en la base $\mathbf{v}$:

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = \Big(f(u_1)_{\mathbf{v}} \cdots f(u_n)_{\mathbf{v}} \Big).$$

Propietats:

- Si $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$ i $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ son les bases estàndard $\Rightarrow$ obtenim la *matriu estàndard* $M(f)$.
- Si $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = (a_{i,j})_{i,j} \Rightarrow f(u_j) = \sum_i a_{i,j} v_i$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f)(w_{\mathbf{u}}) = (f(w))_{\mathbf{v}}$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(g \circ f) = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g) M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)$:

$$g \circ f : E_{\mathbf{u}} \xrightarrow[M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)]{f} F_{\mathbf{w}} \xrightarrow[M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g)]{g} G_{\mathbf{v}}.$$

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal entre $\mathbb{K}$-e.v. amb $n = \dim E$, $m = \dim F$. Siguin $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de E i F (resp.).

Definició

La **matriu de f en bases u,v** és la matriu $m \times n$ que té per columnes les coordenades de $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ en la base $\mathbf{v}$:

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = \Big(f(u_1)_{\mathbf{v}} \cdots f(u_n)_{\mathbf{v}} \Big).$$

Propietats:

- Si $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$ i $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ son les bases estàndard $\Rightarrow$ obtenim la *matriu estàndard* $M(f)$.
- Si $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = (a_{i,j})_{i,j} \Rightarrow f(u_j) = \sum_i a_{i,j} v_i$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f)(w_{\mathbf{u}}) = (f(w))_{\mathbf{v}}$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(g \circ f) = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g) M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)$:

$$g \circ f : E_{\mathbf{u}} \xrightarrow[M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)]{f} F_{\mathbf{w}} \xrightarrow[M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g)]{g} G_{\mathbf{v}}.$$

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal entre $\mathbb{K}$-e.v. amb $n = \dim E$, $m = \dim F$. Siguin $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de E i F (resp.).

Definició

La **matriu de f en bases u,v** és la matriu $m \times n$ que té per columnes les coordenades de $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ en la base $\mathbf{v}$:

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = \Big(f(u_1)_{\mathbf{v}} \cdots f(u_n)_{\mathbf{v}} \Big).$$

Propietats:

- Si $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$ i $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ son les bases estàndard $\Rightarrow$ obtenim la *matriu estàndard* $M(f)$.
- Si $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = (a_{i,j})_{i,j} \Rightarrow f(u_j) = \sum_i a_{i,j} v_i$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f)(w_{\mathbf{u}}) = (f(w))_{\mathbf{v}}$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(g \circ f) = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g) M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)$:

$$g \circ f : E_{\mathbf{u}} \xrightarrow[M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)]{f} F_{\mathbf{w}} \xrightarrow[M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g)]{g} G_{\mathbf{v}}.$$

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal entre $\mathbb{K}$-e.v. amb $n = \dim E$, $m = \dim F$. Siguin $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de E i F (resp.).

Definició

La **matriu de f en bases u,v** és la matriu $m \times n$ que té per columnes les coordenades de $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ en la base $\mathbf{v}$:

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = \Big(f(u_1)_{\mathbf{v}} \cdots f(u_n)_{\mathbf{v}} \Big).$$

Propietats:

- Si $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$ i $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ son les bases estàndard $\Rightarrow$ obtenim la *matriu estàndard* $M(f)$.
- Si $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = (a_{i,j})_{i,j} \Rightarrow f(u_j) = \sum_i a_{i,j} v_i$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f)(w_{\mathbf{u}}) = (f(w))_{\mathbf{v}}$.
- $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(g \circ f) = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g) M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)$:

$$g \circ f : E_{\mathbf{u}} \xrightarrow[M_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(f)]{f} F_{\mathbf{w}} \xrightarrow[M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(g)]{g} G_{\mathbf{v}} .$$

Canvi de base com a matrius d'aplicacions lineals

Si $A_{\mathbf{u}\to\mathbf{e}}$ és la matriu de canvi de base de **u** a **e**, aquesta matriu es pot entendre com la **matriu de l'aplicació identitat** en certes bases:

$$A_{\mathbf{u}\to\mathbf{e}} = M_{\mathbf{u},\mathbf{e}}(Id).$$

Nota: La matriu de aplicació identitat és la matriu identitat si prenem la mateixa base als dos espais.

Si $A_{\mathbf{u}\to\mathbf{u'}}$ és la matriu de canvi de base de **u** a **u'**, i $A_{\mathbf{v}\to\mathbf{v'}}$ és la matriu de canvi de base de **v** a **v'**, aleshores:

$$M_{\mathbf{u'},\mathbf{v'}}(f) = A_{\mathbf{v}\to\mathbf{v'}}\, M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f)\, A^{-1}_{\mathbf{u}\to\mathbf{u'}}\,,$$

$$M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) = A^{-1}_{\mathbf{v}\to\mathbf{v'}}\, M_{\mathbf{u'},\mathbf{v'}}(f)\, A_{\mathbf{u}\to\mathbf{u'}}\,.$$

Espai vectorial de les aplicacions lineals

El conjunt d'aplicacions lineals entre $\mathbb{K}$-e.v, E, F es denota com $L(E,F)$.
És un $\mathbb{K}$-e.v amb la suma i producte per escalars habituals: si $f, g \in L(E,F)$ i $c \in \mathbb{K}$,

+ $f+g$ és l'aplicació $(f+g)(v) := f(v)+g(v)$, $v \in E$.
· $c \cdot f$ és l'aplicació $(c \cdot f)(v) := cf(v)$, $v \in E$.

Teorema

Siguin $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de E i F, respectivament. Aleshores l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & L(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) \end{array}$$

és un isomorfisme.

Espai vectorial de les aplicacions lineals

El conjunt d'aplicacions lineals entre $\mathbb{K}$-e.v, E, F es denota com $L(E, F)$.
És un $\mathbb{K}$-e.v amb la suma i producte per escalars habituals: si $f, g \in L(E, F)$ i $c \in \mathbb{K}$,

+ $f + g$ és l'aplicació $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$, $v \in E$.
· $c \cdot f$ és l'aplicació $(c \cdot f)(v) := cf(v)$, $v \in E$.

Teorema

Siguin $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de E i F, respectivament. Aleshores l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \varphi : L(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) \end{array}$$

és un isomorfisme.

Espai vectorial de les aplicacions lineals

El conjunt d'aplicacions lineals entre $\mathbb{K}$-e.v, E, F es denota com $L(E, F)$.
És un $\mathbb{K}$-e.v amb la suma i producte per escalars habituals: si $f, g \in L(E, F)$ i $c \in \mathbb{K}$,

- $+$ $f + g$ és l'aplicació $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$, $v \in E$.
- $\cdot$ $c \cdot f$ és l'aplicació $(c \cdot f)(v) := cf(v)$, $v \in E$.

Teorema

Siguin $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de E i F, respectivament. Aleshores l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \varphi : L(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(f) \end{array}$$

és un isomorfisme.

Outline

Endomorfismes

Un **endomorfisme** de E és una aplicació lineal de E en ell mateix.

Notació

- $End(E) = \{f : E \longrightarrow E \mid f \text{ aplicació lineal } \}$.
- Si $f \in End(E)$ i $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de E, denotem per $M_{\mathbf{u}}(f)$ la matriu $M_{\mathbf{u},\mathbf{u}}(f)$.
- Amb la composició podem definir f^m per tot $m \in \mathbb{N}$:

$$f^m = f \circ \overset{m)}{\ldots} \circ f.$$

- $M_{\mathbf{u}}(f^m) = M_{\mathbf{u}}(f)^m$, per qualsevol base $\mathbf{u}$

Endomorfismes

Un **endomorfisme** de E és una aplicació lineal de E en ell mateix.

Notació

- $End(E) = \{f : E \longrightarrow E \mid f \text{ aplicació lineal } \}$.
- Si $f \in End(E)$ i $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ és una base de E, denotem per $M_{\mathbf{u}}(f)$ la matriu $M_{\mathbf{u},\mathbf{u}}(f)$.
- Amb la composició podem definir f^m per tot $m \in \mathbb{N}$:

$$f^m = f \circ \overset{m)}{\dots} \circ f.$$

- $M_{\mathbf{u}}(f^m) = M_{\mathbf{u}}(f)^m$, per qualsevol base $\mathbf{u}$

Endomorfismes

Un **endomorfisme** de E és una aplicació lineal de E en ell mateix.

Notació

- $End(E) = \{f : E \longrightarrow E \mid f \text{ aplicació lineal } \}$.
- Si $f \in End(E)$ i $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ és una base de E, denotem per $M_{\mathbf{u}}(f)$ la matriu $M_{\mathbf{u},\mathbf{u}}(f)$.
- Amb la composició podem definir f^m per tot $m \in \mathbb{N}$:

$$f^m = f \circ \overset{m)}{\cdots} \circ f.$$

- $M_{\mathbf{u}}(f^m) = M_{\mathbf{u}}(f)^m$, per qualsevol base $\mathbf{u}$

Endomorfismes

Un **endomorfisme** de E és una aplicació lineal de E en ell mateix.
Notació

- $End(E) = \{f : E \longrightarrow E \mid f \text{ aplicació lineal } \}$.
- Si $f \in End(E)$ i $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de E, denotem per $M_{\mathbf{u}}(f)$ la matriu $M_{\mathbf{u},\mathbf{u}}(f)$.
- Amb la composició podem definir f^m per tot $m \in \mathbb{N}$:

$$f^m = f \circ \overset{m)}{\cdots} \circ f.$$

- $M_{\mathbf{u}}(f^m) = M_{\mathbf{u}}(f)^m$, per qualsevol base $\mathbf{u}$

Determinant d'un endomorfisme

Definició

El **determinant** d'un endomorfisme $f \in End(E)$ (E de dimensió finita) és el determinant de la seva matriu en *qualsevol* base $\mathbf{u}$,

$$\det(f) = \det(M_{\mathbf{u}}(f)).$$

No depèn de la base i es té

$$\det(g \circ f) = \det g \det f.$$

TraCca

- La traCca no depèn de la base tampoc: si **u** i **v** son dues bases de E ($\dim E < \infty$), aleshores

$$\operatorname{tr}(M_{\mathbf{u}}(f)) = \operatorname{tr}(M_{\mathbf{v}}(f)).$$

- Això s'anomena la **traCca de l'endomorfisme** i es denota per $\operatorname{tr}(f)$.

TraCca

- La traCca no depèn de la base tampoc: si **u** i **v** son dues bases de E ($\dim E < \infty$), aleshores

$$\mathrm{tr}(M_{\mathbf{u}}(f)) = \mathrm{tr}(M_{\mathbf{v}}(f)).$$

- Això s'anomena la **traCca de l'endomorfisme** i es denota per $\mathrm{tr}(f)$.

Subespais invariants

Sigui $f \in End(E)$ i $F \subseteq E$ un subespai.

Definició

F és f-**invariant** (o invariant per f) si $f(F) \subseteq F$.
En aquest cas definim la **restricció** de f a F com l'endomorfisme $f_{|F} \in End(F)$ donat per $f_{|F}(v) := f(v)$.

Proposició

Sigui $\mathbf{u} = \{u_1 \dots u_n\}$ una base de E obtinguda per extensió d'una base $B = \{u_1, \dots, u_d\}$ d'un subespai $F \subset E$. Aleshores F és f-invariant si, i només si,

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline \mathbf{0} & * \end{array}\right),$$

on $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. En aquest cas, $A = M_B(f_{|F})$.

Subespais invariants

Sigui $f \in End(E)$ i $F \subseteq E$ un subespai.

Definició

F és **f-invariant** (o invariant per f) si $f(F) \subseteq F$.
En aquest cas definim la **restricció** de f a F com l'endomorfisme $f_{|F} \in End(F)$ donat per $f_{|F}(v) := f(v)$.

Proposició

Sigui $\mathbf{u} = \{u_1 \dots u_n\}$ una base de E obtinguda per extensió d'una base $B = \{u_1, \dots, u_d\}$ d'un subespai $F \subset E$. Aleshores F és f-invariant si, i només si,

$$M_{\mathbf{u}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline \mathbf{0} & * \end{array}\right),$$

on $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. En aquest cas, $A = M_B(f_{|F})$.

Outline

Bibliografia

Basic:

- D. Poole, Linear Algebra, A modern introduction (3rd edition), Brooks/Cole, 2011. Chapter 6.

Additional

- Hernández Rodríguez, E.; Vàzquez Gallo, M.J.; Zurro Moro, M.A. Álgebra lineal y geometría [en línia]