Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^{o}34(2006), 118–123

Resultados no perturbativos en dinámica cuasiperiódica lineal*

Joaquim Puig

Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya
Av. Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain

joaquim.puig@upc.edu

Resumen

En esta charla discutiremos algunos resultados recientes en dinámica cuasiperiódica, centrándonos en problemas de linealización alrededor de trayectorias cuasiperiódicas en sistemas dinámicos discretos, conservativos y bidimensionales. En concreto trataremos del rango de validez de determinados resultados perturbativos de linealización alrededor de curvas invariantes cuasiperiódicas dependiendo de las propiedades diofánticas de la frecuencia de la trayectoria.

1 Estabilidad lineal de trayectorias cuasiperiódicas

Uno de los problemas más relevantes en los sistemas dinámicos hamiltonianos es el de la estabilidad, de gran relevancia en cuestiones de mecánica celeste, aceleradores de partículas y sistemas mecánicos en general. Cuando el hamiltoniano es integrable las trayectorias son, salvo casos extremos, estables y se disponen en variedades invariantes, difeomorfas a toros, cuya dinámica es cuasiperiódica con varias frecuencias linealmente independientes. La persistencia de la mayoría de estas trayectorias bajo perturbaciones generales y suficientemente pequeñas y regulares del hamiltoniano, problema estudiado ya por Poincaré, fue demostrada mediante la teoría KAM a partir de los años 50 del pasado siglo. Cuando uno intenta describir el espacio de fase alrededor de estas trayectorias o determinar cual es el rango de validez de estos resultados pertubativos, nos vemos encaminados a estudiar la linealización del sistema

*Este trabajo ha sido financiado por el programa "Juan de la Cierva" del MEC y, en parte, por las ayudas DGICYT BFM2000-805, BFM2003-09504-C02-01 y CIRIT 2001 SGR-70

dinámico alrededor de trayectorias cuasiperiódicas, es decir, sistemas lineales que dependan cuasiperiódicamente del tiempo.

En esta charla tomaremos como punto de partida la *aplicación estándar* o *aplicación de Chirikov*, que es el siguiente sistema dinámico en $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$,

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_{n+1} = & x_n + y_{n+1} \qquad (\mathrm{mod}) 2\pi \\ y_{n+1} = & y_n - \kappa \operatorname{sen}(x_n) \end{array} \right. , \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Este es un modelo muy usual en el estudio de difeomorfismos que preserven área del toro. El parámetro κ es un parámetro perturbativo, puesto que para $\kappa = 0$ el sistema es integrable y todas las trayectorias son cuasiperiódicas y situadas sobre las *curvas invariantes* $y = y_0$. Cuando $\kappa > 0$ es suficientemente pequeño, una cantidad relativamente grande de estas trayectorias cuasiperiódicas persiste (aunque el sistema ya no sea integrable) y se disponen sobre curvas invariantes analíticas. Es decir, tenemos órbitas de la forma

$$(x_n, y_n) = \Phi(2\pi\omega n) = (\varphi_1(2\pi\omega n), \varphi_2(2\pi\omega n)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ es analítica real y ω es la frecuencia de la trayectoria cuasiperiódica (que coincide con y_0 en el caso de $\kappa = 0$). La linealización alrededor de esta trayectoria viene dada por sus ecuaciones variacionales de primer orden

$$v_{n+1} = DF(x_n) v_n = \begin{pmatrix} 1 - \kappa \cos(x_n) & 1 \\ -\kappa \cos(x_n) & 1 \end{pmatrix} v_n \tag{2}$$

que dependen cuasiperiódicamente de n. Si escribimos $A(\theta) = DF(\Phi(\theta))$, entonces podemos ver (2) como un elemento de la siguiente familia de *"skew-products"* o *sistemas triangulares* cuasiperiódicos

$$v_{n+1} = A(\theta_n) v_n, \ \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega$$

que es un sistema dinámico lineal en el espacio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$. Dado su carácter lineal, podemos estudiar la dinámica globalmente mediante el siguiente "skew-product"

$$X_{n+1} = A(\theta_n) X_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega \tag{3}$$

definido en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$ puesto que todas las matrices $A(\theta)$ tienen determinante uno (al ser F conservativa). Nos interesará clasificar dinámicamente estos sistemas. Para ello es conveniente introducir el *cociclo cuasiperiódico* correspondiente al "skew-product" (3),

$$\begin{array}{rccc} (A, \omega) : & \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{T} \\ & (X, \theta) & \mapsto & (A(\theta) X, \theta + 2\pi\omega), \end{array}$$

las iteraciones del cual generan (3),

$$(X_n, \theta_n) = (A, \omega)^n (X_0, \theta_0).$$

$$w_{n+1} = \begin{pmatrix} a - V(\theta_n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega \tag{4}$$

para $V(\theta) = \kappa \cos(\varphi_1(\theta))$ y $a = 0$. El correspondiente cociclo, que denotaremos por $(A_{a,V}, \omega)$ lo llamaremos *cociclo cuasiperiódico de Schrödinger*. La razón del nombre viene de que, de hecho, es equivalente a la siguiente ecuación en diferencias lineales de segundo orden

$$x_{n+1} + x_{n-1} + V\left(2\pi\omega n + \theta\right) x_n = a, \quad n \in \mathbb{Z}$$

que es la ecuación de valores propios de la familia de *operadores cuasiperiódicos de Schrödinger* (discretos y unidimensionales en este caso)

$$(H_{V,\omega,\theta}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + V(2\pi\omega n + \theta)x_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Estos operadores, que en $l^2(\mathbb{Z})$ estan *acotados* y son *autoadjuntos*, aparecen en diversos campos de la matemática física.

2 Reducibilidad y propiedades espectrales

La matriz de Floquet (mejor dicho, su espectro) determina cuando las soluciones un"skew-product" son estables o inestables. El problema es que el sistema tiene que ser reducible, cosa que no sucede en general. Sin embargo podemos recuperar parcialmte el crecimiento exponencial a través del *exponente de Lyapunov promediado*

$$\beta(a, V, \omega) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}} \| A_{a,V}(2\pi(N-1)\omega + \theta) \cdots A_{a,V}(2\pi\omega + \theta) \| \, d\theta$$

que existe, por ergodicidad y subaditividad, si $a \in \mathbb{R}$, V es continua y ω irracional. Diremos que un cociclo $(A_{a,V}, \omega)$ es *hiperbólico* si $\beta(a, V, \omega) > 0$. Si, además, el cociclo es conjugado a un cociclo diagonal e hiperbólico, aunque no necesariamente constante, entonces diremos que es *uniformemente hiperbólico.* En caso contrario, que es *no uniformemente hiperbólico.*

Para distinguir entre hiperbolicidad uniforme y no uniforme podemos usar la formulación espectral. En efecto, Johnson [Joh82] demostró, en un caso mucho más general, que si V es continua y ω irracional entonces la hiperbolicidad uniforme de un cociclo de Schrödinger $(A_{a,V}, \omega)$ es equivalente a que a no esté en el espectro del operador $H_{V,\omega,\theta}$ (que es independiente de θ y denotamos por $\sigma(V, \omega)$). Si además V es analítica real y ω suficientemente lejano a irracional (más precisamente diofántico, como introduciremos más adelante), entonces lo anterior es equivalente a que $(A_{a,V}, \omega)$ sea reducible a coeficientes constantes con matriz de Floquet hiperbólica.

Así pues, podemos clasificar la dinámica de un cociclo cuasiperiódico de Schrödinger, supongamos que analítico y con frecuencia diofántica, "a grosso modo". Si $\beta(a, V, \omega) = 0$ el cociclo no es hiperbólico: en caso que sea reducible a coeficientes constantes la matriz de Floquet no será hiperbólica (y a necesariamente estará en el espectro). Si $\beta(a, V, \omega) > 0$ el cociclo será uniformemente hiperbólico si a está en la resolvente (en cuyo caso habrá reducibilidad a coeficientes constantes) o no uniformemente si a está en el espectro (en cuyo caso el cociclo no es reducible). Por ejemplo, en el caso del operador *"Almost Mathieu"* con $V(\theta) = b\cos\theta$ se dan los tres casos posibles, tal y como se indica en la Figura 1.

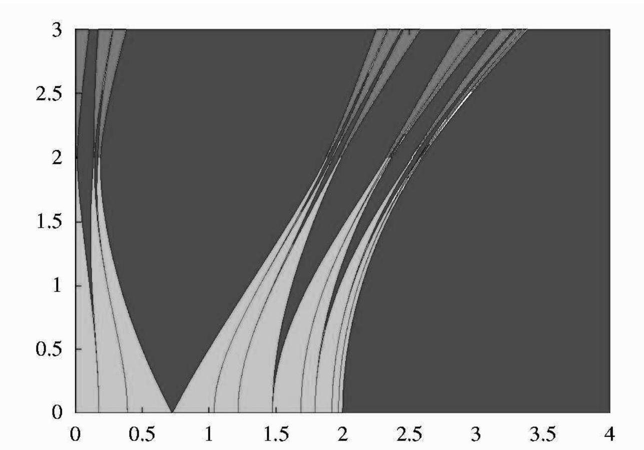

Figura 1: Diferentes comportamientos dinámicos en el caso del cociclo "Almost Mathieu", dado por $V(\theta) = b\cos\theta$ en el espacio de parámetros (a, b) con $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$. En verde, $\beta(a, V, \omega) = 0$ (a en el espectro), en azul cociclo uniformemente hiperbólico ($\beta(a, V, \omega) > 0$ y a en la resolvente) y en rojo el cociclo no uniformemente hiperbólico ($\beta(a, V, \omega) > 0$ y a en el espectro)

A partir de ahora nos vamos a centrar en potenciales V analíticos reales, es decir, fijaremos un $\rho > 0$ y consideraremos el espacio $C^a_\rho(\mathbb{T})$ de funciones en $\mathbb{T}$ con extensión analítica a la banda $|\Im\theta| < \rho$ con la norma

$$|V|_\rho := \sup_{|\Im\theta|<\rho} |V(\theta)| < \infty.$$

Supondremos también que ω es *diofántico*, $\omega \in DC(c, \tau)$, para ciertas constantes $c > 0$ y $\tau > 1$, a saber que las siguientes desigualdades se cumplen para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ no nulo,

$$|\mathrm{sen}\, 2\pi k\omega| > \frac{c}{|k|^\tau}.$$

Bajo estas dos hipótesis, el enfoque KAM clásico (como se encuentra en Dinaburg & Sinai [DS75] o Jorba & Simó [JS96]) proporciona un $\varepsilon_K = \varepsilon_K(\rho, c, \tau) > 0$ de manera que si $|V|_\rho < \varepsilon_K$ entonces el cociclo $(A_{a,V}, \omega)$ es analíticamente reducible a coeficientes constantes (de ahora en adelante simplemente reducible) para un conjunto de valores de a de medida grande (a medida que $|V|_\rho \to 0$, dependiendo de c y τ).

Una de las desventajas del método KAM clásico, basado en transformaciones cercanas a la identidad, es que no permite obtener reducibildad en la resolvente, aunque ya sabemos que ahí debe haber reducibilidad (por otros métodos más geométricos). Moser & Pöschel [MP84] idearon un método para tratar estos casos "resonantes". Eliasson [Eli92], usando este método, consiguió demostrar que si $|V|_\rho < \varepsilon_E$, donde $\varepsilon_E = \varepsilon_E(c, \tau, \rho) > 0$, entonces el cociclo es reducible para casi todos (en sentido Lebesgue) los valores de a. Este es un resultado "semi-perturbativo", puesto que ε_K depende de c y τ, pero, independientemente de estas constantes, el conjunto de los a para los que tenemos reducibildad es de medida total en $\mathbb{R}$. El resultado es también válido para potenciales V en $\mathbb{T}^d$ y da una caracterización del conjunto de valores de a "reducibles".

Sorprendentemente, para potenciales en $\mathbb{T}$, es posible dar una versión no perturbativa de este resultado de Eliasson. El primer paso en este sentido lo dieron Bourgain & Jitomirskaya [BJ02] que demostraron que existe un $\varepsilon_N(\rho) > 0$ para el cual el exponente de Lyapunov es cero en el espectro si $|V|_\rho < \varepsilon_N$ y ω es irracional. Analizando la demostración, podemos demostrar el siguiente resultado no perturbativo (véase Avila & Krikorian [AK03] para una versión un poco más restrictiva):

Teorema 1 ([Pui05]) *Sea $\rho > 0$. Entonces existe un $\varepsilon_N(\rho) > 0$ tal que*

1. *Si $|V|_\rho < \varepsilon_N$, el cociclo $(A_{a,V}, \omega)$ es reducible para casi todos los valores de a.*

2. *Para un elemento genérico de $\{V \in C^a_\rho(\mathbb{T}); |V|_\rho < \varepsilon_N\}$, con la topología $|\cdot|_\rho$, el espectro $\sigma(V, \omega)$ es un conjunto de Cantor.*

3. *Si $|V|_\rho < \varepsilon_N$ y $\sigma(V, \omega)$ es un conjunto de Cantor, el cociclo $(A_{a,V}, \omega)$ no es (continuamente) reducible a coeficientes constantes para a en un conjunto G_δ-residual de $\sigma(V, \omega)$.*

Este resultado, combinando adecuadamente (i), (ii) y (iii), nos da una descripción cualitativa de la reducibilidad para "skew-products" de Schrödinger cuasiperiódicos con potenciales analíticos reales en $|V|_\rho < \varepsilon_N$ y frecuencia diofántica. La reducibilidad es un fenómeno "abundante" en medida para los a, aunque no topológicamente, puesto que siempre que el espectro sea en conjunto de Cantor (cosa "habitual" en este contexto, como afirma (ii)) no habrá reducibilidad para un conjunto genérico de a's en el espectro. A parte de estos resultados genéricos, también es posible demostrar espectro de Cantor en algunos ejemplos concretos, como por ejemplo en el operador "Almost Mathieu" [Pui04].

Referencias

[AK03] A. Avila and R. Krikorian. Reducibility or non-uniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles. *To appear in Annals of Mathematics*, 2003.

[BJ02] J. Bourgain and S. Jitomirskaya. Absolutely continuous spectrum for 1D quasiperiodic operators. *Invent. Math.*, 148(3):453–463, 2002.

[DS75] E.I. Dinaburg and Y.G. Sinai. The one-dimensional Schrödinger equation with quasi-periodic potential. *Funkt. Anal. i. Priloz.*, 9:8–21, 1975.

[Eli92] L.H. Eliasson. Floquet solutions for the one-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 146:447–482, 1992.

[Joh82] R. Johnson. The recurrent Hill's equation. *J. Diff. Eq.*, 46:165–193, 1982.

[JS96] À. Jorba and C. Simó. On quasi-periodic perturbations of elliptic equilibrium points. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(6):1704–1737, 1996.

[MP84] J. Moser and J. Pöschel. An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials. *Comment. Math. Helvetici*, 59:39–85, 1984.

[Pui04] J. Puig. Cantor spectrum for the Almost Mathieu operator. *Comm. Math. Phys*, 244(2):297 – 309, 2004.

[Pui05] J. Puig. A nonperturbative Eliasson's reducibility theorem. *Preprint*, 2005.