El Problema dels Deu Martinis. Un aperitiu

Joaquim Puig i Sadurní *

Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya
Av. Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain
joaquim.puig@upc.edu

En aquesta xerrada presentem una introducció al problema dels 10 martinis, recentment resolt, des de diferents formulacions. Veurem com cadascuna d'aquests punts de vista proporciona una informació valuosa i complementària sobre el problema i la seva solució.

Índex

1 L'equació de Harper i la formulació dinàmica

La formulació més senzilla del problema dels 10 martinis fa referència a l'anomenada'equació en diferències de Harper

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

on la incògnita és una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$ i a, b, ω i ϕ són paràmetres reals. El fet que aquesta equació, com veurem després, provingui de diversos problemes físics, motiva que aquests paràmetres rebin una denominació especial. Per exemple, el paràmetre a s'anomena *paràmetre espectral* o *energia*. El terme $b\cos(2\pi\omega n + \phi)$ és un terme *periòdic* si la *freqüència* ω és racional o bé *quasi-periòdic* en cas que sigui irracional. En qualsevol dels dos casos b és un paràmetre d'*acoblament*, ja que per a $b = 0$ el terme en cosinus desapareix. Finalment, ϕ, que és de fet un paràmetre mòdul 2π, és a dir a $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ s'anomena la *fase*.

Com és ben sabut, podem resoldre el problema de valors inicials associat a l'equació de Harper (1) per a cada parella de condicions inicials a $\mathbb{R}^2$. Per a això podem

* Aquesta recerca ha estat finançada en part pels ajuts DGICYT BFM2000-805, BFM2003-09504-C02-01 i CIRIT 2001 SGR-70.

escriure-la com a sistema de primer ordre en formulació matricial

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a - b\cos(2\pi\omega n + \phi) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{a,b}(2\pi\omega n+\phi)} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

i, per tant, per qualsevol $k \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \underbrace{A_{a,b}(2\pi\omega k + \phi) \dots A_{a,b}(\phi)}_{M_{a,b}(n,\omega,\phi)} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}$$

mentre que, per a $k < 0$,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = A_{a,b}(2\pi\omega(k+1) + \phi)^{-1} \dots A_{a,b}(-2\pi\omega + \phi)^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

El fet que puguem escriure l'equació com un sistema de primer ordre, per bé que elemental, ens estalvia molts maldecaps, ja que passem d'un problema "de dimensió infinita" (com és buscar totes les successions que satisfan una certa equació en diferències) a un problema amb dos graus de llibertat. A més, com a conseqüència de la linealitat del sistema, per passar de les condicions inicials a l'evolució per un cert $n \in \mathbb{Z}$ només cal que multipliquem per una matriu,

$$M^{(N)}_{a,b,\omega}(\theta) \quad = \quad \begin{cases} A_{a,b}\left(\theta + 2\pi\omega(N-1)\right) \dots A_{a,b}(\theta), & \text{si} \quad N > 0 \\ I, & \text{si} \quad N = 0 \\ A^{-1}_{a,b}\left(\theta + 2\pi\omega N\right) \dots A^{-1}_{a,b}(\theta - \omega), & \text{si} \quad N < 0. \end{cases} \tag{3}$$

que s'anomena la *matriu de transferència* o *matriu fonamental*.

Una primera formulació del problema dels 10 martinis pot fer-se estudiant el problema de l'estabilitat per a l'equació de Harper. Per això cal que introduïm una definició del que entenem per estabilitat de l'equació (que ens convingui per al que necessitem). Direm que l'equació de Harper, per a uns certs a, b i ω, és *totalment inestable* si per qualsevol $\phi \in \mathbb{T}$ l'equació

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

no té cap solució *acotada*, és a dir $x = (x_n)_n$ amb

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < \infty$$

llevat de la trivial : $x = \mathbf{0} = (\dots, 0, \dots)$. Per tant, una equació de Harper no serà totalment inestable si podem trobar alguna fase ϕ per a la qual hi hagi una solució acotada no trivial. Amb aquesta definició podem donar una primera formulació del

Problema dels 10 Martinis 1 *Si $b \neq 0$ i ω és irracional el conjunt d'energies a per al qual l'equació de Harper no és inestable és un conjunt de Cantor.*

Observació 1 *Per un conjunt de Cantor entendrem un conjunt que sigui* perfecte *(és a dir sense punts aïllats) i* no-dens enlloc *(és a dir que la seva adherència tingui interior buit). L'exemple més conegut de conjunt de Cantor és el conjunt ternari, que s'obté recursivament treien intervals centrats de longitud un terç de l'anterior d'un interval finit de la recta real, tal i com es mostra a la Figura 1.*

Figura 1: Generació del conjunt ternari de Cantor.

El nom d'aquest problema prové d'una juguesca que feu el matemàtic Marc Kac a la trobada anual del 1981 de la American Mathematical Society, en la qual rebé l'honor de ser el "Colloquium Lecturer". Segons sembla en la seva xerrada i a arrel d'una pregunta de Barry Simon, oferí deu martinis a qui resolés el problema (que havia estat conjecturat per primer cop per Az'bel el 1960 [Azb64]). Barry Simon mateix [Sim82] l'anomenà així en una llista d'una dotzena de problemes oberts en operadors de Schrödinger. Veurem en aquesta xerrada com aquest problema ha estat recentment resolt.

Abans d'endinsar-nos en la demostració del problema dels deu martinis, anem a fixar-nos un moment en les hipòtesis d'aquest. En primer lloc, anem a veure que la hipòtesis que ω sigui irracional és necessària. Comencem, doncs, amb el cas de freqüència racional més simple: $\omega = 0$. En aquest cas la matriu del sistema de primer ordre (2)

$$A_{a,b}(2\pi\omega n + \phi) = A_{a,b}(\phi)$$

és constant per a qualsevol $n \in \mathbb{Z}$. Això vol dir que la matriu fonamental és senzillament una potència n-èsima:

$$M_{a,b}(k,\omega,\phi) = A_{a,b}\left(2\pi\omega(k-1) + \phi\right) \ldots A_{a,b}(\phi) = A_{a,b}(\phi)^k$$

i la integració és molt senzilla (tant com multiplicar matrius),

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A_{a,b}(\phi)^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Així doncs, cal que donem un criteri pel qual les potències d'una matriu constant actua deixant vectors acotats. Aquesta és una qüestió clàssica en matrius de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, és a dir, matrius quadrades en dimensió dos i determinant igual a 1.

Sigui doncs P una matriu de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Els seus valors propis satisfan l'equació característica

$$\lambda^2 - \text{ tr } P\lambda + 1 = 0$$

i determinen l'existència de solucions acotades en l'equació

$$v_{n+1} = Pv_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

on v_n pertany a $\mathbb{R}^2$. En efecte, si $|\text{ tr } P| > 2$ aleshores els valors propis de P són reals i diferents, amb mòdul diferent de 1 i, per tant, la iteració (4) no té solucions acotades fora de la trivial. Altrament, si $|\text{ tr } P| \leq 2$, sempre hi ha alguna vector propi amb valor propi de mòdul 1 i, per tant, el sistema (4) té alguna solució no trivial que és acotada.

Tenint en compte això darrer podem donar ja les zones d'estabilitat de l'equació de Harper per al cas trivial $\omega = 0$. En efecte, en les notacions anteriors $P = A_{a,b}(\phi)$ i per estudiar-ne l'estabilitat només cal calcular-ne la traça, és a dir

$$\text{tr } A_{a,b}(\phi) = a - b\cos(\phi).$$

Així doncs, els valors de a totalment inestables per a un $b \in \mathbb{R}$ fixat són les energies $a \in \mathbb{R}$ que compleixen

$$|a - b\cos(\phi)| > 2$$

per qualsevol $\phi \in \mathbb{T}$. D'això en resulta que l'equació de Harper per a $\omega = 0$

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(\phi)x_n = ax_n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

és totalment inestable si, i només si, $|a| > 2 + |b|$. Per tant, cal demanar que ω sigui diferent de zero, ja que en aquest cas, només hi ha dues zones d'inestabilitat, els intervals $(-\infty, -2 - |b|)$ i $(2 + |b|, +\infty)$, que estan separats per la *banda d'estabilitat* $[-2 - |b|, 2 + |b|]$ que no és, clarament, un conjunt de Cantor. És clar que la zona d'estabilitat tampoc serà un conjunt de Cantor quan sigui la unió d'un conjunt finit de bandes d'estabilitat. Anem a veure que això és el que s'esdevé quan ω és un número racional.

Suposem que $\omega = p/q$ amb $p, q \in \mathbb{N}$ primers entre ells. En aquest cas la matriu de transferència no és la potència d'una matriu constant sinó que només cada cert nombre d'iteracions:

$$M_{a,b}\left(kq, \phi, \frac{p}{q}\right) = M_{a,b}\left(q, \phi, \frac{p}{q}\right)^k \equiv P_{a,b}^{p,q}(\phi)^k,$$

on $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ és l'anomenada *matriu de Poincaré*. L'evolució del sistema de primer ordre associat a temps qk, per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$ també ve donat per les potències de la matriu de Poincaré:

$$\begin{pmatrix} x_{qk+1} \\ x_{qk} \end{pmatrix} = P_{a,b}^{p,q}(\phi)^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Així doncs, per estudiar l'estabilitat de *l'equació de Harper periòdica*,

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos\left(2\pi\frac{p}{q}n + \phi\right) = ax_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

n'hi ha prou amb calcular la traça de $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$. En efecte, encara que la traça de la matriu de Poincaré només ens doni informació de l'estabilitat dels iterats múltiples de q del sistema de primer ordre, per recuperar els altres iterats només ens cal multiplicar aquesta matriu de Poincaré per un màxim de $q - 1$ matrius (que sempre seran les mateixes degut a la periodicitat del sistema). Per tant, l'equació de Harper periòdica serà estable, per a uns certs a, b i ϕ si, i només si, la traça de $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ és a l'interval $[-2, 2]$. Si fixem b i q, aquesta traça (sovint anomenada també *discriminant*) és un polinomi de grau q en a. Les regions d'estabilitat, doncs, formen un màxim de q bandes espectrals disjuntes. Aquestes estan separades per intervals oberts d'inestabilitat que s'anomenen, en aquest context, *zones prohibides*. A més, l'anomenat *principi d'oscil·lació* de la traça (e.g. [MW79]) ens assegura que l'equació $\operatorname{tr} P_{a,b}^{p,q}(\phi) = 2$ (resp. -2) té exactament q arrels comptant multiplicitats i que aquesta és com a màxim 2, veieu la Figura 2.

Si recordem que la matriu de Poincaré ens dóna els iterats múltiples de q, podem relacionar els diferents valors de la seva traça amb les solucions del sistema de primer ordre:

Proposició 1 *Sigui $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ la matriu de Poincaré de l'equació de Harper periòdica*

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos\left(2\pi\frac{p}{q}n + \phi\right) = ax_n, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

amb p i q primers entre ells. Aleshores:

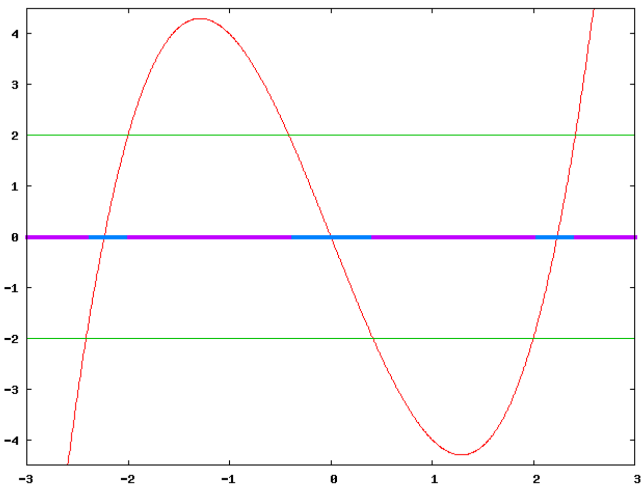

Figura 2: Discriminant de l'equació de Harper periòdica per a $p/q = 2/3$ i $b = 1$. El seu valor és $\operatorname{tr} P^{2,3}_{a,1}(0) = \frac{5}{4}a^3 - \frac{11}{2}a + \frac{1}{4}$.

- *Si* $|\operatorname{tr} P^{p,q}_{a,b}(\phi)| > 2$, *(6) no té solucions acotades.*
- *Si* $|\operatorname{tr} P^{p,q}_{a,b}(\phi)| < 2$, *totes les solucions de (6) són acotades.*
- *Si* $\operatorname{tr} P^{p,q}_{a,b}(\phi) = \pm 2$ *i* $P_{a,b}(\phi) \neq \pm I$, *(6) té una única solució periòdica (resp. antiperiòdica)* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de periode* q, $x_{n+q} = \pm x_n$ *per qualsevol* n *(llevat de normalització).*
- *Si* $P^{p,q}_{a,b}(\phi) = \pm I$ *totes les solucions són periòdiques (resp. antiperiòdiques) amb periode* q.

Van Mouche [vM89], usant el teorema de Bezout per a corbes projectives planes, demostrà que la situació en què dues bandes d'estabilitat de l'equació de Harper s'ajunten no es dona mai, ja que no pot donar-se mai la *coexistència* de solucions periòdiques i antiperiòdiques al mateix temps.

Teorema 1 ([vM89]) *Si* $b \neq 0$, $\omega = p/q$ *és racional i* ϕ *compleix*

- *si* $q \equiv 4$ *(mod. 4),* $\phi \notin (2\pi/q)\mathbb{Z}$,
- *si* $q \equiv 2$ *(mod. 2),* $\phi \notin (\pi/q)\mathbb{Z}$,

aleshores l'equació de Harper periòdica

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)\, x_n = a x_n \tag{7}$$

no té solucions periòdiques ni antiperiòdiques per a cap $a \in \mathbb{R}$

Per a aquests ϕ no hi ha inestabilitat per a energies en un conjunt de q bandes espectrals disjuntes incloses a $[-2-|b|, 2+|b|]$. Així doncs, encara que el cas periòdic el conjunt d'estabilitat no és un conjunt de Cantor, el resultat anterior té com a conclusió que si una successió d'equacions de Harper periòdiques amb periode q que tendeixi a infinit tindrà un nombre de bandes espectrals disjuntes tendint a infinit.

Una manera de visualitzar això és a través dels diagrames de la Figura (3), que s'anomenen *papallones de Hofstadter* [Hof76] (i popularitzats posteriorment a [Hof79]). Per a un valor de b fixat es representen en la direcció vertical freqüències racionals p/q i en la horitzontal els valors d'energies estables de la corresponent equació de Harper. En prendre els denominadors valors molt alts (i aproximar molt bé irracionals) es té una idea de quina pot ser l'estructura de les zones d'estabilitat en el cas quasi-periòdic de ω irracional.

2 L'operador "Almost Mathieu" i la formulació espectral

En la secció anterior, i gràcies a la Proposició 1, hem vist una manera d'interpretar el problema dels intervals d'estabilitat en funció de l'existència de solucions periòdiques o anti-periòdiques. Per a uns certs valors de b i ϕ fixats, es tracta de veure els valors de a per als quals l'equació de Harper periòdica té solucions $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *q-periòdiques*,

$$x_{n+q} = x_n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

o bé *q-anti-periòdiques*

$$x_{n+q} = -x_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Com que l'equació de Harper és lineal i només cal trobar q termes de la successió, tant en el cas periòdic com en l'antiperiòdic, la recerca d'aquestes solucions és equivalent a un problema *espectral*, de valors i vectors propis. En efecte, els extrems de les bandes d'estabilitat vindran donats pels valors de a que siguin valors propis de la matriu de dimensió q:

$$H^+_{b,p/q,\phi} = \begin{pmatrix} b\cos(\phi) & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & b\cos\left(\phi - \frac{2\pi p}{q}\right) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b\cos\left(\phi - \frac{2\pi(p-1)}{q}\right) \end{pmatrix}$$

per al problema periòdic i

$$H^-_{b,p/q,\phi} = \begin{pmatrix} b\cos(\phi) & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & b\cos\left(\phi - \frac{2\pi p}{q}\right) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 1 & b\cos\left(\phi - \frac{2\pi(p-1)}{q}\right) \end{pmatrix}$$

per a l'antiperiòdic. Hi haurà exactament q bandes d'estabilitat si tots aquests valors propis són diferents, com ens assegura el Teorema 1 per a l'equació de Harper.

Aquesta interpretació espectral permet una altra formulació del problema dels 10 martinis. Per això hem de veure com formular el problema espectral quan la freqüència ω és irracional. L'equació de Harper

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

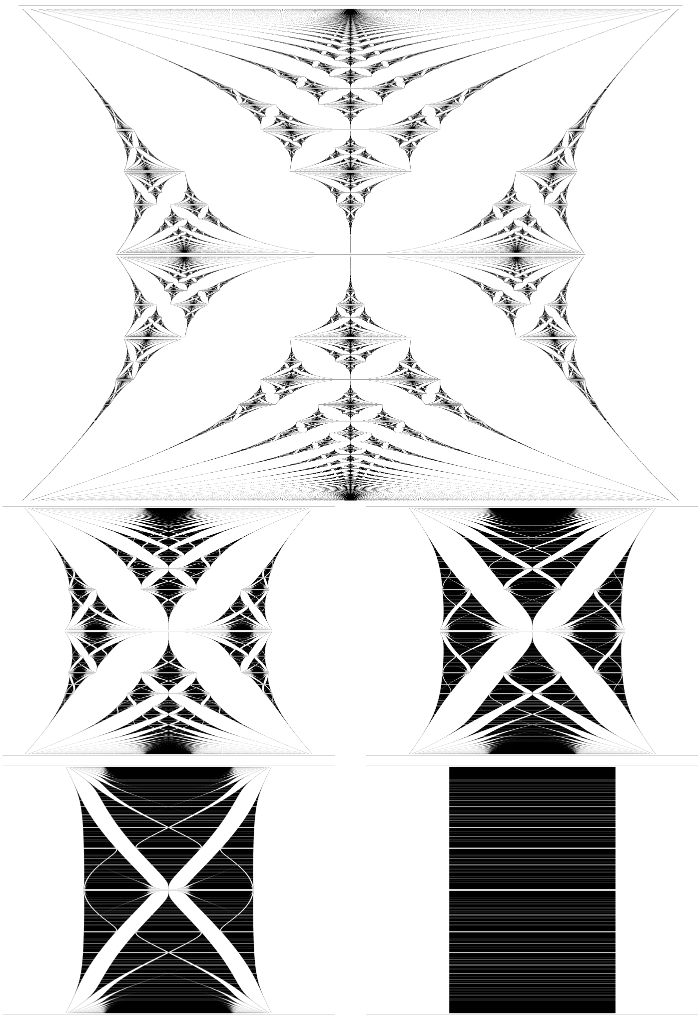

Figura 3: Papallones de Hofstadter per a diferents valors de b. De dalt a baix i esquerra a dreta $b = 2, 1.5, 1, 0.5$ i 0. El nom de "papallona de Hofstadter" es reserva habitualment al cas $b = 2$ en què la mesura dels valors estables de a, per a freqüències irracionals, és 0. En els altres casos la mesura és sempre positiva.

es pot veure com una equació de valors propis sobre l'espai de successions $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ si definim un operador que actui sobre successions reals com

$$(H_{b,\omega,\phi}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)x_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Com que volem parlar d'espectre haurem de definir una topologia adient sobre un subconjunt de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Com que volem preservar el caràcter autoadjunt del problema, considerarem l'espai $l^2(\mathbb{Z})$ de les successions $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tals que

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Aquest és un *espai de Hilbert* amb el producte escalar

$$\langle u, v\rangle_{l^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{u}_n v_n, \qquad u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$$

que és ben definit i que fa que $(l^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2)$ sigui *complet*.

A l'espai $l^2(\mathbb{Z})$ l'operador $H_{b,\omega,\phi}$ s'anomena *"Almost Mathieu"*. És fàcil veure que és *ben definit*, és a dir que si $x \in l^2(\mathbb{Z})$ aleshores també $H_{b,\omega,\phi}x \in l^2(\mathbb{Z})$ i que és *lineal* i *acotat*

$$\left\|H_{b,\omega,\phi}x\right\|_2 \leq (2 + |b|)\left\|x\right\|_2.$$

També és autoadjunt, ja que

$$\langle H_{b,\omega,\phi}u, v\rangle = \langle u, H_{b,\omega,\phi}v\rangle, \quad u, v \in l^2(\mathbb{Z})$$

per qualsevol parella u, v d'elements de $l^2(\mathbb{Z})$.

A $l^2(\mathbb{Z})$ l'*espectre* de l'operador *Almost Mathieu* és el conjunt de $\lambda \in \mathbb{C}$ per als quals l'operador desplaçat

$$H_{b,\omega,\phi} - \lambda I$$

no té una inversa acotada com a operador de $l^2(\mathbb{Z})$ (de fet, pel Teorema de l'Aplicació Oberta només cal veure que no és bijectiva). Aquest conjunt, que denotarem per $\mathrm{Spec}\,(H_{b,\omega,\phi})$, és un subconjunt tancat de l'interval $[-2-|b|, 2+|b|]$. El seu complementari, la *resolvent*, és la unió numerable d'intervals oberts (potser buits) anomenats *forats espectrals* (veieu la Figura 4). Amb aquestes noves eines el problema dels deu martinis es formula de la següent manera.

Problema dels 10 Martinis 2 (Kac i Simon, 1981) *Si $b \neq 0$ i ω és irracional, l'espectre de l'operador "Almost Mathieu" és un conjunt de Cantor: els forats espectrals són densos a l'espectre.*

Abans de continuar, recordem que, en espais de dimensió infinita com ara $l^2(\mathbb{Z})$, cal distingir entre espectre i valors propis puntuals. Una energia $a \in \mathbb{R}$ és un *valor propi puntual* si hi ha un element no nul de l'espai $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, anomenat vector propi, de manera que satisfà l'equació de valors propis

$$\left(H_{b,\omega,\phi}x\right)_n = x_{n+1} + x_{n+1} + b\cos\left(2\pi\omega n + \phi\right)x_n = ax_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

És fàcil veure que els valors propis, denotat pel conjunt $\sigma_{pp}(b,\omega,\phi)$, pertanyen a l'espectre, però no a la inversa. Per exemple, l'operador "Almost Mathieu" té sempre espectre no buit però no té valors propis puntuals si $|b| < 2$.

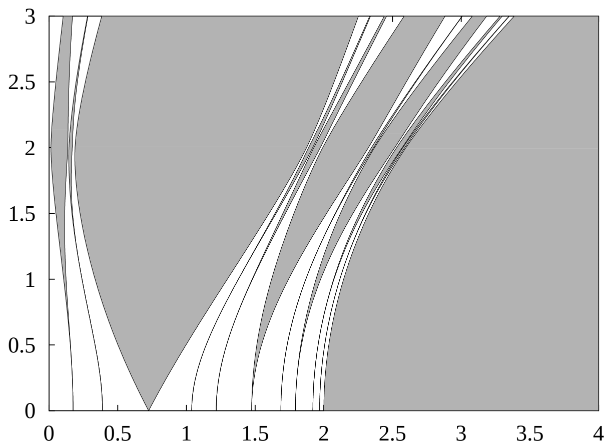

Figura 4: Forats espectrals més grans per a l'operador "Almost Mathieu" i $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$. Només es representen valors positius de b per la simetria respecte $a = 0$.

Malgrat la precisió del caràcter anterior, podem caracteritzar l'espectre en funció de com creixen les solucions de l'equació de valors propis. En efecte Johnson [Joh82] demostrà que si ω és irracional, $a \in \mathbb{R}$ pertany a l'espectre de l'operador "Almost Mathieu" $H_{b,\omega,\phi}$ si, i només si la corresponent equació de Harper

$$x_{n+1} + x_{n+1} + b \cos{(2\pi\omega n + \phi)}\, x_n = a x_n$$

té una solució acotada no trivial per algun $\phi \in \mathbb{T}$. Una conseqüència d'això és que l'espectre, com a conjunt, és independent de ϕ. Denotarem aquest conjunt per $\sigma(b, \omega)$. Una altra, important en la nostra exposició, és que les dues formulacions que hem donat del problema dels deu martinis són equivalents. És a dir, una equació de Harper és totalment inestable si, i només si, el corresponent valor de a no pertany a l'espectre.

L'estratègia per a la demostració del problema dels deu martinis [Pui04] consistirà en veure que els forats espectrals són densos a l'espectre per a qualsevol valor de b. Això és força especial de l'operador "Almost Mathieu" puix que, en general, els forats espectrals d'un *operador quasiperiòdic de Schrödinger*,

$$(H_{V,\omega,\phi} x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + V(2\pi\omega n + \phi) x_n,$$

on V és una funció de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{R}$ no tenen per què estar oberts (veieu Broer, Puig i Simó [BPS03] i la Figura 5).

3 Electrons en un camp magnètic i la formulació física

El model de l'operador "Almost Mathieu" o de l'equació de Harper fou introduït dins la comunitat física per a estudiar el comportament d'electrons sota un camp magnètic. Aquesta aproximació resulta ser il·luminadora de cara a la comprensió de l'efecte de Hall quàntic. Descrivim-lo en primer lloc breument.

Edwin H. Hall, el 1878, realitzà el següent experiment. Prengué una fulla prima d'or i un galvanòmetre als dos extrems de la fulla (tal i com s'indica a la Figura 6). En fer-hi circular un flux elèctric i aplicar-hi simultàniament un camp magnètic vertical

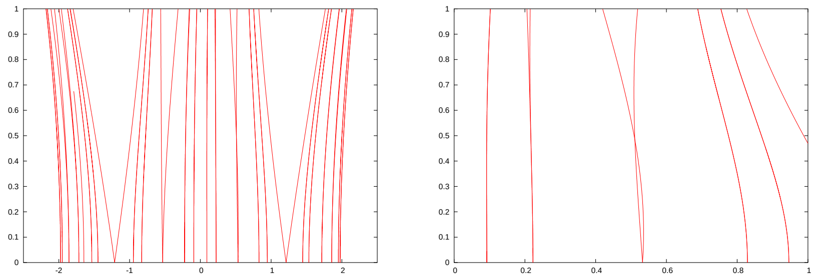

Figura 5: Forats espectrals per a l'operador quasiperiòdic de Schrödinger amb $V(\theta) = \cos(\theta) + 0.3\cos(2\theta)$ i $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$. Observem com un dels forats espectrals es tanca per a un valor de b. Representem b a la direcció vertical i a a la horitzontal. A l'esquerra, ampliació al voltant de la "butxaca".

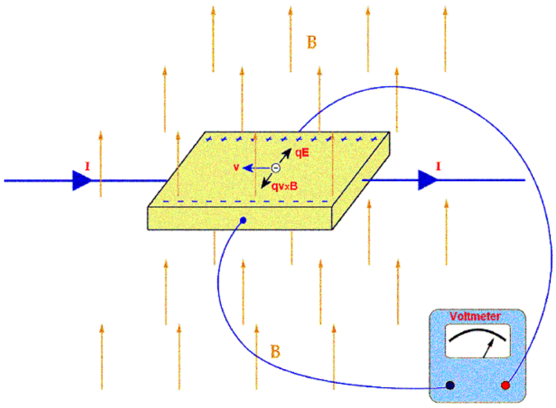

Figura 6: Diagrama de l'experiment del Hall clàssic.

observà com es produïa una diferència de potencial entre els dos extrems de la fulla. A més, observà que aquest *voltatge de Hall*, V_H, augmentava linealment amb la intensitat del camp magnètic. En dividir la intensitat del corrent elèctric pel voltatge de Hall, s'obté l'anomenada *conductància de Hall*, que s'escriu com σ_H. Aquesta té la dimensió de l'invers d'una resistència. Per tant, podem introduïr un factor adimensional ν, anomenat *factor d'emplenament* que és directament proporcional a la intensitat del corrent i inversament proporcional al camp magnètic de manera que

$$R_H := \frac{\nu}{\sigma_H},$$

l'anomenada *resistència de Hall* és constant i igual a

$$R_H = \frac{h}{e^2}.$$

Aquest experiment fou important ja que fins aleshores, el mateix Maxwell suposava que el camp magnètic actuava sobre el conductor i no sobre els electrons.

Aquesta constància es donà per feta durant més d'un segle, fins que Klaus Von Klitzing, el 1980, observà que en temperatures properes al zero absolut i camps magnètics

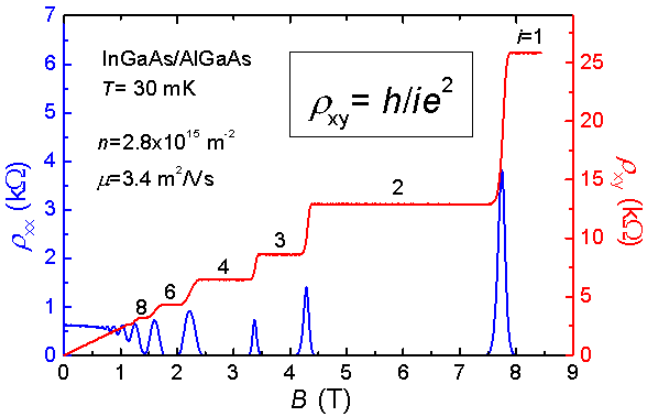

Figura 7: La resistència de Hall R_H (ρ_{xy} a la figura) quantitzada com a funció de la intensitat del camp magnètic. Observem els intervals de constància en els valors h/ne^2 per a n enter.

molt intensos la dependència de la resistència de Hall no és lineal sinó que apareixen uns intervals de constància per a certs valors del camp magnètic. A més, en cadascun d'aquests intervals s'observà que la conductància σ_H coincideix, amb una precisió sorprenent, amb nombres enters, veieu la figura 7. Per això diem que la conductància de Hall està *quantitzada*.

Per veure com pot explicar-se qualitativament alguns dels trets de l'efecte de Hall quàntic a través del problema dels deu martinis cal que tornem enrera en el temps. Rudolph Peierls, que el 1929 com a estudiant de tesi de Werner Heisenberg havia investigat per què el voltatge de Hall pot tenir diferents signes, proposà amb el seu estudiant P. G. Harper el següent model per a electrons metàl·lics sota camps magnètics el 1955. Aquest ve donat pels següents *operadors magnètics* a $l^2(\mathbb{Z}^2)$

$$(U\psi)(n,m) = \psi(n-1,m), \quad (V_\Phi\psi)(n,m) = e^{2\pi i n\Phi}\psi(n,m-1),$$

per a $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, després que una sèrie de simplificacions s'han dut a terme. L'espectre de l'operador

$$h(\Phi, c_1, c_2) = c_1\,(U + U^*) + c_2\,(V_\Phi + V_\Phi^*)$$

es pren com a aproximació de l'espectre d'energia d'un electró en una xarxa rectangular sota un camp magnètic perpendicular d'intensitat Φ. Les constants c_1 i c_2 mesuren la intensitat de l'acoblament en les diferents direccions del reticle. És fàcil veure que l'espectre de h és bàsicament el mateix que el de l'operador Almost Mathieu:

$$\text{Spec }\,(h(\Phi, c_1, c_2)) = \bigcup_{\phi\in\mathbb{T}} \text{Spec }H_{b,\omega,\phi}$$

amb

$$\frac{b}{2} = \frac{c_2}{c_1} \quad i \quad \omega = \Phi.$$

Per tant, els paràmetres b i ω tenen una interpretació física. El paràmetre b mesura quina és la interacció de l'electró en les dues direccions principals del reticle. Així el

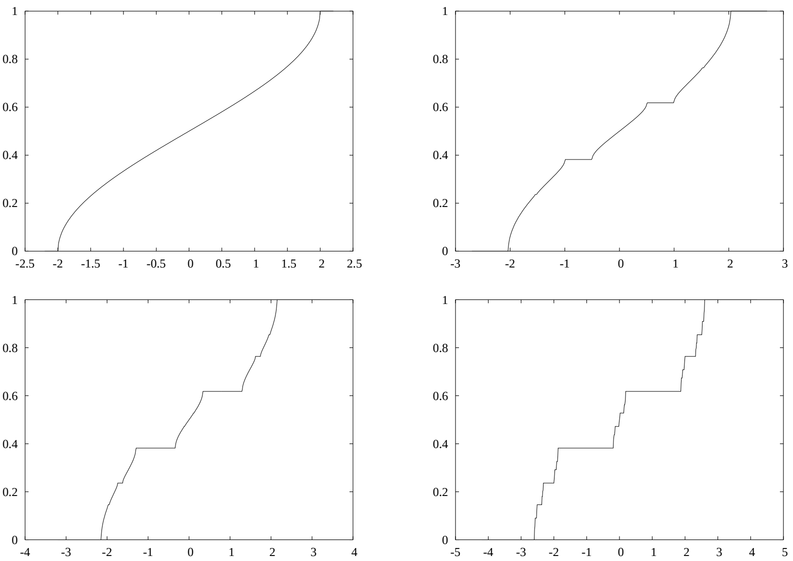

Figura 8: Densitat integrada d'estats per a l'operador "Almost Mathieu" amb paràmetres $b = 0, 0.5, 1, 2$, $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$.

cas $b = 2$ correspon a una interacció igual en les dues direccions i per això s'anomena "cas quadrat". Per altra banda la freqüència ω és la intensitat del camp magnètic de tal manera que si $\omega = 0$ no hi ha camp magnètic. Tot i que el model de Peierls i Harper no explica l'efecte de Hall quàntic degut a les nombroses simplificacions (no té en compte les interaccions electró-electró ni la seva sorprenent persistència malgrat les impureses del material) anem a veure la interpretació que es pot donar de l'efecte de Hall quàntic a través de la resposta afirmativa al problema dels deu martinis.

Per comprendre aquesta interpretació, fixem a, b i ϕ i sigui

$$k_{L,b,\omega,\phi}(a) = \frac{1}{(L-1)} \# \left\{ \text{valors propis} \leq a \text{ de } H_{b,\omega,\phi}|_{\{1,\ldots,L-1\}} \right\}$$

amb certes condicions a la frontera. Aleshores Avron i Simon [AS83] (veieu també Johnson i Moser [JM82]) demostraren que el llímit

$$\lim_{L \to \infty} k_{L,b,\omega,\phi}(a) = k_{b,\omega}(a),$$

existeix i s'anomena densitat integrada d'estats (IDS). Aquest límit és independent de ϕ i, com a funció de a és contínua i no decreixent (si fixem b). Compleix que a pertany a l'espectre de l'operador "Almost Mathieu" si, i només si, la IDS creix en a. Per a valors de ω fixats, aquesta funció presenta una estructura d'escales del diable (veieu la Figura 8) que pot ser explicada ja que si el problema dels deu martinis té solució afirmativa aleshores els intervals de constància d'aquesta funció (que són precisament els forats espectrals) tenen una estructura cantoriana.

A més, el que explica la quantització de la conductància de Hall en el model de Peierls Harper és l'anomenat "etiquetatge dels forats espectrals" que demostraren Johnson i Moser [JM82]. Si una energia pertany a la resolvent de l'operador "Almost Mathieu" aleshores la densitat integrada d'estats ha de complir que

$$k_{b,\omega}(a) - \kappa\omega \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

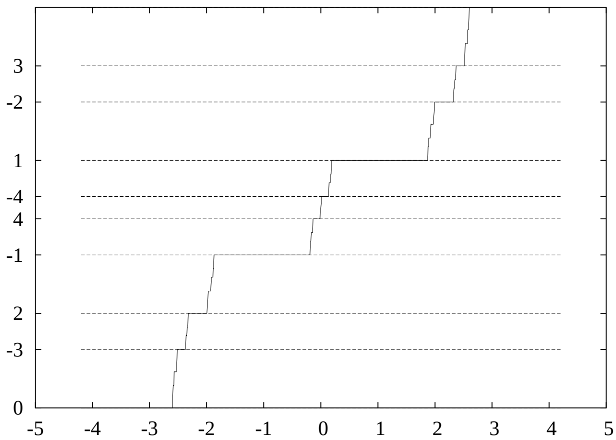

Figura 9: Etiquetatge dels forats espectrals per a l'operador Almost Mathieu, $b = 2$ i $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$. L'enter en la direcció vertical correspon a l'etiqueta del forat espectral (8) determinat per l'interval de constància de la densitat integrada d'estats.

per a un enter addient (veieu la Figura 9). En particular en el model de Peierls-Harper, es pot veure que si l'energia de Fermi és a un forat espectral (en la nostra interpretació, si a és a dins d'un forat), l'enter κ és la conductància quantitzada de Hall (veieu [BvESB94]). Per tant, la resposta afirmativa al problema dels deu martinis explica qualitativament en aquest model per què apareixen valors quantitzats de la conductància, veieu la Figura 10.

4 El Problema dels deu martinis. Un problema tancat

Aquestes tres formulacions del problema dels deu martinis que acabem de presentar (juntament amb altres com les àlgebres C^* que no hem tractat) donen una idea de la varietat de mètodes que s'han emprat per tal d'aconseguir, recentment, la demostració del problema dels deu martinis en la seva totalitat. Per acabar l'exposició donarem alguns dels resultats parcials que s'han obtingut durant més de quaranta anys quan la qüestió fou plantejada per primer cop.

Per tal d'enunciar aquests resultats és important tenir un indicador de "com de proper" és un nombre irracional de ser racional. Direm que un nombre ω és *diofàntic* si existeixen constants positives c, τ que compleixen les desigualtats

$$|\sin 2\pi n\omega| > \frac{c}{|n|^r}$$

per a qualsevol $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Això ho escriurem com $\omega \in DC(c, \tau)$. El conjunt de nombres diofàntics té mesura total. Això vol dir que el seu complementari als irracionals reals, els anomenats *nombres de Liouville*, té mesura de Lebesgue zero. Tanmateix, el conjunt de nombres de Liouville és dens i no numerable a $\mathbb{R}$.

Les estratègies de demostració són diferents en els casos de nombres diofàntics o liouvillians. Per als nombres liouvillians, s'usen resultats per al cas periòdic juntament

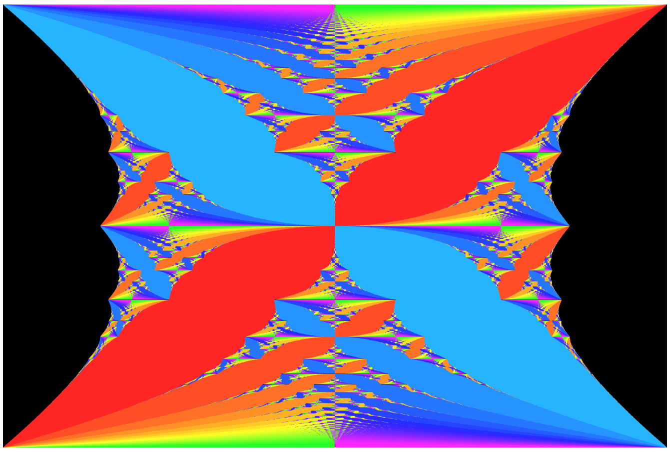

Figura 10: Papallona de Hofstadter amb els forats etiquetats. Cada color correspon a una etiqueta diferent (que en la interpretació física és la conductància quantitzada), veieu Osadchy i Avron [OA01].

amb resultats de continuïtat de l'espectre en aproximar el cas periòdic pel quasiperiòdic. Per als nombres diofàntics, s'usa precisament el fet que estan "lluny" dels nombres racionals, més precisament, que els termes el seu desenvolupament en fracció contínua no creixen de manera massa ràpida. En aquest darrer cas s'han combinat tècniques *KAM*, de *renormalització* i *multiescala*.

Com que per a valors de ω racional sabem que tots els forats espectrals estan oberts, una possible estratègia seria aproximar el cas quasiperiòdic pel periòdic. Aquesta idea fou usada ja per a Bellissard i Simon [BS82] per demostrar que el problema dels deu martinis és cert per a parelles *genèriques* de (b, ω). Aquest conjunt, tanmateix, és de mesura zero. A més, no hi ha una caracterització explícita de les freqüencies per a les que això s'esdevé, tot i que han de ser properes a racionals. En el cas de freqüències Liouville, Choi, Elliott i Yui [CEY90] demostraren el problema dels deu martinis per a uns certs Liouville. La resta de nombres de Liouville han estat tractats finalment per Avila i Jitomirskaya [AJ05].

En el cas diofàntic, que engloba gairebé tots els nombres irracionals en sentit de la mesura de Lebesgue, els resultats s'han de classificar segons si són *pertorbatius* o no. Són pertorbatius quan donen resposta positiva al problema dels deu martinis per a un cert $\omega \in DC(c, \tau)$ si $|b|$ és més petit que una certa constant que depèn de la classe diofàntica, és a dir, de les constants c i τ. El primer resultat en aquest sentit és degut a Sinai [Sin87], el 1987. Finalment, el 2004, Puig [Pui04] va demostrar el problema dels deu martinis per a freqüències diofàntiques i $|b| \neq 2$.

El cas $|b| = 2$, que ja hem vist que físicament es corresponia amb el cas "quadrat", és especial ja que, a partir de les investigacions numèriques d'Aubry [AA80] el 1980 es va tenir l'evidència que la mesura de l'espectre era zero (aquesta era l'anomenada "conjectura d'Aubry"). Per les propietats de la densitat inegrada d'estats i l'etiquetatge dels forats, aquesta conjectura implica el problema dels deu martinis per a aquests dos valors de b. Els primers resultats en aquesta direcció els varen obtenir Helffer i Sjöstrand [HS88], el 1989, en demostrar-ho per a un conjunt de diofàntics de mesura zero. Finalment Last [Las93] i Avila i Krikorian [AK03] demostraren aquesa conjectura per a tots els valors irracionals.

Així doncs, després quaranta o vint-i-cinc anys (segons com comptem), el problema dels deu martinis ha estat tancat.

Referències

[AA80] S. Aubry and G. André. Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices. In *Group theoretical methods in physics (Proc. Eighth Internat. Colloq., Kiryat Anavim, 1979)*, pages 133–164. Hilger, Bristol, 1980.

[AJ05] A. Avila and S. Jitomirskaya. The Ten Martini Problem. *Preprint*, 2005.

[AK03] A. Avila and R. Krikorian. Reducibility or non-uniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles. *To appear in Annals of Mathematics*, 2003.

[AS83] J. Avron and B. Simon. Almost periodic Schrödinger operators II. The integrated density of states. *Duke Math. J.*, 50:369–391, 1983.

[Azb64] M. Ya. Azbel. Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field. *Soviet Phys. JETP*, 19:634–645, 1964.

[BPS03] H. W. Broer, J. Puig, and C. Simó. Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill-Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys*, 241(2–3):467–503, 2003.

[BS82] J. Bellissard and B. Simon. Cantor spectrum for the almost Mathieu equation. *J. Funct. Anal.*, 48(3):408–419, 1982.

[BvESB94] J. Bellissard, A. van Elst, and H. Schultz-Baldes. ”noncommutative geometry of the quantum hall effect”. *J. Math. Phys.*, 35(10):5373–5451, 1994.

[CEY90] M. D. Choi, G. A. Elliott, and N. Yui. Gauss polynomials and the rotation algebra. *Invent. Math.*, 99(2):225–246, 1990.

[Hof76] D. R. Hofstader. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Phys. Rev. B*, 14(6):2239–2249, 1976.

[Hof79] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*. Basic Books Inc. Publishers, New York, 1979.

[HS88] B. Helffer and J. Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l’équation de Harper (avec application à l’équation de Schrödinger avec champ magnétique). *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (34):113 pp. (1989), 1988.

[JM82] R. Johnson and J. Moser. The rotation number for almost periodic potentials. *Comm. Math. Phys.*, 84:403–438, 1982.

[Joh82] R. Johnson. The recurrent Hill’s equation. *J. Diff. Eq.*, 46:165–193, 1982.

[Las93] Y. Last. A relation between a.c. spectrum of ergodic Jacobi matrices and the spectra of periodic approximants. *Comm. Math. Phys.*, 151(1):183–192, 1993.

[MW79] W. Magnus and S. Winkler. *Hill's equation*. Dover Publications Inc., New York, 1979. Corrected reprint of the 1966 edition.

[OA01] D. Osadchy and J. Avron. Hofstadter butterfly as quantum phase diagram. *J. Math. Phys.*, 42(12):5665–5671, 2001.

[Pui04] J. Puig. Cantor spectrum for the Almost Mathieu operator. *Comm. Math. Phys*, 244(2):297 – 309, 2004.

[Sim82] B. Simon. Almost periodic Schrödinger operators: a review. *Adv. in Appl. Math.*, 3(4):463–490, 1982.

[Sin87] Ya. G. Sinai. Anderson localization for one-dimensional difference Schrödinger operator with quasiperiodic potential. *J. Statist. Phys.*, 46(5-6):861–909, 1987.

[vM89] P. van Mouche. The coexistence problem for the discrete Mathieu operator. *Comm. Math. Phys.*, 122(1):23–33, 1989.