

COGNOMS I NOM:

- 1.- Una partícula, sobre la qual actua el camp de forces $F(x, y) = (xy, 1)$, es mou des del punt $(0, 3)$ seguint la corba $y = 3 + x - x^3$, $0 \leq x \leq 1$, i a continuació per la paràbola $9x = y^2$ fins al punt $(0, 0)$. Calculeu el treball (circulació) realitzat per F al llarg de la trajectòria de la partícula.

Primer tros: $\sigma_1(x) = (x, 3+x-x^3)$, $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 \langle \vec{F}(\sigma_1(x)), \sigma_1'(x) \rangle dx = \int_0^1 \langle (3x+x^2-x^4, 1), (1, 1-3x^2) \rangle dx$$

$$= \int_0^1 (1+3x-2x^2-x^4) dx = 1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{49}{30}$$

Segon tros: $\sigma_2(y) = (\frac{1}{9}y^2, y)$, y des de 3 fins a zero, o sigui orientada al revés de $[0, 3]$

$$-\int_0^3 \langle \vec{F}(\sigma_2(y)), \sigma_2'(y) \rangle dy = -\int_0^3 \langle (\frac{y^3}{9}, 1), (\frac{2y}{9}, 1) \rangle dy$$

$$= -\int_0^3 (\frac{2}{81}y^4 + 1) dy = -\frac{2 \cdot 3}{5} - 3 = -\frac{21}{5}$$

Circulació total:

$$\frac{49}{30} - \frac{21}{5} = -\frac{77}{30}$$

COGNOMS I NOM:

- 2.- Calculeu el moment d'inèrcia respecte de l'eix z de l'esfera d'equació $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, suposant que la seva densitat superficial de massa és $\rho(x, y, z) = 1 + |z|$.

Parametritzem en esfèriques

$$\varphi(\theta, \phi) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi)$$

$$dS = R^2 \cos \phi \, d\theta \, d\phi$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(1 + |R \sin \phi|)}_{\text{densitat}} \underbrace{R^2 \cos^2 \phi}_{\text{dist al quadrat}} \underbrace{R^2 \cos \phi \, d\phi \, d\theta}_{dS} =$$

$$= 4\pi R^4 \int_0^{\pi/2} (1 + R \sin \phi) \cos^3 \phi \, d\phi =$$

$$= 4\pi R^4 \int_0^{\pi/2} (\cos \phi (1 - \sin^2 \phi) + R \cos^3 \phi \sin \phi) \, d\phi =$$

$$= 4\pi R^4 \left(\left[\sin \phi - \frac{1}{3} \sin^3 \phi \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{R}{4} \cos^4 \phi \right]_0^{\pi/2} \right) =$$

$$= 4\pi R^4 \left(\frac{2}{3} + \frac{R}{4} \right)$$

Per fer la primitiva de $\cos^3 \phi$ també pot usar-se la identitat trigonomètrica

$$\cos^3 \phi = \frac{3}{4} \cos \phi + \frac{1}{4} \cos 3\phi,$$

però no cal