Equacions Diferencials

https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/

Tercera part: equacions en derivades parcials

Joan Solà-Morales

http://mat.upc.edu/en/people/jc.sola-morales

20 de desembre de 2021

EDPs. L'equació d'ones a la recta infinita, I

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \qquad x \in (-\infty, \infty), t \in (-\infty, \infty)$$

• $u(x,t) =$ desplaçament vertical de la corda
• $c^2 = \tau/\rho$, tensió dividida per densitat lineal. Aquí c té dimensions de velocitat, és la velocitat de les ones.
• $F(x,t)$, força externa (vertical) per unitat de massa

En el cas homogeni $F \equiv 0$ la solució general és

$$u(x,t) = p(x - ct) + q(x + ct),$$

on $p(x)$ i $q(x)$ són funcions arbitràries.

L'equació d'ones a la recta infinita, II
Fórmula de D'Alembert

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Fórmula de D'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$
$$+\frac{1}{2c}\int_0^t \left\{ \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\,dy \right\} ds.$$

Comprovem que és solució, comprovem que en el cas $F \equiv 0$ concorda amb la solució general donada abans

Exercici: llista de problemes, edps, problema 5.

L'equació d'ones amb condicions de contorn de Dirichlet.

(AQUI enllaç als *solvers* de Luis Silvestre.)

Separació de variables

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0, L) \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in (0, L) \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Deixem de banda les condicions inicials i busquem solucions de variables separades: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Surt

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \; T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right).$$

per $n = 1, 2, \ldots$.

Ara fem combinacions lineals (principi de superposició):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$
$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{cn\pi}{L}\right)\left(-a_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\, dy$$
$$b_n = \frac{L}{cn\pi}\frac{2}{L}\int_0^L g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\, dy.$$

Finalment,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\, dy\right] \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right.$$
$$\left. + \left[\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\, dy\right] \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$

Exercici: llista de problemes, edps, problema 7.

L'equació d'ones amb condicions de contorn de Neumann. Separació de variables

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0,\pi),\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi), \\ u_t(x,0)) = g(x) & x \in (0,\pi) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ens oblidem de moment de $f(x)$ i $g(x)$ i busquem solucions de la forma $X(x)T(t)$. Trobem

$$\cos(nx)\left(a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)\right)$$

per $n = 1, 2, \ldots,$ i també les solucions $a_0/2 + b_0 t/2$. Pel *principi de superposició*

$$u(x,t) = a_0/2 + b_0 t/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)\left(a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)\right)$$

Per exemple, si $f(x) = 1 - 2\cos(3x)$ i $g(x) \equiv 0$, fent $t = 0$ a u i a u_t tindrem $a_0/2 = 1$, $a_2 = -1$ tots els altres coeficients zero.

Condicions de frontera: Dirichlet, Neumann, mixtes i periòdiques

• Dirichlet: consisteix en donar els valors de u en els punts de frontera (frontera espaial).
• Neumann: consisteix en donar el valor de la derivada normal exterior a la frontera: $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$. En 1D és $-u_x$ a l'extrem esquerre i u_x a l'extrem dret.
• Mixtes (1D): Dirichlet en un extrem i Neumann en l'altre.
• Periòdiques (1D): u i u_x tenen els mateixos valors als dos extrems de l'interval $(0, L)$.

Valors propis i funcions pròpies en problemes amb valors de frontera

$$X'' = \lambda X, \qquad 0 < x < L \qquad (-L < x < L, \text{ en el cas periòdic})$$

Conds. contorn	**VAPs**	**FUPs**
$X(0) = X(L) = 0$	$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n \geq 1$	$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
$X'(0) = X'(L) = 0$	$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n \geq 0$	$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
$X(0) = X'(L) = 0$	$\lambda_n = -\left[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}\right]^2,\ n \geq 0$	$X_n(x) = \sin\left(\left[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}\right]x\right)$
$X'(0) = X(L) = 0$	$\lambda_n = -\left[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}\right]^2,\ n \geq 0$	$X_n(x) = \cos\left(\left[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}\right]x\right)$
$X(-L) = X(L)$ $X'(-L) = X'(L)$ (c.c. periòdiques)	$\lambda_0 = 0$, VAP simple, $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n \geq 1$, VAPs dobles	$X_0 \equiv 1$ $X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\widetilde{X}_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

(dels apunts de l'assignatura)

Desenvolupaments de Fourier. Al darrer pas de l'exemple anterior, hem aconseguit determinar tots els coeficients lliures per inspecció directa. Quan això no sigui possible, utilitzarem les fórmules següents per a calcular desenvolupaments de Fourier.

- El *desenvolupament de Fourier complet* d'una funció $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ és

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L), \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & \displaystyle\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x, \\ b_n & = & \displaystyle\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x. \end{array} \right.$$

- El *desenvolupament de Fourier en cosinus* d'una funció $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ és

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\pi x/L), \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x.$$

- El *desenvolupament de Fourier en sinus* d'una funció $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ és

$$f(x) \sim \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi x/L), \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x.$$

Als dos primers casos, el primer terme $a_0/2$ és la mitjana de la funció $f(x)$.

Es pot provar que aquests desenvolupaments en serie són (absoluta, uniformement) convergents quan la funció $f(x)$ és suficientment regular, si bé aquí treballarem a un nivell purament formal, sense preocupar-nos de la convergència.

Exercici. Sigui $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = 1 - \pi^2 x$. Comproveu, integrant per parts, que els coeficients del seu desenvolupament de Fourier en sinus són

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \pi^2 x) \sin(nx/2)\,\mathrm{d}x = 4\pi^2 \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n}, \qquad n \geq 1.$$

Separació de variables en problemes no homogenis

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & x \in (0,L), t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,L) \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in (0,L) \\ u(0,t) = \alpha(t), & t \in \mathbb{R} \\ u(L,t) = \beta(t), & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Abans de fer separació de variables s'ha de fer un primer pas: homogeneïtzació. S'ha de trobar (normalment, per inspecció) una funció $v(x,t)$ tal que $v_{tt} - c^2 v_{xx} = F(x,t)$, $v(0,t) = \alpha(t)$ i $v(L,t) = \beta(t)$ i definir la nova incògnita $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$, que haurà de ser solució d'un problema homogeni, i se li podrà aplicar el mètode de separació de variables.

Exercici: llista de problemes, edps, problema 4.
(homogeneïtzar, però a la recta infinita)

Separació de variables a l'eq. de la calor 1D, c.c. Dirichlet homogènies

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0,L),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,L), \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(L,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Si busquem solucions de variables separades $u = X(x)T(t)$ sense pensar en les condicions inicials, trobarem l'EDO

$$X''(x) = \lambda X(x),\ \text{amb } X(0) = X(L) = 0,$$

amb solucions $\lambda = \lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2$ i $X = X_n = \sin(\frac{n\pi}{L}x)$, per $n = 1, 2\ldots,$ i també l'EDO

$$T'(t) = k^2 \lambda T(t),$$

amb solució $T(t) = e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 k^2 t}$. Per tant

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi}{L}x) e^{-\frac{n^2\pi^2k^2}{L^2}t},$$
$$b_n = \tfrac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin(\tfrac{n\pi}{L}x)\, dx.$$

Separació de variables a l'eq. de la calor 1D

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0, L), \\ u(0,t) = \alpha & t > 0 \\ u(L,t) = \beta & t > 0. \end{cases}$$

Pas 1: homogeneïtzació. Trobar $v(x)$ tal que el canvi $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ converteixi el problema anterior en

$$\begin{cases} w_t = k^2 w_{xx} & x \in (0, L),\ t > 0 \\ w(x,0) = g(x) & x \in (0, L), \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 & t > 0. \end{cases},$$

amb $g(x) = f(x) - v(x)$. (es pren $v(x) = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{L} x$).

Pas 2: separació de variables al problema homogeneïtzat.

$$u(x,t) = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi}{L} x) e^{-\frac{n^2\pi^2k^2}{L^2} t}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \alpha - \frac{\beta-\alpha}{L} x \right) \sin(\tfrac{n\pi}{L} x)\, dx.$$

Pas 3: càlcul del límit quan $t \to \infty$ de $u(x,t)$.

Flux de calor a l'eq. de la calor 1D

$$
\begin{cases}
u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L),\ t > 0 \\
u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L), \\
u_x(0, t) = -h_e(t) & t > 0 \\
u_x(L, t) = h_d(t) & t > 0,
\end{cases}
$$

$$E(t) = \int_0^L c\, u(x, t)\, dx$$

$$\frac{d}{dt} E(t) = ck^2 \left(h_d(t) + h_e(t)\right).$$

Per tant, Neumann homogeni significa tèrmicament aïllat.

Exercici: En el cas Neumann homogeni, comproveu que

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx.$$

Separació de variables a l'eq. de Laplace 2D en un rectangle

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in (0, L), y \in (0, M) \\ u(x, 0) = 0 & x \in (0, L), \\ u(x, M) = 0 & x \in (0, L), \\ u(0, y) = 0 & y \in (0, M), \\ u(L, y) = f(y) & y \in (0, M). \end{cases}$$

Busquem solucions de la forma $X(x)Y(y)$ amb $Y(0) = Y(M) = 0$ i tambe amb $X(0) = 0$. Escrivint

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

surt $\lambda_n = -n^2\pi^2/M^2$, $Y_n(y) = \sin(n\pi y/M)$, $X_n(x) = \sinh(n\pi x/M)$. Volem ajustar la condicio de contorn per $x = L$ a la funcio $u = \sum C_n \sinh(n\pi x/M) \sin(n\pi y/M)$, i surt

$$C_n = \frac{1}{sinh(n\pi L/M)} \frac{2}{M} \int_0^M f(y) \sin(n\pi y/M)\, dy$$

Un cas de l'eq. de Poison 2D en un rectangle

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 2y & x \in (0,\pi), y \in (0,2\pi) \\ u(x,0) = 0 & x \in (0,\pi), \\ u(x,2\pi) = 2\pi x^2 & x \in (0,\pi), \\ u(0,y) = 0 & y \in (0,2\pi), \\ u(\pi,y) = 1 & y \in (0,2\pi). \end{cases}$$

Pas 1: homogeneïtzació. $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$ amb $v(x,y) = x^2 y$ (variables separades). Volem hom. totes les igualtats excepte l'última, que queda $w(\pi,y) = 1 - \pi^2 y$.

Pas 2: separació de variables al problema homogeneïtzat.

$Y(y) = Y_n(y) = \sin ny/2$. $\lambda_n = -n^2/4$, $n \geq 1$.

$X(x) = X_n(x) = \sinh nx/2$.

$$u(x,y) = x^2 y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh(n\pi/2)} \sinh(nx/2) \sin(ny/2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \pi^2 y) \sin(ny/2)\, dy = 4\pi^2 \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

Exercici: Escriviu les dues EDOs que s'obtenen a l'imposar que $u(x, t) = X(x)T(t)$ compleixi la EDP $u_{tt} = c^2 u_{xx} - k u_t$ (corda vibrant amb fricció, $k > 0$). Elegiu la EDO més simple possible per a l'equació de la $X(x)$.

Exercici: llista de problemes, edps, problema 8. (calor periòdica)
Exercici: llista de problemes, edps, problema 9. (ones amb fricció)
Exercici: llista de problemes, edps, problema 3. (energia de l'ona)