Equacions Diferencials, 2021/22/Q1
https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/

Bloc 2: Equacions diferencials ordinàries

Joan Solà-Morales
http://mat.upc.edu/en/people/jc.sola-morales
Grups 10 i 50:
https://meet.google.com/jnm-cdeq-yay

compilat: 26 de novembre de 2021

Repàs:

• EDOs de variables separades de la forma $x'(t) = f(t)g(x(t))$.

• EDOs lineals de primer ordre de la forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t),$$

on $a(t)$ i $b(t)$ son funcions donades.

• Sistemes lineals homogenis a coeficients constants de la forma

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t),$$

quan la matriu quadrada A és diagonalitzable.

Sistemes d'EDOs de primer ordre en forma normal

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t)$$

- t és el temps o variable independent
- $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ és la incògnita
- $\vec{F} : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és el camp de velocitats o camp de vectors. Si $\vec{F}(\vec{x}, t) \equiv \vec{F}(\vec{x})$ es diu que el camp és autònom.
- una solució $\vec{x}(t)$ pot estar definida només a un interval $t \in I = [a, b]$. Una solució també s'anomena trajectòria. La corba $\vec{x}([a, b])$ (sense parametritzar) també s'anomena òrbita.

Exercici: Dibuixeu els camps vectorials $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ i $\vec{G}(x, y) = (-y, x)$ i algunes de les seves òrbites.

Teorema d'Existència i Unicitat

Si el camp vectorial $\vec{F}(t,\vec{x})$ *és de classe* $\mathcal{C}^1$ *en un obert* $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *i* $(t_0,\vec{x}_0)\in U$*, aleshores el Problema de Valor Inicial*

$$\vec{x}' = \vec{F}(t,\vec{x}), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

té una i exactament una solució local (local vol dir: potser només definida quan $|t-t_0|$ *és prou petit).*

Corol·lari: *Si* $\vec{F}(t,\vec{x}) \equiv \vec{F}(\vec{x})$ *(cas autònom), per cada* $\vec{x}_0$ *passa una ùnica òrbita.*

Dem: Si $\vec{x}(t)$ i $\vec{y}(t)$ són dues solucions amb condicions inicials $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ i $\vec{y}(t_1)=\vec{x}_0$ respectivament, aleshores $\vec{y}(t)=\vec{x}(t-t_1+t_0)$.

EDOs d'ordre superior (ordre n)

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots x^{(n-1)}).$$

Notem que la solució $x(t)$ és una funció escalar de t i que f és una funció escalar que depèn de $n+1$ arguments escalars. És equivalent a un sistema de EDOs de primer ordre amb n equacions, de la forma $\vec{x}' = \vec{F}(t, \vec{x})$ introduint les noves funcions incògnites $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x''$, $\dots$ $x_n = x^{(n-1)}$ i definint

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = (x_2, x_3, \dots x_n, f(t, \vec{x})).$$

Notem que pel teorema d'existència i unicitat aquest problema tindrà una solució (local) única si f és de classe $\mathcal{C}^1$ i es fixen les condicions inicials $x(t_0) = a_1$, $x'(t_0) = a_2$, $\dots$ $x^{(n-1)}(t_0) = a_n$.

Exemple 36: Trobeu la solució de $x' = x^2$ amb $x(0) = 1$ i trobeu l'interval màxim de definició I.
Exemple 37: El PVI $tx' = x$ amb $x(0) = 0$ té infinites solucions, i el PVI $tx' = x$ amb $x(0) = x_0 \neq 0$ no en te cap.
Exemple 38: Trobeu la solució general de $x' = ax + b$ i comproveu que les gràfiques de dues solucions diferents mai es toquen.
Exemple 39: Trobeu la solució general de $x'' + \omega^2 x = 0$ i comproveu que les gràfiques de dues solucions diferents si que es poden tocar. Contradiu això el Teorema d'Existència i Unicitat?

(d1)

Retrats de fases d'EDOs autònomes de primer ordre

Si tenim $x' = f(x)$ per f definida a I, dibuixar el seu retrat de fases consisteix en distingir els intervals on $f(x)$ és > 0 i < 0, i els punts on $f(x) = 0$. Aquests conjunts són òrbites.
En els primers les solucions són creixents, en els segons són decreixents i en els punts ón f s'anul·la les solucions són constants, i s'anomenen punts d'equilibri.
Una solució creixent que té límit quan $t \to \infty$ tendeix a un punt d'equilibri, i el mateix quan $t \to -\infty$. Per això es pot parlar de punts d'equilibri atractors i repulsors (i també dels que són atractors per una banda i repulsors per l'altra). D'això se'n diu fer l'anàlisi de la seva estabilitat.

Exemple 40: Dibuixeu el retrat de fases de *l'equació logística* $x' = kx(1 - x/m)$, per $k, m > 0$.

Exemple 41: Discutiu l'estabilitat de l'únic punt d'equilibri de $x' = x^2$.

Exercici: Sigui x_0 un punt d'equilibri de la EDO $x' = f(x)$. Demostreu que si $f'(x_0) > 0$ aleshores és repulsor, i si $f'(x_0) < 0$ aleshores és atractor.

Sistemes lineals (de n equacions)

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

on $\vec{x} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ és la incògnita, $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ són funcions contínues donades. En coordenades:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{1,1}(t)x_1(t) + a_{1,2}(t)x_2(t) + \dots a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\
x_2'(t) &= a_{2,1}(t)x_1(t) + a_{2,2}(t)x_2(t) + \dots a_{2,n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= a_{n,1}(t)x_1(t) + a_{n,2}(t)x_2(t) + \dots a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t)
\end{aligned}$$

El problema de valor inicial consisteix en trobar una solució del sistema que compleixi la condició inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, on $t_0 \in I$ i $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ són donats. El problema de valor inicial sempre té una solució i només una.

El sistema es diu homogeni si $\vec{b}(t) \equiv 0$ i es diu a coeficients constants si $A(t) \equiv A$ (A no depèn de t).

Estructura de les solucions

• Les solucions d'un sistema lineal homogeni constitueixen un espai vectorial de dimensió n.

• Totes les solucions d'un sistema lineal no homogeni poden expressar-se com la suma de les solucions del sistema homogeni associat i una solució particular del sistema no homogeni.

• Un conjunt fonamental de solucions d'un sistema lineal homogeni és qualsevol base d'aquest espai vectorial de solucions, és a dir qualsevol conjunt de n solucions linealment independents. Si $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots \vec{x}_n(t)$ és un conjunt fonamental de solucions d'un sistema lineal homogeni, aleshores la solució general d'aquest sistema homogeni és

$$\vec{x}_h(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + \cdots C_n\vec{x}_n(t)$$

amb $C_1, C_2, \dots C_n \in \mathbb{R}$ constants arbitràries.

El Wronskià de n solucions $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots \vec{x}_n(t)$ d'un sistema lineal homogeni

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

és

$$W(t) = W[\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots \vec{x}_n(t)] = \det[\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots \vec{x}_n(t)]$$

o sigui, és el determinant de la matriu quadrada que es forma a l'escriure les solucions en columnes.

Fórmula de Liouville:

$$\frac{d}{dt}W(t) = \text{ Traça } (A(t))\, W(t)$$

(en conseqüència, $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \text{ Traça } (A(s))\, ds}$.)

• Una propietat molt important del Wronskià d'un conjunt de n solucions d'un sistema homogeni: I interval, $t_0 \in I$ i $W(t_0) \neq 0$, implica que $W(t) \neq 0$ per tot $t \in I$.

• D'aqui es dedueix que $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots \vec{x}_n(t)$ son linealment independents (són un conjunt fonamental) si i sols si $W(t_0) \neq 0$ en algun $t_0 \in I$.

Una matriu $X(t)$ de dimensions $n \times n$ que les seves columnes siguin un conjunt fonamental de solucions de $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ compleix també que $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$ i rep el nom de matriu fonamental del sistema. La solució general pot expressar-se com $\vec{x}_h = X(t)\vec{c}$, on $\vec{c} = (C_1, C_2, \dots C_n)$ és un vector (columna) de constants lliures.

(d2)

Sistemes lineals homogenis a coeficients constants, $A(t) \equiv A$

• Proposició: Si $\vec{v}$ és un VEP de A amb VAP λ aleshores $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ és una solució de $\vec{x}' = A\vec{x}$ i a més $\vec{x}(0) = \vec{v}$.

•Exercici: (important) Si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ i $A\vec{u} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$, aleshores $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v})$ és solució, i $\vec{x}(0) = \vec{u}$.

• Exercici: (generalitza la proposició, no és de coeficients contants, també és important) Si $\vec{v}$ (constant) és tal que $A(t)\vec{v} = \lambda(t)\vec{v}$ aleshores $\vec{x}(t) = e^{\int \lambda(t)\, dt} \cdot \vec{v}$ és solució del sistema no autònom $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$

• Teorema: Suposem que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ és una base de VEPs de la matriu A amb VAPs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Aleshores $\{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1, e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2, \ldots e^{\lambda_n t}\vec{v}_n\}$ és un conjunt fonamental de solucions de $\vec{v}' = A\vec{v}$.

Exemple 42: Calculeu la solució general i una matriu fonamental del sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$.

Exercici: Sigui $\vec{x}(t)$ una solució qualsevol del sistema anterior. Què es pot dir de $\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t)$?

Exercici: Calculeu la solució general i una matriu fonamental del sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$.

VAPs no reals

Proposició: Suposem $\vec{v}_\pm = \vec{u} \pm i\vec{w}$ són VEPs de vaps $\lambda_\pm = \alpha \pm i\beta$ d'una matriu real A de tamany $n \times n$. Aleshores

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda_+ t}\vec{v}_+) = e^{\alpha t}(\vec{u}\cos\beta t - \vec{w}\sin\beta t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda_- t}\vec{v}_-)$$
$$\mathrm{Im}(e^{\lambda_+ t}\vec{v}_+) = e^{\alpha t}(\vec{u}\sin\beta t + \vec{w}\cos\beta t) = -\mathrm{Im}(e^{\lambda_- t}\vec{v}_-)$$

són dues solucions linealment independents de $\vec{x}' = A\vec{x}$.

Exercici: Calculeu la solució general i una matriu fonamental del sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$.

(d3)

Exemple 43: Calculeu la solució general i una matriu fonamental del sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Polinomi característic: $-(\lambda - 1)(\lambda^2 + 25)$. VAPs: $1, 0 \pm 5i$.
- VEPs, respectivament:

$$\begin{pmatrix} 25 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+5i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-5i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Conjunt fonamental:

$$\begin{pmatrix} 25 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} e^t, \begin{pmatrix} \cos 5t - 5\sin 5t \\ \cos 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix} e^{0t}, \begin{pmatrix} \sin 5t + 5\cos 5t \\ \sin 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix} e^{0t}.$$

Fórmula de variació de les constants

Teorema:

Si $X(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x}$$

i la derivada de la funció vectorial $\vec{u} : I \to \mathbb{R}^n$ és una solució del sistema (algebraic) $X(t)\vec{u}'(t) = \vec{b}(t)$

aleshores $\vec{x}_p(t) = X(t)\vec{u}(t)$ és una solució (particular) del sistema no homogeni $\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}$.

(Demostració: comprovació)

Exemple 44: *Calculeu la solució general del sistema* $\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$, *on*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} \ \ i \ \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

(Nota: els VEPs de $A(t)$ no depenen de t).

- VAPs, VEPs i $X(t)$:

$$t, 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix}.$$

- Mètode de variació de les constants:

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

EDOs lineals de 2n ordre amb coeficients constants

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

Sempre podem escriure-ho com:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t)/a \end{pmatrix}$$

Podem resoldre el sistema homogeni (VAPs i VEPs) i després usar el mètode de variació de constants.

Equació homogènia. Mètode alternatiu: es poden buscar solucions de la forma $x(t) = e^{mt}$. Queda l'equació característica: $am^2 + bm + c = 0$.

- Si m_1, m_2 reals i diferents, la solució general és
$$x = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}$$
- Si m_1 és una arrel doble, aleshores $x = Ae^{m_1 t} + Bte^{m_1 t}$
- Si són no reals, $m_\pm = \alpha \pm i\beta$, aleshores
$$x = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\sin\beta t.$$

(d4)

Problema 10, (homogènies). Problema 13 (no homogènia)

Estabilitat de sistemes lineals a coeficients constants $\vec{x}' = A\vec{x}$

Inestable: Si álguna de les seves solucions escapa a infinit quan $t \to +\infty$.
Estable: Quan no és inestable.
Atractor: (o assimptòticament estable) si totes les solucions no trivials tendeixen a l'origen quan $t \to \infty$ i tendeixen a infinit quan $t \to -\infty$.
Repulsor: Si totes les seves solucions no trivials escapen a l'infinit quan $t \to \infty$ i tendeixen a l'origen quan $t \to -\infty$.

Observacions:
• $\vec{x}' = A\vec{x}$ és atractor si i sols si $\vec{x}' = -A\vec{x}$ és repulsor (i al revés). Però això no passa amb estable/inestable.
• Estable/inestable són característiques complementaries: o és estable o és inestable. En canvi, hi ha sistemes que no son ni atractors ni repulsors.

Exemple 45: $\vec{x}_h = \vec{C}e^{\lambda t}$ és la solució general de $\vec{x}' = (\lambda I)\vec{x}$. És un repulsor si $\lambda > 0$, i un atractor si $\lambda < 0$. En canvi, si $\lambda = 0$ és estable, però no assimptòticament estable.

Més observacions:

• Sigui $\vec{v}$ un VEP de A de VAP $\lambda \in R$. Sigui $r = [\vec{v}]$ la recta generada per $\vec{v}$. Aquesta recta és *invariant* pel sistema, en el sentit que si $\vec{x}(0) \in r$ aleshores $\vec{x}(t) \in r$ per tota t ($\vec{x}(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$). El sistema restringit a r és atractor (*recta d'entrada*) si $\lambda < 0$ i repulsor (si $\lambda > 0$ *recta de sortida*).

• Si $\vec{v}_{\pm} = \vec{u} \pm i\vec{w}$ són VEPs no reals de A amb VAPs no reals $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$ aleshores el pla (real) $[\vec{u}, \vec{w}]$ també és invariant i

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha t}\left(C_1(\vec{u}\cos\beta t - \vec{w}\sin\beta t) + C_2(\vec{u}\sin\beta t + \vec{w}\cos\beta t)\right)$$

són les solucions dins d'aquest pla. Per tant, dins d'aquest pla el sistema serà atractor (*pla d'entrada*) si $\alpha = \text{Re}(\lambda) < 0$ i repulsor (*pla de sortida*) si $\alpha = \text{Re}(\lambda) > 0$.

Com a conseqüència d'aquestes observacions tenim

Teorema: *El sistema* $\vec{x}' = A\vec{x}$*,*
- *si A té algun VAP amb Re*$(\lambda) > 0$*, és inestable.*
- *si tots els VAPs de A satisfan Re*$(\lambda) > 0$*, és repulsor.*
- *si tots els VAPs de A satisfan Re*$(\lambda) < 0$*, és estable i atractor.*

Exemple 46: Estudieu l'estabilitat per

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercici: Proveu que si la traça de A és positiva, aleshores el sistema és inestable.

(d5)

Classificació de SLs a coeficients constants a $\mathbb{R}^2$

Considerem sistemes lineals amb A una matriu 2×2 no degenerada (vaps diferents de 0).

Terminologia :

• *sella*: si els VAPs son reals i de signes diferents ($D < 0$).

• *node*: si els VAPs son reals i amb el mateix signe ($D > 0$ i $\Delta \geq 0$)

  • *atractor/repulsor*: segons si els VAPs són negatius o positius ($T < 0$ o $T > 0$)

  • *propi/impropi*: segons si diagonalitza o no diagonalitza

• *centre*: si els VAPs són imaginaris purs ($T = 0$ i $D > 0$)

• *focus*: si els vaps són no reals (conjugats, $T \neq 0$ i $\Delta < 0$). És *atractor* o *repulsor* segons si la part real és negativa o positiva.

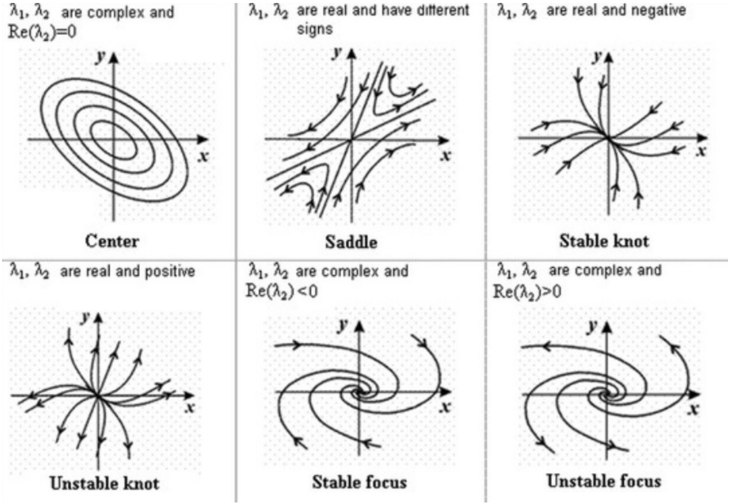
(T traça, D determinant, $\Delta = T^2 - 4D$ discriminant)

Exemple 47: Classifiqueu el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ amb

$$A = \begin{pmatrix} -2\mu & 2\mu - 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

segons els valors de $\mu \in \mathbb{R}$.

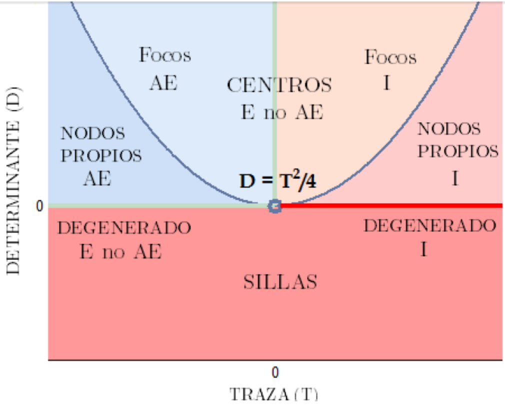
Croquis (o Retrats de Fases) de SLs a coeficients constants



Classificació en el pla (T,D)

T= traça, D=Determinant. Discriminant $\Delta = T^2 - 4D$.

Pol. carac. $\lambda^2 - T\lambda + D$. VAPs: $\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$.



Els punts on un sistema canvia de tipus s'anomenen bifurcacions, i coincideixen amb punts on s'anula T, D o Δ.

(d6)

Sistemes no lineals

(Sistemes no lineals autònoms de primer ordre expressats en forma normal).

$F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ camp de vectors.

$$\vec{x}' = F(\vec{x}).$$

Def.: Direm que $\vec{x}_0 \in U$ és un *punt d'equilibri* si $F(\vec{x}_0) = 0$.
(Aleshores $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$ és una solució.)

Com són les solucions que comencen en punts propers a un equilibri?

Defs.:

- Direm que l'equilibri $\vec{x}_0$ és *estable* quan $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $||\vec{x}(0) - \vec{x}_0|| < \delta \Rightarrow ||\vec{x}(t) - \vec{x}_0|| < \varepsilon, \forall t > 0$.
- Direm que és *inestable* quan no és estable.
- *Atractor* o *Assimptòticament estable* si és estable i a més existeix $\delta_0 > 0$ tal que $||\vec{x}(0) - \vec{x}_0|| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_0$.
- *Repulsor* si és atractor per $\vec{x}' = -F(\vec{x})$.

Estabilitat per linealització

Si $\vec{x}_0$ és un punt d'equilibri del SNL $\vec{x}' = F(\vec{x})$, direm que

$$A = DF(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

és la matriu del *sistema linealitzat* en el punt $\vec{x}_0$.

$$(\vec{x}(t) - \vec{x}_0)' = F(\vec{x}(t)) = F(\vec{x}_0 + (\vec{x}(t) - \vec{x}_0)) =$$
$$= F(\vec{x}_0) + DF(\vec{x}_0)(\vec{x}(t) - \vec{x}_0) + \cdots \approxeq A(\vec{x}(t) - \vec{x}_0)$$

Teorema:

• Si A té algun VAP de part real positiva, aleshores $\vec{x}_0$ és inestable pel SNL.

• Si tots els VAPs de A tenen part real negativa/positiva aleshores $\vec{x}_0$ és atractor/repulsor.

• En tots els altres casos la linealització no decideix l'estabilitat.

Exemple 52: Estudieu per linealització l'estabilitat de $(0,0,0)$ pel sistema 3D següent (*de Lorenz*)

$$\begin{aligned} x_1' &= \sigma(x_2 - x_1) \\ x_2' &= x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ x_3' &= x_1 x_2 - \beta x_3 \end{aligned}$$

amb $\sigma, \beta > 0$ i $\rho > 1$.
($\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(\rho-1)}\right)$ i $\lambda_3 = -\beta$)

Exemple 53: Digueu què podem dir per linealització de l'estabilitat de l'origen pel sistema 2D no lineal següent

$$x_1' = x_2(x_1 - 1),$$
$$x_2' = x_1(1 - x_1).$$

I del punt d'equilibri $(1,1)$?

(d7)

Estabilitat pel mètode de Liapunov

Exemple 54: Estudieu com varia la funció $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ sobre les trajectòries del sistema anterior. Estudieu l'estabilitat del $(0,0)$ a partir d'això.

Exercici: Dibuixeu el retrat de fases del sistema 2D anterior. Discutiu l'estabilitat de tots els seus punts d'equilibri.

El *mètode de Liapunov* consisteix en buscar funcions escalars apropiades $V(\vec{x})$, calcular $\frac{d}{dt}V(\vec{x}(t))$ i deduïr-ne propietas d'estabilitat dels equilibris.

Donat un sistema autònom $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$ amb $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i una funció (escalar) $V : U \to \mathbb{R}$ definim la *derivada temporal* $W(\vec{x})$ de V com

$$W(\vec{x}) := \langle \text{grad } V(\vec{x}), \vec{F}(\vec{x}) \rangle.$$

Notem que $(d/dt)V(\vec{x}(t)) = W(\vec{x}(t))$.
Si $W(\vec{x}) \equiv 0$, direm que V és una *quantitat conservada*.

Def.: Direm que una funció $W : U \to \mathbb{R}$ és *semidefinida positiva/negativa* en un punt $\vec{x}_0 \in U$ quan $W(\vec{x}_0) = 0$ i W té un mínim/màxim relatiu en el punt $\vec{x}_0$. I direm que és *definida positiva/negativa* quan a més aquest mínim/màxim sigui estricte.

Exemple: $W(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2$ és definida positiva a l'origen, mentre que $W(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_3^2$ no ho és, encara que és semidefinida positiva.

Teorema (Liapunov): Suposem $\vec{x}_0$ punt d'equilibri de $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$, sigui $V(\vec{x})$ una funció escalar que tingui un mínim local estricte en el punt $\vec{x}_0$ i sigui W la seva derivada temporal.

1) Si $W(x)$ és definida positiva/negativa a $\vec{x}_0$ aleshores el punt $\vec{x}_0$ és repulsor/atractor.
2) Si $W(\vec{x})$ és semidefinida negativa a $\vec{x}_0$, aleshores el punt $\vec{x}_0$ és estable.

3) Si $W(\vec{x})$ és semidefinida positiva a $\vec{x}_0$, aleshores el punt $\vec{x}_0$ no és atractor.
4) Si $W(\vec{x})$ és semidefinida positiva/negativa a $\vec{x}_0$ i cap trajectòria (excepte $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$) està continguda al conjunt de nivell $\{W(\vec{x}) = 0\}$, aleshores el punt $\vec{x}_0$ és repulsor/atractor.
5) Si $W \equiv 0$ aleshores el punt $\vec{x}_0$ és estable, però no atractor.

Evolució del volum

$\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ camp de vectors que depèn del temps.

$$\vec{x}' = F(\vec{x}, t).$$

En els instants t_0 i les posicions $\vec{x}_0$ en els que div$\vec{F}(\vec{x}_0, t_0) > 0$ (resp. $= 0$, ò < 0), el sistema expandeix (resp. conserva, o contrau) volum localment.

(Penseu que $\vec{F}(\vec{x}, t)$ és la velocitat de les partícules d'un gas.)

En el cas lineal $\vec{F}(\vec{x}, t) = A(t)\vec{x}$, i div$\vec{F}(\vec{x}, t) = \mathrm{Tr}A(t)$. Si $X(t)$ és una matriu fonamental de $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$, recordeu que $\frac{d}{dt}\det X(t) = \mathrm{Tr}A(t)\det X(t)$ (Fórmula de Liouville), i per tant

$$\det X(t) = \det X(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}A(s)\ ds}$$

Problemes 27, 28 i 29.

Retrat de fases del pèndol

$m\ell\theta'' = -mg\sin\theta$, o, escrit com un sistema de primer ordre,

$$\begin{aligned} \theta' &= \omega, \\ \omega' &= -\frac{g}{\ell}\sin\theta. \end{aligned}$$

- Punts d'equilibri $(\theta, \omega) = (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Estabilitat per linealització
- Quantitat conservada (energia mecànica):
$$V(\theta, \omega) = m\ell^2\omega^2/2 + mg\ell(1 - \cos\theta).$$
- Retrat de fases
- Pèndol amb fricció:
$$m\ell\theta'' = -mg\sin\theta - \mu\ell\theta'.$$