

Equacions Diferencials, 2021/22/Q1

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Bloc 1: Càlcul vectorial

Joan Solà-Morales

<http://mat.upc.edu/en/people/jc.sola-morales>

Grups 10 i 50:

<https://meet.google.com/jnm-cdeq-yay>

compilat: 21 d'octubre de 2021

- Una **corba regular** de \mathbb{R}^n és una corba suau i simple que es recorre seguint una de les dues possibles orientacions sense que la velocitat pugui anul·lar-se en cap punt:

$$C = \sigma(I) = \{\sigma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- La funció vectorial $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ rep el nom de **parametrització regular**, definida sobre un interval compacte $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que és injectiva (excepte als extrems, si c és **tancada**), i $\sigma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ i $\sigma'(t) \neq \vec{0}$ per tot $t \in I$.
- Una corba és **regular a trossos** si està composta d'un nombre finit de corbes regulars.

Elements de C en el punt $\sigma(t_0)$:

- **Vector tangent:** $\sigma'(t_0)$.
- **Velocitat:** $\|\sigma'(t_0)\|$.
- **Vector tangent unitari:** $T(t_0) = \sigma'(t_0)/\|\sigma'(t_0)\|$
(atenció, $-T(t_0)$ també és tangent i unitari).
- **Element de longitud:** $d\ell = \|\sigma'(t_0)\| dt$.
- **Vector diferencial de longitud:** $d\vec{\ell} = \sigma'(t)dt = T(t)d\ell$.

Exemple: $\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$.

Longitud d'una corba

$$\text{Long}(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_I d\ell$$

on $I = [a, b]$ (ho podem imaginar com a limit de poligonals recorregudes amb velocitat constant a cada costat).

- Exemple 1: La longitud d'una corba no depèn de la velocitat ni de la orientació amb que es recorre. No depèn de la parametrització. Per exemple: $\sigma(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t))$ amb $I = [0, 2\pi/|\omega|]$, $R > 0$, $\omega \neq 0$.
- Exemple 2: Longitud d'una corba regular a trossos:

$$\sigma(t) = \begin{cases} (R \cos(t), R \sin(t), 0), & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2 \\ (0, R, h(t - \pi/2)) & \text{si } \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

La seva longitud és $\pi(R + h)/2$.

- Exemple 3: Si la parametrització no és regular, pot ser $\text{Long}(C) = \infty$.
- Exemple 4: Longitud de l'astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (enllaç). Parametritzem com $(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ amb $I = [0, 2\pi]$. Encara que $\sigma'(t)$ val zero per alguns valors de t , podem calcular la seva longitud. (6a, reduïm a 1r quad.).

Corbes i gràfiques: Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la manera més fàcil de parametritzar la seva gràfica és $\sigma(x) = (x, f(x))$. Aleshores $d\ell = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ i $\text{Long}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

- Exemple 5: Longitud de la gràfica de $y = mx + n$ sobre $[a, b]$. és $(b - a) / \cos \alpha$, on $\tan \alpha = |m|$.
- Problema 1 de la llista. (8R, $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$).

Gràfiques 3D: Si la corba C de \mathbb{R}^3 pot parametritzar-se com $\sigma(x) = (x, f(x), g(x))$ amb $x \in [a, b]$ aquesta serà la manera que moltes vegades preferirem, encara que no sempre és possible. En aquest cas

$$d\ell = \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2} dx$$

$$\text{Long}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2} dx$$

• Exemple 6: La longitud de l'espira

$\{x = R \cos(2\pi z/h), y = R \sin(2\pi z/h), z \in [0, h]\}$, de radi R i altura h és $\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}$. Observi's els límits $h \rightarrow 0$ i $R \rightarrow 0$.

Corbes expressades en polars: $r = g(\theta)$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

El millor és $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$\sigma(\theta) = (g(\theta) \cos \theta, g(\theta) \sin \theta), \quad d\ell = \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} d\theta.$$

Exemple 7: Longitud de la cardioide $r = R(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$
(ENLLAÇ, $8R$, $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$, i atenció al signe...).

Exemple 8: Longitud d'una volta de l'espiral logarítmica
 $r = Re^{-\omega\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ ($R\sqrt{1 + \omega^2}(1 - e^{-2\pi\omega})/\omega$). Fer també el
cas $\theta \in [0, \infty)$, surt $R\sqrt{1 + \omega^2}/\omega$ quan $\omega > 0$.

Integrals de funcions sobre corbes

Integral sobre la corba $C = \sigma([a, b])$ d'una funció $f : C \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_C f \, d\ell = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$$

• Si C és un filferro, $\rho : C \rightarrow \mathbb{R}$ és la seva densitat lineal (podria ser homogeni, $\rho \equiv \rho_0$), podem calcular

• $m(C) = \int_C \rho \, d\ell$, la massa de C .

• $\bar{f} = \frac{1}{m(C)} \int_C f \rho \, d\ell$, mitjana de f ponderat per ρ .

• $\text{CM}(C) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(C)} \int_C (x, y, z) \rho \, d\ell$, el centre de masses de C (si la densitat és homogènia es denomina centre geomètric, CG).

• $I_e = \int_C r^2 \rho \, d\ell$, moment d'inèrcia de C respecte d'un eix e , on $r(p) = \text{dist}(p, e)$.

Nota: Simetries del CG i del CM heretada de les simetries de C i de ρ .

Exemple 9: massa de l'astroide de l'exemple 4 quan la seva densitat lineal és $\rho(x, y) = |xy|$. Usem les simetries i ho calculem només en el primer quadrant. El total és: $9\pi a^3/64$. (S'usen identitats trigonomètriques.)

Exemple 10: mitjana de la temperatura sobre el filferro helicoïdal $C = \sigma([0, 2\pi])$ on $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ quan la temperatura es igual al quadrat de la seva distància a l'origen (veure exemple 6). (No ens diuen que la mitjana sigui ponderada, per tant prenem $\rho \equiv 1$). Surt $1 + 4\pi^2/3$.

- Tanca construïda sobre una corba. àrea, mitjana de l'alçada.

Problema 9 de la llista.

Problema t1 de 2/11/2018

(s1)

Camps de vectors

Un camp vectorial 2D és una funció $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Un camp vectorial 3D és una funció $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Circulacions de camps de vectors al llarg de corbes

La circulació de F al llarg de la corba $C = \sigma(I)$ és

$$\int_C F \cdot d\vec{\ell} = \int_C \langle F, d\vec{\ell} \rangle = \int_C \langle F, T \rangle d\ell = \int_a^b \langle F, \sigma'(t) \rangle dt.$$

Treball realitzat per F . Component tangencial de F . Si F és perpendicular a $\sigma'(t)$, aleshores la circulació és zero.

Si $F = (P, Q)$ o $F = (P, Q, R)$ la circulació també s'escriu

$$\int_C Pdx + Qdy \quad \text{o bé} \quad \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

Exemple 11: La circulació d'un camp al llarg d'una corba no depèn de la velocitat (de la parametrització) però sí de la orientació. Prenem per exemple $\sigma(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$ i $F(x, y) = (-y, x)$ ($\pm 2\pi R^2$).

L' exemple 11 motiva que a partir d'ara escrivim

$$\int_{C^+} \langle F, d\vec{\ell} \rangle \text{ o bé } \int_{C^-} \langle F, d\vec{\ell} \rangle$$

si és que està clara quina és l'orientació positiva, i igualment

$$\oint_{C^+} \langle F, d\vec{\ell} \rangle \text{ o bé } \oint_{C^-} \langle F, d\vec{\ell} \rangle$$

si la corba C és tancada. Si C és a \mathbb{R}^2 i C és tancada, l'orientació positiva és l'orientació antihorària.

Exemple 12: La circulació d'un camp al llarg d'una corba no depèn de la velocitat però en general sí que depèn del camí seguit per a connectar el punt inicial A de la corba amb el punt final B .

Calculem la circulació de $F(x, y) = (y^2, x^2)$ al llarg de tres corbes que uneixen $A = (0, 0)$ amb $B = (1, 1)$.

1.- $\sigma(t) = (t, t), 0 \leq t \leq 1$. Surt $2/3$.

2.- $\sigma(t) = (t, t^2), 0 \leq t \leq 1$. Surt $7/10$.

3.- $C = \sigma_1([0, 1]) \cup \sigma_2([1, 2])$, amb $\sigma_1(t) = (t, 0)$ i $\sigma_2(t) = (1, t - 1)$. Surt 1 .

Problemes 10 i 11

Pregunta t1 de 2/11/2018

Camps conservatius

Un camp es diu que és conservatiu si la seva circulació al llarg de qualsevol corba només depèn dels extrems (orientats) de la corba, però no del recorregut de la corba, o, equivalentment, quan té circulació zero sobre qualsevol corba tancada.

Quan $f(x, y, z)$ és una funció escalar, es diu que el camp $F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ és el gradient de f , $F = \text{grad } f$, i que f és el potencial escalar de F .

El teorema següent permetrà deduir que tots els camps gradients són conservatius.

Teorema del gradient (Newton-Leibniz)

La circulació al llarg d'una corba d'un camp que admet un potencial escalar és igual a la diferència del valor del potencial escalar entre els extrems (orientats) de la corba. En símbols:

$$a < b, C = \sigma([a, b]), A = \sigma(a), B = \sigma(b), \vec{F} = \text{grad } f \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = f(B) - f(A).$$

Demostració: Definim $g(t) = f(\sigma(t))$ i escrivim de manera explícita que $\int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a)$.

Corol·lari: Si un camp admet un potencial escalar aleshores tindrà circulació zero al llarg de qualsevol corba tancada, és a dir serà conservatiu.

Exemple 13: $F = (x, y, z)$ i $f = (x^2 + y^2 + z^2)/2$. Prenem $C = \sigma([0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = Re^t(\cos t, \sin t, 1)$. Tenim $A = \sigma(0) = (R, 0, R)$ i $B = \sigma(2\pi) = (Re^{2\pi}, 0, Re^{2\pi})$

Per tant la circulació serà $f(B) - f(A) = R^2(e^{4\pi} - 1)$. Si apliquem la definició de la circulació i fem la integral surt el mateix.

Exemple 14: Calculeu la circulació

$$\int_C (10x^4 - 2xy^3) dx - 3x^2y^2 dy$$

sent C la corba orientada des de $A = (0, 0)$ fins a $B = (2, 1)$ que compleix l'equació $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$.

Indicació: Newton-Leibniz. Resposta: 60.

Observació: A l'exemple 14 no ha calgut parametritzar la corba C , ni tan sols saber quin aspecte té.

Observació: no és senzill saber si un camp prové d'un potencial escalar, ni tampoc calcular-lo. Però hi ha una manera fàcil de veure que el camp NO prové d'un potencial escalar (que el seu rotacional no sigui zero, ho veurem més endavant).

En dimensió 2 hi ha una manera més senzilla de comprovar-ho: si $\vec{F} = (P, Q)$ i NO es compleix la igualtat de les *derivades creuades* $Q_x - P_y = 0$ (estem usant subíndexs per a denotar derivades parcials) aleshores és impossible que el camp vingui d'un potencial escalar.

Per tant en dimensió 2, si ens demanen calcular una circulació sobre una corba tancada $C \oint_C P dx + Q dy$ i volem usar un mètode alternatiu a calcular-la directament, podem calcular primer $Q_x - P_y$. Si ens dona zero, tenim esperances de que existeixi un potencial escalar, i la integral dongui zero. Però si $Q_x - P_y \neq 0$ aquesta esperança ja no la tenim. En aquest segon cas es pot aplicar la Fórmula de Green, que donarem a continuació.

Exemple 15: Calculeu $\int_C ydx - xdy$ on C és l'arc superior de l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ recorregut de dreta a esquerra. És conservatiu el camp $F = (y, -x)$? (Respostes: $-\pi ab$, i no, comparant amb el semieix horitzontal o calculant les derivades creuades).

Problema p2 de l'examen de 2/4/2019 (circulació sense N-L).
Problema p2 de l'examen de 28/10/2019 (s'usa N-L).

Orientacions consistents (o compatibles), cas pla: Donat un domini pla $D \subset \mathbb{R}^2$, sigui $C = \partial D$ la seva frontera. Ens l'imaginem dins del pla $x_3 = 0$ de \mathbb{R}^3 . Direm que C està orientada segons el vector vertical positiu \vec{k} si quan ens imaginem aquest vector com un caminant movent-se sobre C amb aquesta orientació resulta que l'interior de D li queda a la seva esquerra.

Exercici: orienteu segons el vector vertical \vec{k} la frontera de D quan D és l'espai entre dues circumferències concèntriques.

En aquest exercici, la frontera de D han sigut dues corbes, i les hem hagut d'orientar de manera compatible entre elles.

Teorema de Green

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ és un domini pla, la seva frontera $C^+ = \partial D$ està orientada segons el vector vertical positiu \vec{k} i $\vec{F} = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és de classe C^1 en un obert que contingui a D , aleshores

$$\int_D (Q_x - P_y) \, dx dy = \oint_{C^+} P \, dx + Q \, dy.$$

Exemple 16: Calculeu, usant el Teorema de Green, la circulació $\oint_{\partial D} (y - \sin x) dx + \cos x dy$ on ∂D és la frontera del triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$ i $(\pi/2, 1)$ recorreguda en sentit antihorari. (Resposta: $-\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$)

Càlcul d'àrees planes usant el Teorema de Green

Si un camp $\vec{F} = (P, Q)$ compleix la condició $Q_x - P_y \equiv 1$, aleshores per a qualsevol domini pla D tindrem

$$\text{Area}(D) = \int_D (Q_x - P_y) \, dx dy = \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy.$$

Per exemple:

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x \, dy - y \, dx = \oint_{\partial D} x \, dy = - \oint_{\partial D} y \, dx,$$

usant respectivament $\vec{F} = (-y/2, x/2)$, $\vec{F} = (0, x)$ i

$\vec{F} = (-y, 0)$. Quan D està delimitat per una corba parametritzada en sentit antihorari $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ tenim

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) \, dt \\ &= \int_a^b x(t)y'(t) \, dt = - \int_a^b y(t)x'(t) \, dt \end{aligned}$$

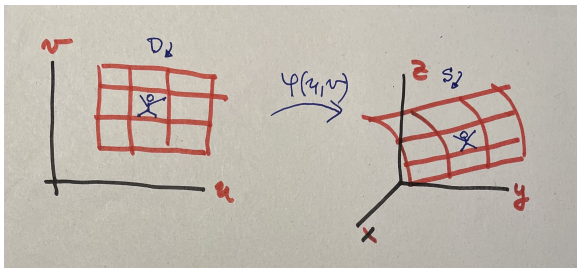
Exemple 17: Calculeu l'àrea del domini limitat per l'astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (Resultat: $3\pi a^2/8$)

Integrals sobre superfícies

Superfície regular:

$$S = \varphi(D) = \{\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u, v) \in D\} \subset \mathbb{R}^3.$$

L'aplicació $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rep el nom de parametrització regular.



D és un compacte connex de \mathbb{R}^2 amb frontera C^1 a trossos; φ és una aplicació de classe C^1 i injectiva, excepte potser a la frontera de D .

Direm que S és *suau* en el punt $p = \varphi(u, v)$ quan $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0$. S ha de ser *suau* excepte potser en un nombre finit de punts.

- $\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)$ són dos *vectors tangents* (l.i.) a S en el punt $p = \varphi(u, v)$.
- $T_p(S) = p + [\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)]$ és el *pla tangent* a S en el punt p .
- $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)$ és un *vector normal* a S en el punt p .
- $dS = \|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| du dv$ és l'*element de superfície* o diferencial de superfície.
- $d\vec{S} = \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) du dv = \vec{N} dS$ és el *vector diferencial de superfície*, ón $\vec{N} = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|}$ és el (!) *vector normal unitari* a la superfície S en el punt p .

Exemples de parametritzacions

Gràfica. Si S és la gràfica de $h(x, y)$ sobre el recinte $D \subset \mathbb{R}^2$ podem prendre $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$ amb el que

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = (1, 0, h_x) \wedge (0, 1, h_y) = (-h_x, -h_y, 1), \text{ i}$$
$$dS = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \, dx \, dy.$$

Cilindre circular recte de radi R i altura h

$$S = \{x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\} = \{\varphi(D)\}$$

on $\varphi(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$ i $D = [0, 2\pi] \times [0, h]$. Notem que φ no és injectiva a la frontera de D .

Cilindre recte de secció el·líptica:

$$S = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, 0 \leq z \leq h\}:$$

$$\varphi(\theta, z) = (a \cos \theta, b \sin \theta, z) \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h].$$

Con. El con circular recte

$$S = \{k^2 z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq h\}$$

té altura h , radi de la base $R = kh$ i semiangle α , on $k = \tan \alpha$.

Sempre és singular en el vèrtex. Parametritzacions usuals:

- Longitud i altura de les coordenades cilíndriques:

$$\varphi(\theta, z) = (kz \cos \theta, kz \sin \theta, z), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h].$$

- En forma de gràfica:

$$\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}/k)$$

amb $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Esfera: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Parametritzacions usuals:

- Longitud θ i latitud ϕ de les coordenades esfèriques:

$$\varphi(\theta, \phi) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi)$$

amb $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

- En forma de gràfica: $S = S_+ \cup S_-$, amb

$$\varphi_{\pm}(x, y) = (x, y, \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

amb $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

El·lipsoide: $S = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$:

$$\varphi(\theta, \phi) = (a \cos \phi \cos \theta, b \cos \phi \sin \theta, c \sin \phi)$$

amb $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

Àrea d'una superfície

$$\text{Àrea}(S) = \int_D dS = \int_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv$$

- Per una superfície regular a trossos es sumen les àrees dels trossos.

- L'àrea no depèn de la parametrització escollida

- Si S és la gràfica $z = h(x, y)$ sobre D podem prendre

$$\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y)), \quad dS = \sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_y)^2} \, dx dy, \quad \text{i}$$
$$\text{àrea}(S) = \int_D \sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_y)^2} \, dx dy$$

Exemple 17: Considerem la gràfica de $h(x, y) = x^2 + y^2$ sobre $x^2 + y^2 \leq R^2$.

$$\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, d\theta dr$$
$$= \pi((1 + 4R^2)^{3/2} - 1))/6$$

Problema 19

Equacions implícites. Si S és una superfície regular que es pot expressar com $z = h(x, y)$ però també $F(x, y, z) = 0$, aleshores la parametritzarem per $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$, però l'element de superfície pot ser que resulti interessant escriure'l com (Teorema de la Funció Implícita):

$$dS = \sqrt{1 + (F_x/F_z)^2 + (F_y/F_z)^2} dx dy$$

Exemple 18: Sigui Π el pla $ax + by + cz = d$, un pla que el seu vector normal forma un angle $\alpha \in [0, \pi/2)$ amb l'eix z .

$\vec{N} = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ és el normal unitari. Si $\vec{k} = (0, 0, 1)$ aleshores

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{N}, \vec{k} \rangle|}{\|\vec{N}\| \|\vec{k}\|} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Per tant Π pot expressar-se com la gràfica

$z = h(x, y) = (d - ax - by)/c$. Sigui $S = f(D)$. L'element de superfície és $dS = \sqrt{1 + (a/c)^2 + (b/c)^2} dx dy = \frac{dx dy}{\cos \alpha}$, i

$$\text{Area}(S) = \int_D \frac{dx dy}{\cos \alpha} = \frac{\text{Area}(D)}{\cos \alpha}.$$

Superfícies de revolució. Fem girar la corba

$C = \{(x, z) = (r(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\}$ al voltant de l'eix z . La millor parametrització és $\varphi : D = [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t)).$$

Aleshores $dS = \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2} |r(t)| dt d\theta$. Per tant,

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2} |r(t)| dt.$$

Exemple 19: L'esfera de radi R s'obté en fer girar la corba

$C = \{(r(t), z(t)) = (R \cos t, R \sin t) \mid -\pi/2 \leq t \leq \pi/2\}$ al voltant de l'eix z . Aplicant la fórmula anterior surt $4\pi R^2$.

Hi ha dos casos més senzills de superfícies de revolució:

• $(t = x)$ és $C = \{(x, z = g(x)) | x \in [a, b]\}$. En aquest cas $D = \{(\theta, x) \in [0, 2\pi] \times [a, b]\}$, $dS = \sqrt{1 + g'(x)^2} |x| dx d\theta$ i

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} |x| dx.$$

• $(t = z)$ és $C = \{(x = h(z), z) | z \in [c, d]\}$. En aquest cas $D = \{(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [c, d]\}$, $dS = \sqrt{1 + h'(z)^2} |h(z)| dz d\theta$ i

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_c^d \sqrt{1 + h'(z)^2} |h(z)| dz.$$

Exemple 20: Si fem girar $C = \{(x, z = hx/R) | x \in [0, R]\}$ respecte a l'eix z , per la primera fórmula tenim que l'àrea és

$$2\pi \int_0^R \sqrt{1 + h^2/R^2} x dx = \pi R \sqrt{R^2 + h^2} (= \pi R \text{Long}(C))$$

Superfície expressada en esfèriques. Si S està definida per $r = g(\theta, \phi)$ en coordenades esfèriques per una certa $g : D \subset [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}_+$, aleshores la parametrització apropiada és $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb

$$\varphi(\theta, \phi) = g(\theta, \phi)(\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi).$$

Aleshores

$$\varphi_\theta = (g_\theta \cos \phi \cos \theta - g \cos \phi \sin \theta, g_\theta \cos \phi \sin \theta + g \cos \phi \cos \theta, g_\theta \sin \phi),$$

$$\varphi_\phi = (g_\phi \cos \phi \cos \theta - g \sin \phi \cos \theta, g_\phi \cos \phi \sin \theta - g \sin \phi \sin \theta, g_\phi \sin \phi + g \cos \phi),$$

$$d\vec{S} = \varphi_\theta \wedge \varphi_\phi \, d\theta d\phi = (A, B, C) \, d\theta d\phi$$

$$A = gg_\theta \sin \theta + gg_\phi \cos \theta \sin \phi \cos \phi + g^2 \cos \theta \cos^2 \phi,$$

$$B = -gg_\theta \cos \theta + gg_\phi \sin \theta \sin \phi \cos \phi + g^2 \sin \theta \cos^2 \phi,$$

$$C = -gg_\phi \cos^2 \phi + g^2 \sin \phi \cos \phi.$$

$$A^2 = g^2 g_\theta^2 \sin^2 \theta + g^2 g_\phi^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + g^4 \cos^2 \theta \cos^4 \phi + 2g^2 g_\theta g_\phi \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi + 2g^3 g_\theta \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + 2g^3 g_\phi \cos^2 \theta \sin \phi \cos^3 \phi,$$

$$B^2 = g^2 g_\theta^2 \cos^2 \theta + g^2 g_\phi^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + g^4 \sin^2 \theta \cos^4 \phi - 2g^2 g_\theta g_\phi \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi - 2g^3 g_\theta \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + 2g^3 g_\phi \sin^2 \theta \sin \phi \cos^2 \phi,$$

$$C^2 = g^2 g_\phi^2 \cos^4 \phi + g^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi - 2g^3 g_\phi \sin \phi \cos^3 \phi,$$

$$A^2 + B^2 = g^2 g_\theta^2 + g^2 g_\phi^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi + g^4 \cos^4 \phi + 2g^3 g_\phi \sin \phi \cos^3 \phi, \quad i$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = g^2 (g_\theta^2 + (g_\phi^2 + g^2) \cos^2 \phi). \quad \text{Per tant,}$$

$$dS = g \sqrt{g_\theta^2 + (g^2 + g_\phi^2) \cos^2 \phi} \, d\theta d\phi.$$

Si $g(\theta, \phi) \equiv R$ aleshores és molt més senzill:

$$d\vec{S} = (R^2 \cos \theta \cos^2 \phi, R^2 \sin \theta \cos^2 \phi, R^2 \sin \phi \cos \phi) d\theta d\phi,$$

$$dS = R^2 \cos \phi \, d\theta d\phi.$$

Exemple 21: Per l'esfera de radi R podem prendre $g(\theta, \phi) = R$ (constant) amb $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Aplicant la fórmula anterior tenim que l'àrea és

$$\int_D R^2 \cos \phi \, d\theta d\phi = 4\pi R^2.$$

Integral d'una funció sobre una superfície

$$\int_S f \, dS = \int_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| \, dudv$$

Notem que l'àrea de S és la integral de la funció $f \equiv 1$. Es compleix la linealitat, aditivitat, teorema del valor intermedi, etc. En particular

$$\text{Area}(S) \cdot \min_S f \leq \int_S f \, dS \leq \text{Area}(S) \cdot \max_S f.$$

Exemple 22: (integral sobre una superfície regular a trossos)
Siguin $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, $S_1 = \{z = 1 - x^2 - y^2; (x, y) \in D\}$,
 $S_2 = \{z = 0; (x, y) \in D\}$, $S = S_1 \cup S_2$ i $f(x, y, z) = 1 + xz$.
S'obté que $\int_S f \, dS = 5\pi(\sqrt{5} + 1)/6$.

Si $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ és una densitat superficial (unitats de massa per unitats d'àrea) podem calcular

- $m(S) = \int_S \rho \, dS$, la massa total
- $\bar{f} = \frac{1}{m(S)} \int_S f \rho \, dS$ mitjana de f ponderat per ρ .
- $\text{CM}(S) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(S)} \int_S (x, y, z) \rho \, dS$, centre de masses de S . Si ρ és constant s'anomena centre geomètric (CG).
- $I_e = \int_S r^2 \rho \, dS$ és el moment d'inèrcia respecte a un eix e , on $r(\rho) = \text{dist}(\rho, e)$.

Nota: Si S és simètrica respecte a un pla, aleshores el CG es troba sobre aquest pla. Si a més ρ és simètrica respecte a aquest pla, també el CM es troba en aquest pla.

Exemple 23: Moment d'inèrcia respecte al seu eix de revolució de la cara lateral d'un con de radi R i alçada h (si no ens donen ρ és que $\rho \equiv \rho_0$, i veure Exemple 20). Resultat: $m(S)R^2/2$

Exemple 24: Massa de la superfície S del paraboloides hiperbòlic $P = \{2az = x^2 - y^2; a > 0\}$ dins del cilindre $C = \{x^2 + y^2 = a^2\}$ si la densitat superficial és $\rho = k|z|$, ($k > 0$). Resposta: $\frac{2k}{a^2} \int_a^{a^2} r^3 \sqrt{a^2 + r^2} dr = 4(1 + \sqrt{2})ka^3/15$ (la integral es fa amb el canvi $z = \sqrt{a^2 + r^2}$).

Primer i segon Teorema de Guldin

Sigui $\Pi_+ \subset \mathbb{R}^3$ un semipla i $e = \partial\Pi_+$. Siguin $C \subset \Pi_+$ una corba plana no necessàriament tancada i $D \subset \Pi_+$ un domini pla sense contacte amb e .

1.- L'àrea de la superfície de revolució S que s'obté en girar C al voltant de l'eix e és

$$2\pi \cdot \text{dist}(\text{CG}(C), e) \cdot \text{Long}(C).$$

2.- El volum del cos sòlid de revolució W que s'obté en girar D al voltant de l'eix e és

$$2\pi \cdot \text{dist}(\text{CG}(D), e) \cdot \text{Area}(D).$$

Exemple 25: Calculeu l'àrea i el volum del tor sòlid de radi interior r i radi exterior R . és el que s'obté en fer girar al voltant de l'eix z el disc $\{(x - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$. Surt: àrea $4\pi^2 rR$ i volum $2\pi^2 r^2 R$.

Nota 1: Si una corba plana és simètrica respecte a una recta, o si una superfície a l'espai és simètrica respecte a un pla, aleshores el seu CG pertany respectivament a aquesta recta o a aquest pla. El mateix és cert per al CM si a més la densitat ρ també és simètrica.

Nota 2: Un cercle i la circumferència que l'envolta comparteixen el mateix CG, però això no és veritat en general per a qualsevol recinte pla.

Fluxos de camps 3D a través de superfícies

Sigui $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$ una superfície. Recordem que $\vec{N} = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / \|(\varphi_u \wedge \varphi_v)\|$. Notem que canviar d'ordre la u i la v equivaldria a canviar de signe el vector \vec{N} . En general, la nostra superfície estarà *orientada* (distingirem la cara interior de la exterior) i voldrem que \vec{N} sigui el vector normal unitari exterior.

Sigui $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camp de vectors amb $S \subset U$. Definim el flux de \vec{F} a través de S (o la integral de superfície de \vec{F} sobre S) com

$$\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle dS = \int_D \langle \vec{F} \circ \varphi, \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle dudv$$

(interpretació en el cas d'un pla i \vec{F} la velocitat d'un fluid de densitat constant)

Notem, en particular, que no hi ha flux quan la velocitat \vec{F} és tangent a la superfície.

Si $\varphi = (x, y, z)$ i $\vec{F} = (P, Q, R)$ aleshores

$$\int_D \langle \vec{F} \circ \varphi, \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle dudv = \int_D \begin{vmatrix} P \circ \varphi & Q \circ \varphi & R \circ \varphi \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv$$

i això justifica que també s'escriu

$$\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

ja que, pel primer terme, per exemple,

$$dydz = \frac{dydz}{dudv} dudv = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} dudv$$

(el jacobià del canvi).

També, un cop escollida l'orientació (\vec{N}) de vegades s'escriu

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_{S^-} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle.$$

(Per a calcular un flux sobre una superfície orientada serà imprescindible comprovar que la parametrització és positiva, o sigui que $\varphi_u \wedge \varphi_v$ apunta en la direcció positiva.)

Exemple 26: Sigui S el primer octant de l'el·lipsoide $E = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$ orientant S i E segons la normal exterior. Calculeu el flux de $\vec{F} = (x, y, z)$ a través de S i de E .

(Només mirant una mica ja veiem que els dos fluxos han de ser positius). Parametritzem S per longitud i latitud de les coordenades esfèriques modificades, $S = \varphi(D)$ on

$$\varphi(\theta, \phi) = (a \cos \phi \cos \theta, b \cos \phi \sin \theta, c \sin \phi)$$

amb $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. Aleshores

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi = (bc \cos^2 \phi \cos \theta, ac \cos^2 \phi \sin \theta, ab \cos \phi \sin \phi).$$

Aquí comprovem que l'orientació és correcta.

l surt $\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \pi abc/2 > 0$ i $\int_{E^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 4\pi abc > 0$. A través de E és $4\pi abc > 0$.

Fluxos a través de gràfiques

Si $S = \{z = f(x, y)\}$ per $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i S està orientada de baix cap a dalt, aleshores

- $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$
- $d\vec{S} = (-f_x, -f_y, 1) dx dy$
- $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_D (R(x, y, f) - P(x, y, f)f_x - Q(x, y, f)f_y) dx dy$

Exemple 27: Sigui $S = \{z = x^2 + y^2\}$, $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$, orientada de baix a dalt. Calculeu el flux de $\vec{F} = (x^2, 0, 1 + xz)$ a través de S . (Resposta: πR^2)

Camps Solenoidals. Si S envolta una regió $W \subset \mathbb{R}^3$ (com l'el·lipsoide E de l'exemple 26) utilitzarem els símbols

$$\oint_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \oint_{S^-} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \oint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle.$$

quan orientem segons la normal exterior. Un camp \vec{F} es diu solenoidal quan te flux nul a través de la frontera de qualsevol regió $W \subset \mathbb{R}^3$. (Fluids incompressibles)

Exemple 28: Flux de $\vec{F} = (x, y, -2z)$ a través de la frontera del cub $[-a, a]^3$ orientada segons la normal exterior. És regular a trossos, per tant calculem el flux a cada cara i sumem.

A les dues cares $x = \pm a$ dona $4a^3$

A les dues cares $y = \pm a$ dona $4a^3$

A les dues cares $z = \pm a$ dona $-8a^3$

Per tant el flux total és zero. Demostrarem més tard que \vec{F} és solenoidal.

(Exercici)

Definicions

Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar i $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camp de vectors.

- El **gradient** de la funció escalar f és el camp

$$\text{grad } f = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- La **divergència** del camp \vec{F} és la funció escalar

$$\text{div } \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- El **rotacional** del camp \vec{F} és el camp

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \end{aligned}$$

- El **Laplacià** de la funció f és la funció

$$\Delta f = \text{div grad } f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Les definicions s'adapten al cas 2D de forma òbvia, excepte si $\vec{F} = (P, Q)$, que $\text{rot } \vec{F} = (0, 0, Q_x - P_y)$.

Definicions

Direm que un camp de vectors \vec{F}

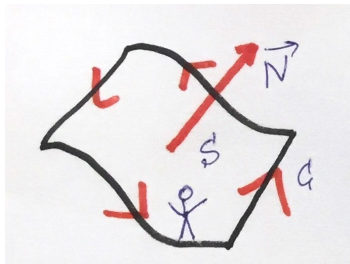
- 1.- Prové d'un *potencial escalar* f quan $\vec{F} = \text{grad } f$.
- 2.- Prové d'un *potencial vector* \vec{G} quan $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$.
- 3.- és *solenoidal*, *incompressible* o *preserva volum* quan té divergència zero: $\text{div } \vec{F} = 0$.
- 4.- és *irrotacional* quan té rotacional zero: $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.
- 5.- és *conservatiu* quan té integral zero al llarg de qualsevol corba tancada continguda en el seu domini de definició.
- 6.- és *central*, quan la seva direcció en qualsevol punt apunta a l'origen o apunta en direcció contrària i la seva magnitud depèn només de la distància a l'origen. O sigui $\vec{F} = h(r)\vec{r}$, on h és una funció arbitrària, $\vec{r}(x, y, z)$ i $r = \|\vec{r}\|$.

Veurem que moltes vegades $1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5$ i $2 \leftrightarrow 3$.

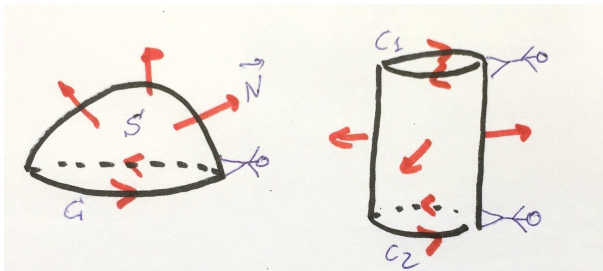
(Exercici)

Orientacions consistentes (o compatibles), cas 1

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular, sigui $C = \partial S$ la seva frontera, i sigui \vec{N} una de les seves dues orientacions. Direm que C està orientada segons el vector \vec{N} quan el vector \vec{N} la recorre de manera que S queda a la seva esquerra.



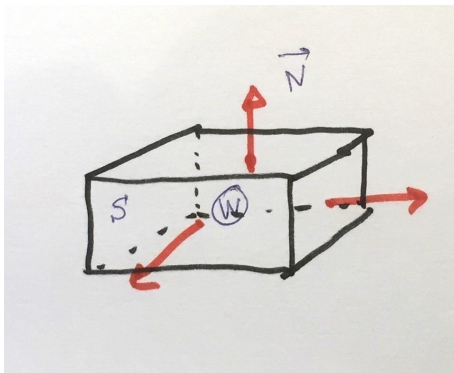
Exercici: Orienteu la frontera d'una semiesfera quan \vec{N} és la normal exterior a l'esfera. Orienteu la frontera de la cara lateral d'un cilindre d'alçada finita segons el vector normal exterior al cilindre.



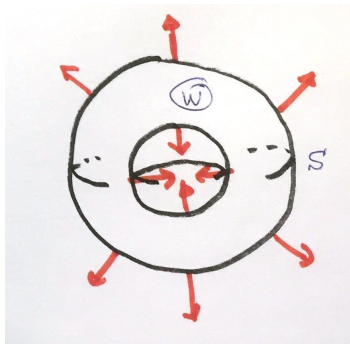
En aquest exercici, l'orientació de la frontera de S , que és C en el primer dibuix, i $C_1 \cup C_2$ en el segon, s'ha hagut de fer compatible amb l'orientació de S . Això és el cas 1.

Orientacions consistentes (o compatibles), cas 2

Donada una regió sòlida $W \subset \mathbb{R}^3$, sigui S la seva frontera. Diem que S està orientada segons el vector normal exterior quan a cada punt de la frontera elegim el vector unitari que apunta cap a fora de W .



Exercici: orienteu la frontera de W quan W és l'espai comprès entre dues esferes concèntriques.



En aquest exercici, la frontera de W han sigut dues superfícies, i les hem hagut d'orientar de manera compatible entre elles.

Teorema del rotacional 3D (Stokes)

El flux del rotacional d'un camp 3D a través d'una superfície és igual a la circulació del camp al llarg de la corba frontera de la superfície, si orientem aquesta frontera de manera compatible amb l'orientació de la superfície.

En símbols, si $S \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície orientada pel vector normal unitari \vec{N} , la seva corba frontera $C = \partial S$ està orientada segons el vector \vec{N} i el camp $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és de classe C^1 en un obert que contingui a S , aleshores

$$\underbrace{\int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle}_{\text{flux del rotacional}} = \underbrace{\oint_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle}_{\text{circulació}}.$$

Corol·lari: Tot camp irrotacional 3D té circulació nul·la al llarg de qualsevol corba tancada que delimiti una superfície continguda en el obert on està definit el camp.

Conseqüència: si un camp està definit a tot \mathbb{R}^3 , sense singularitats, i té rotacional zero, serà necessàriament un camp conservatiu (gradient)

La propietat recíproca es comprova molt fàcilment: si és un camp gradient, aleshores el seu rotacional és zero (o sigui, $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$ sempre). Però si el camp té singularitats, podria ser que el seu rotacional fos zero, però que no fos un camp conservatiu.

Exemple 30: Sigui $\vec{r} = (x, y, z)$. Proveu que si $\vec{v} \equiv (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ és un camp constant, $S \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície i $C = \partial S$, aleshores

$$2 \int_S \langle \vec{v}, d\vec{S} \rangle = \oint_C \langle \vec{v} \wedge \vec{r}, d\vec{\ell} \rangle,$$

suposant que les orientacions de S i C siguin compatibles.

Exemple 31: Calculeu la circulació $\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$ sent $C = \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{x + y + z = 1\}$ orientada segons el vector $\vec{N} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, normal unitari al pla. Feu-ho per la definició de circulació i també pel Teorema de Stokes (resultat: $3\pi/2$).

Exemple 32: Calculeu la circulació $\int_C 2x \, dx + y \, dy + 3z \, dz$ sent C la intersecció entre el paraboloides hiperbòlic $\{x^2 - y^2 = 2z\}$ i l'hiperboloide d'una fulla $\{x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ (aquesta intersecció només conté una corba tancada), orientant la corba segons el vector $(-x, y, 1)$, normal al paraboloides hiperbòlic. Feu-ho pel T. de Stokes i per la fórmula de Newton-Leibniz i comproveu que queda força complicat si es fa usant la definició.

Teorema de la divergència 3D (Gauss)

La integral de la divergència d'un camp 3D sobre un cos és igual al flux sortint del camp a través de la frontera del cos.

En símbols: $W \subset \mathbb{R}^3$, $S^+ = \partial W$ (orientada segons la normal exterior), $\vec{F} = (P, Q, R) : W \rightarrow \mathbb{R}^3$, aleshores

$$\underbrace{\int_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz}_{\text{integral de la divergència}} = \underbrace{\oint_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle}_{\text{flux}}.$$

(Això també podria escriure's com $\int_W (P_x + Q_y + R_z) \, dx dy dz = \oint_{S^+} P \, dy dz + Q \, dz dx + R \, dx dy$.)

Corol·lari: Tot camp solenoidal 3D té flux zero a través de qualsevol superfície que encercli una regió continguda en el obert on està definit el camp.

Exemple 33: Si $\vec{F} = \text{grad } f$ aleshores el T. de Gauss implica

$$\int_W \Delta f \, dx dy dz = \oint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, dS,$$

on $\Delta f = \text{div grad } f$ és el laplaciana i $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \langle \text{grad } f, \vec{N} \rangle$ denota la derivada direccional en la direcció del vector normal exterior unitari. En particular, si f és harmònica ($\Delta f = 0$) aleshores $\oint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, dS = 0$ per a tota $S = \partial W$ si W està contingut en el domini de definició de f .

Exemple 34: Si $\vec{r} = (x, y, z)$ aleshores $\text{div } \vec{r} \equiv 3$ i això ens permet per exemple relacionar el volum de la bola de radi R , W_R , amb l'àrea de l'esfera que l'envolta:

$$\begin{aligned} 3\text{Vol}(W_R) &= \int_W \text{div } \vec{r} \, dx dy dz = \\ &= \oint_S \langle \vec{r}, \vec{N} \rangle \, dS = \oint_S \langle \vec{r}, \frac{1}{R} \vec{r} \rangle \, dS = R \text{Area}(S) \end{aligned}$$

Truc bàsic pel T. de la divergència: afegir tapes!

Exemple 35: Calculeu el flux del camp solenoidal

$\vec{F} = (x, y, -2z)$ a través de la superfície oberta

$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \leq 1/2\}$ orientada segons el vector normal $\vec{N} = (x, y, z)$. (Resultat: $3\pi/4$)

Exercici: Proveu que el flux del camp lineal $\vec{F} = (ax, by, cz)$ a través de la superfície oberta de l'exemple anterior és $\pi(9a + 9b + 6c)/8$. (Indicació: calculeu el volum usant el principi de Cavalieri.)

Problemes (de tapes) 38 (surt 48π) i 39 (surt 9π , és sole.).

També (de Stokes) 43 (surt -9), 44 (surt 0) i 46 ($60\pi, 0$ i $0, 0$).

Exercici: deduïu el T. de Green (2D) del T. de Stokes (3D)