Presentació

Càlcul 2 (Graus EM/ETI/EQ), 2015-16 2n Q.

Joan Solà-Morales

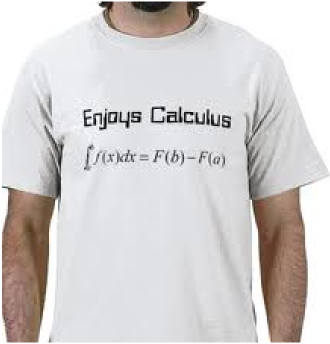
Càlcul 2 (Graus EM/ETI/EQ), 2015-16 2n Q.

Joan Solà-Morales. ETSEIB, planta 3.
Consultes: dimarts i dijous de 11:15 a 12:15h.
jc.sola-morales@upc.edu
http://www.ma1.upc.edu/ sola-morales/

http://www.ma1.upc.edu/
http://www.ma1.upc.edu/∼calcul2nousgraus/

-Els estudiants han de treballar des del primer dia!
-Tots els exàmens i controls són obligatoris i les notes obtingudes no són recuperables!
-El que sí que farem és *eliminar materia*: els continguts que s'avaluen a meitat de curs no es tornaran a avaluar a la segona part del curs.

Presentació



- **Def**: La *norma* d'un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ (és la distància del $\mathbf{x}$ a l'origen (longitud, Pitàgores).
- **Def**: Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la *distància* de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ és

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

- **Def**: La *bola* n-dimensional oberta de centre $\mathbf{y}$ i radi $r > 0$, $\mathcal{B}_r^n(\mathbf{y})$ és el conjunt de punts $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tals que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r$. També es diu *disc* si $n = 2$.
- **Def**: Es diu que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt *obert* si per cada $\mathbf{y} \in \Omega$ podem trobar $r > 0$ tal que $\mathcal{B}_r^n(\mathbf{y}) \subset \Omega$ (normalment r dependrà de $\mathbf{y}$).

Continuïtat a $\mathbb{R}^n$, 2

Continuïtat a $\mathbb{R}^n$, 3

- **Def**: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es diu que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ és una *funció escalar* de n variables. Exemple: $f(x, y) = e^{xy}$, amb $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- **Def**: Si $\mathbf{f} = (f_1, f_2 \dots f_m)$ son funcions escalars, es diu que $\mathbf{f}$ és una *funció vectorial* de m components (i n variables). També escriurem $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
- Exemple: $\mathbf{f}(x, y, z) = (\sin(xz), x^2 + y^2 + z^2)$.
- **Def**: *Domini* $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ d'una funció $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ és el conjunt dels $\mathbf{x}$ pels quals està definida.
- **Def**: *Imatge* o *rang* de $\mathbf{f}$ és $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \exists \mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$.
- Exemple: trobeu el domini i la imatge de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\ln(||\mathbf{x}||), \ln(1 - ||\mathbf{x}||))$.

Continuïtat a $\mathbb{R}^n$, 4

- **Def**: *Gràfica* de $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $\mathcal{G}(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(x)) | \mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{f})\}$.
- Exemples: 1) $f : \mathcal{B}_1^2(0) \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto a^2x^2 + b^2y^2$ amb $a^2 \neq b^2$. La seva gràfica és un paraboloide el·líptic.
  2) $f : \mathcal{B}_1^2(0) \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto a^2x^2 - b^2y^2$ amb $a^2 \neq b^2$. La seva gràfica és una *sella*.
- **Def**: *Conjunt de nivell* de $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Donat $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{R}(\mathbf{f})$ és $\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) | \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0\}$. Si $n = 2$ i $m = 1$ s'anomenen *corbes de nivell*. Si $n = 3$ i $m = 1$ *superfícies de nivell*.
- Exemples: 1) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (hipèrboles).
  2) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$ (el·lipsoïdes).
- Enllaç 1, Enllaç 2.

- Recordem $n = m = 1$, $f : \Omega = (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$. Direm que $lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que}$$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

- Exemple: $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ ($\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon/3$).
- **Def**: Si $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, direm que $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que}$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}^n_\delta(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{B}^m_\varepsilon(\mathbf{y}_0).$$

(**Nota:** El valor de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ no hi juga cap paper.)

- Exemple: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^4} = 0$ ($\delta = \sqrt{\varepsilon}$). Exercici: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 \cos(y) + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ ($\delta = \varepsilon/2$).

Continuïtat a $\mathbb{R}^n$, 6

- Hem usat $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||$. Usem ara $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$:
- Exercici: Usant la definició, veieu que $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$ tendeix a zero a l'origen.
- Exercici: Igual per $f(x,y) = \frac{x^4y}{x^6+y^2}$.
- Usem ara que quan $0 < z < 1$ es té que $z^p < z^q$ si $p > q$:
- Exercici: Demostreu que $\left(1 + y^{\frac{1}{3}} - (7x^3 + 32y^4)^{\frac{1}{5}}\right) \to 1$ quan $(x,y) \to (0,0)$.

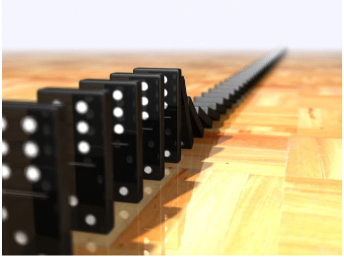
Continuïtat a $\mathbb{R}^n$, 7

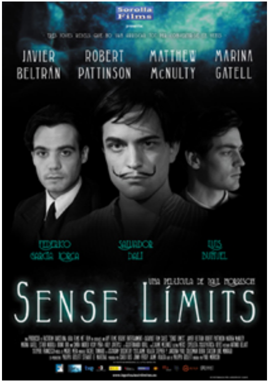
- Si $n = 1$ només et pots acostar a x_0 per la dreta o per l'esquerra. Si $n > 1$ pots acostar-te d'infinites maneres (rectes, paràboles...). Una bona manera de veure que el límit no existeix és veure que per camins ($\sigma(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$) diferents s'obtenen límits diferents.
- Exercici 9: Discutiu el límit al $(0,0)$ de $f(x,y) = x^2y/(x^4+y^2)$ i $f(x,y) = xy^2/(x^4+y^2)$.
- Exercici: Veieu que el límit quan $(x,y) \to (0,0)$ de $f(x,y)$ no existeix quan $f(x,y) = xy/(x^2+y)$ per $x^2+y \neq 0$ i $f(x,y) = 0$ per $x^2+y=0$. Indicació: moveu-vos per la recta $\sigma_1(t) = (t,t)$ o per la corba $\sigma_2(t) = (t, -t^2+t^6)$.
- Proposició: Donat $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un monomi de grau m amb $n > 1$ tindrem
$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{p(\mathbf{x})}{||x||^k} = \begin{cases} 0 \text{ si } m > k, \\ \text{no existeix si } m \leq k. \end{cases}$$
- Exercici 11.
- **Nota**: Si $\mathbf{f} = (f_1 \dots f_m)$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 = (y_1, \dots y_m)$ és equivalent a que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_k(\mathbf{x}) = y_k$ per a tota k.

Continuïtat a $\mathbb{R}^n$, 8

- $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funció vectorial, Ω obert i $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.
  - **f** és contínua a $\mathbf{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_0)$.
  - **f** és contínua a $\Omega \Leftrightarrow$ **f** contínua a tot $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.
- Amb la suma, producte i composició de funcions contínues s'obtenen noves funcions contínues.
- L'antiimatge d'un obert (resp. tancat) per una funció contínua és un obert (resp. tancat).
- L'imatge d'un compacte per una funció contínua també és compacte.
- 3 exemples.

Continuïtat a $\mathbb{R}^n$, 9





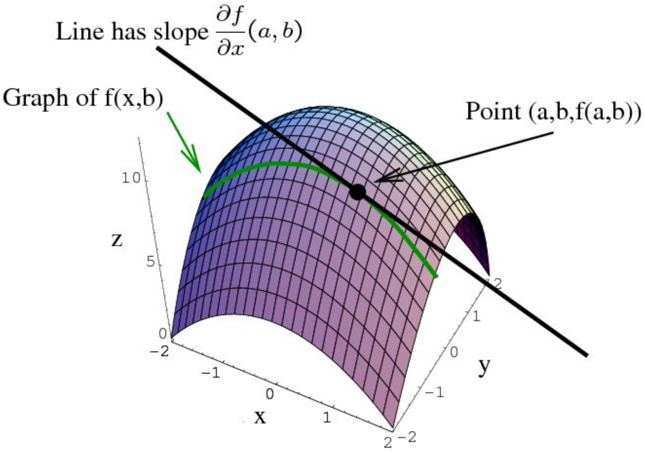
(fem 2 variables, de moment)
Def: Derivades parcials d'una funció de 2 variables en un punt.
$A \subset \mathbb{R}^2$ obert, $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$. Derivades parcials primeres de f en el punt $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$:

$$\partial_1 f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = \lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{x_1 - a_1},$$

$$\partial_2 f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h} = \lim_{x_2 \to a_2} \frac{f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)}{x_2 - a_2}.$$

Càlcul: usant la definició en casos difícils, i derivant com en 1 variable, en casos normals.
Exemple: $f(x_1, x_2) = (x_2 - \sin(x_2))/(x_1^2 + x_2^2)$, $f(0,0) = 0$, $(a_1, a_2) = (0,0)$.
Exercici: $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2 \sin x_1}$, $(a_1, a_2) = (\pi/2, 0)$.
Def: funcions derivades parcials. Ex.: $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2 \sin x_1}$

Interp. geomètrica de les derivades parcials.



Derivació de funcions de vàries variables, 2.

Def: En general, per n variables, si $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω obert i $\mathbf{a} \in \Omega$ es defineix anàlogament

$$\partial_j f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots a_j + h, \dots a_n) - f(\mathbf{a})}{h}$$
$$= \lim_{x_j \to a_j} \frac{f(a_1 \dots x_j, \dots a_n) - f(\mathbf{a})}{x_j - a_j}.$$

i si $\mathbf{f} = (f_1, f_2 \dots f_m)^T$ aleshores definim

$$\partial_j \mathbf{f}(\mathbf{a}) = (\partial_j f_1(\mathbf{a}), \dots \partial_j f_m(\mathbf{a}))^T.$$

Cas particular: (Corba de $\mathbb{R}^m$). $\sigma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $\sigma'(t)$ és el vector tangent a la corba.
Def.: (Derivada d'una funció escalar). Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω obert i $\mathbf{a} \in \Omega$, el vector

$$\nabla_x f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = D_x f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) = (\partial_1 f(\mathbf{a}), \dots \partial_m f(\mathbf{a}))$$

(vector fila) s'anomena també gradient de f en el punt $\mathbf{a}$.
Def.: Es diu que $\mathbf{a}$ és un punt crític de f si $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Def.: (Derivada d'una funció vectorial). Si $\mathbf{f} = (f_1, \dots f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Ω obert i $\mathbf{a} \in \Omega$, la matriu

$$J_x f(\mathbf{a}) = Jf(\mathbf{a}) = D_x f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) = (\nabla f_1(\mathbf{a}), \dots \nabla f_m(\mathbf{a}))^T$$

s'anomena matriu jacobiana de f en el punt $\mathbf{a}$ (matriu de m files i n columnes.

Ex: Calculeu la matriu jacobiana de $f(x_1, x_2) = (e^{x_1+x_2} + x_2, x_1 x_2^2, \cos(x_1 x_2^2))^T$.

nota: Per $n = 1$, es té que f derivable en un punt implica f contínua en el punt. Per $n > 1$ això no és cert (exemple, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2/(x_1^2 + x_2^2)$ i $f(0,0) = 0$).

Def.: L'operador ∇ a $\mathbb{R}^n$ (operador *nabla* de Hamilton). Es defineix com

$$\nabla = (\partial_1, \dots \partial_n) \text{ (vector fila).}$$

Aplicat a una funció escalar, s'obté el seu gradient. Si s'aplica a funcions vectorials $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com $\langle \nabla, f(\mathbf{x}) \rangle = \nabla \cdot \mathbf{f}$ (com si fos un producte escalar) s'obté la divergència de $\mathbf{f}$.

Funcions de classe $\mathcal{C}^m$

- $\partial^2_{x_2 x_1} f = \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} = \partial_{x_2}(\partial_{x_1} f)$.
- **Ex**: calculeu totes les derivades parcials de segon ordre de $f = x_1^3 + x_1 x_2 + x_2 \sin(x_1)$.
- Podem definir derivades parcials d'ordre k: $\partial^k_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} f$ (entenem que les derivades es prenen per ordre de proximitat a f).
- **Def**: Direm que f és de classe $\mathcal{C}^k(\Omega)$ ($f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$) si f i totes les seves derivades parcials d'ordre k existeixen i són contínues (exemple: $\mathcal{C}^0(\Omega)$).
- **Teorema**: (de Schwarz) si f és de classe $\mathcal{C}^k$, per les derivades d'ordre $\leq k$ no importa l'ordre en que es prenen.
- Exercici 24 de la llista.
- **Teorema**: Si f és de classe $\mathcal{C}^k$, també és de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
  Ex: Comproveu que la funció definida per $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ per $(x, y) \neq (0, 0)$ i $f(0, 0) = 0$ no és $\mathcal{C}^1$.
- La divergència del gradient és el Laplacià.

Regla de la Cadena, 1

- Recordem que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ amb $y\mapsto f(y)$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ amb $x\mapsto g(x)$ aleshores per $\tilde{f}(x)=f(g(x))$ tindrem $\tilde{f}'(x)=f'(g(x))g'(x)$, (o be $\frac{df}{dx}=\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$, perquè $y=g(x)$).
- En general, per funcions vectorials tindrem: Si $\mathbf{f}:\Omega^*\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k; \mathbf{u}\mapsto\mathbf{f}(\mathbf{u})$ i $\mathbf{g}:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m; \mathbf{x}\mapsto\mathbf{g}(\mathbf{x})$ aleshores la matriu jacobiana de $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ pot calcular-se com

$$J_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})=\underbrace{J_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}_{k\times m}\cdot\underbrace{J_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})}_{m\times n}\qquad\text{(producte de matrius).}$$

- Exercici: $\mathbf{f}(u,v)=(\cos(v)+u^2, e^{u+v}, u-v)$, $\mathbf{g}(x,y)=(e^{x^2}, x-\sin(y))$, calculeu $J\tilde{f}(0,0)$.
- Exercici: $f(u,v,w)=u^2+v^2-w$, $\mathbf{g}(x,y)=(x^2y, y^2, e^{-xy})$, calculeu $\partial_x\tilde{f}$.

Regla de la Cadena, 2

- En el cas particular $k = 1$ (f escalar) la regla de la cadena diu

$$\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$$\partial_{x_j} f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \sum_{\ell=1}^{m} \partial_{u_\ell} f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\partial_{x_j} g_\ell(\mathbf{x})$$

- Una manera més classica d'escriure $J_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})$ (sense matrius) és posar

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial u_\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_j}$$

  per $i = 1, \ldots k$ i $j = 1 \ldots n$, ja que $u_\ell = g_\ell(x_1, \ldots x_n)$.

- Un altre exemple: $n = 1$ (g és una corba σ de $\mathbb{R}^m$) i $k = 1$ (f escalar), o sigui $\tilde{f}(t) = f(\sigma(t))$.

$$\tilde{f}'(t) = \langle \nabla_{\mathbf{u}} f(\sigma(t)), (\sigma'(t))^T \rangle = \sum_{\ell=1}^{m} \partial_{u_\ell} f(\sigma(t))\sigma'_\ell(t).$$

Teorema de la Funció Inversa: *Si* $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *és de classe* $\mathcal{C}^1$ *i* $\mathbf{a} \in \Omega$ *és tal que* $\det J\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$, *llavors* $\mathbf{f}$ *és* localment invertible, *és a dir existeix* $\varepsilon > 0$ *de manera que* $\mathcal{B}^n_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset \Omega$ *i* $\mathbf{f} : \mathcal{B}^n_\varepsilon(\mathbf{a}) \to \mathbf{f}(\mathcal{B}^n_\varepsilon(\mathbf{a}))$ *(és a dir,* $\mathbf{f}$ *restringida a aquesta bola) és bijectiva i la seva inversa* $\mathbf{f}^{-1}$ *també és de classe* $\mathcal{C}^1$*.*
De la relació $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$*, per la regla de la cadena es dedueix que*

$$J(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (J\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1},$$

i que $\det J(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 1/\det J\mathbf{f}(\mathbf{x})$*.*

- Exercici: Sigui $\mathbf{f}$ definida per $\mathbf{f}(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. Comproveu que existeix $\mathbf{f}^{-1}$ i calculeu $J\mathbf{f}^{-1}$.

Regla de la Cadena, 4

Derivació Implícita:

- Ex.: Volem expressar $e^{x+y} + y^2 - 1 = 0$ prop de $(x, y) = (0, 0)$ com $y = g(x)$. Es té $g(0) = 0$, $g'(0) = -1$, $g''(0) = -2$, etc. (derivant implícitament).
- En general, si tenim $f(x, y) = 0$ amb $f(x_0, y_0) = 0$, derivant implícitament obtindrem $y = g(x)$ amb $g(x_0) = y_0$, $g'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0,y_0)}{\partial_y f(x_0,y_0)}$, etc. o sigui que resulta necessari que $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.
- L'equació $x^2 - y^2 = 0$ prop de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ és un exemple clar de perquè es necessita $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.

Regla de la Cadena, 5

Teorema de la Funció Implícita:
Donada $\mathbf{f}:\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$; $(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *de manera que* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\mathbf{0}$ *volem resoldre el sistema* $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ *prop de* $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ *aïllant les variables* $\mathbf{y}$ *en funció de les* $\mathbf{x}$*, o sigui en la forma* $\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$*. El TFI diu que això serà possible (localment) en un entorn de* $\mathbf{y}_0$ *si*

$$\det\partial_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\neq 0.$$

Les derivades parcials de les components de $\mathbf{g}$ *s'obtenen derivant implícitament:*

$$\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)=-\left[\partial_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\right]^{-1}\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0).$$

- Exercici: El sistema $x_1e^{y_1+y_2}+2y_1y_2=1;\;\; x_2e^{y_1-y_2}-\frac{y_1}{1+y_2}=2x_1$ determina dues funcions $y_1=g_1(x_1,x_2)$ i $y_2=g_2(x_1,x_2)$ tals que $g_1(1,2)=g_2(1,2)=0$. Calculeu $\partial_{x_1}g_1(1,2)$ i $\partial_{x_2}g_2(1,2)$.
- El cas escalar $m=1$ és el cas més senzill.

Regla de la Cadena, 6

(exercici)

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 e^{y_1+y_2} + 2y_1 y_2 - 1, x_2 e^{y_1-y_2} - \frac{y_1}{1+y_2} - 2x_1)^T$$

$$\mathbf{f}(1,2,0,0) = (0,0)^T$$

$$J\mathbf{f} = \begin{pmatrix} e^{y_1+y_2} & 0 & x_1 e^{y_1+y_2} + 2y_2 & x_1 e^{y_1+y_2} + 2y_1 \\ -2 & e^{y_1-y_2} & x_2 e^{y_1-y_2} - \frac{1}{1+y_2} & -x_2 e^{y_1-y_2} + \frac{y_1}{(1+y_2)^2} \end{pmatrix}$$

$$J\mathbf{f}(1,2,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$J\mathbf{g}(1,2) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Teorema del Valor Mig

Donada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *de classe* $\mathcal{C}^1$ *i donats dos punts* $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \Omega$ *tals que el segment* S *que els uneix també està contingut a* Ω *llavors sempre existeix* $\mathbf{x}^* \in S$ *de manera que*

$$f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 \rangle.$$

Aquest teorema ens permet fitar l'error que fem a l'aproximar $f(\mathbf{x}^1)$ per $f(\mathbf{x}^0)$, que pot fer-se de dues maneres:

- (Cauchy-Schwarz)
  $|\langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 \rangle| \leq ||\nabla f(\mathbf{x}^*)||\, ||\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0|| \leq M||\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0||$
  on $M = \max\{||\nabla f(\mathbf{x})||; \mathbf{x} \in S\}$.
- (més usada)
  $|\langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 \rangle| \leq \sum_{j=0}^n |\partial_j f(\mathbf{x}^*)|\, |x_j^1 - x_j^0| \leq \sum_{j=0}^n M_j |x_j^1 - x_j^0|$
  on $M_j = \max\{|\partial_j f(\mathbf{x})|; \mathbf{x} \in S\}$.

• *Fórmula de propagació de l'error*: aproximadament, $M_j = |\partial_j f(\mathbf{x}^0)|$.

Fórmula de Taylor, 1

(recordeu Taylor per funcions de 1 variable)

Teorema (fórmula de Taylor per a funcions de 2 variables): $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ obert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^k$ i $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \Omega$. Llavors

$$f(x_1, x_2) = P_k(x_1, x_2) + R_k(x_1, x_2)$$

on
- $P_k(x_1, x_2)$ és el *polinomi de Taylor de grau k de f entorn de* $\mathbf{a}$.
- $R_k(x_1, x_2)$ és el *residu de Taylor d'ordre k*, que verifica

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} \frac{R_k(x_1, x_2)}{||(x_1, x_2) - (a_1, a_2)||^k} = 0$$

Fórmula de Taylor, 2

I, concretament,

$$P_0(x_1, x_2) = A \text{ (constant)},$$

amb $A = f(\mathbf{a})$,

$$P_1(x_1, x_2) = P_0(x_1, x_2) + A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2),$$

amb $A_1 = \partial_{x_1} f(\mathbf{a})$ i $A_2 = \partial_{x_2} f(\mathbf{a})$.

$$P_2 = P_1 + \tfrac{1}{2}A_{1,1}(x_1 - a_1)^2 + A_{1,2}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \tfrac{1}{2}A_{2,2}(x_2 - a_2)^2,$$

amb $A_{1,1} = \partial^2 f_{x_1^2}(\mathbf{a})$, $A_{1,2} = \partial^2_{x_1 x_2} f(\mathbf{a})$ i $A_{2,2} = \partial^2_{x_2^2} f(\mathbf{a})$.

En general, el polinomi de Taylor es defineix així:

$$P_k(x_1, x_2) = P_{k-1}(x_1, x_2) + \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} \partial^{(i+j)}_{x_1^i x_2^j} f(\mathbf{a})(x_1 - a_1)^i (x_2 - a_2)^j.$$

Dem.: no és exactament una demostració, però podem comprovar que si $f(x_1, x_2) = Q_k(x_1, x_2)$ és un polinomi de grau k i $P_k(x_1, x_2)$ és el seu polinomi de Taylor, aleshores $P_k = Q_k$.

Exercici: Sigui $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^3}$. Calculeu $\partial^{12}_{x_1^3 x_2^9} f(0,0)$. (Resposta: 9!.)
Exercici: Calculeu, si existeix,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \sin(x+y) - x - y - x^2 - xy}{x^2+y^2}.$$

(Solició, $= 0$.)

Teorema (fórmula de Taylor per a funcions de n variables): $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^k$ i $\mathbf{a} \in \Omega$. Llavors $f(\mathbf{x}) = P_k(\mathbf{x}) + R_k(\mathbf{x})$ on

- $P_k(\mathbf{x})$ és el pol. de Taylor de grau k de f entorn de $\mathbf{x}_0$.
- $R_k(\mathbf{x})$ és el residu, que verifica

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_k(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}-\mathbf{a}||^k} = 0.$$

Fórmula de Taylor, 4

I, concretament,

$$P_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}),$$

$$P_k(\mathbf{x}) = P_{k-1}(\mathbf{x}) +$$

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \frac{1}{i_1!i_2!\ldots i_n!} \frac{\partial^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)} f(\mathbf{a})}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_n^{i_n}} (x_1 - a_1)^{i_1} (x_2 - a_2)^{i_2} \cdots (x_n - a_n)^{i_n},$$

on $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ i $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

- Exercici 45
- **Def**: Es diu *matriu Hessiana* $Hf(\mathbf{a})$ de f en el punt $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ a la matriu (simètrica) $Hf(\mathbf{a}) = \left(\partial^2_{x_i x_j} f(\mathbf{a})\right)_{i,j=1,\ldots n}$. Amb aquesta notació

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \rangle + \frac{1}{2} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a}), (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \rangle.$$

Defs: Sigui $f : \omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, Ω obert, $\mathbf{a} \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}^2$.
• Direm que $\mathbf{a}$ és un màxim relatiu de f si existeix $\varepsilon > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_\varepsilon^n(\mathbf{a})$ aleshores $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$.
• Direm que $\mathbf{a}$ és un mínim relatiu de f si existeix $\varepsilon > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_\varepsilon^n(\mathbf{a})$ aleshores $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$.

Prop: $\mathbf{a}$ extrem relatiu (màxim o mínim)$\Rightarrow$ $\mathbf{a}$ punt crític ($\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$).
Prova: Taylor de grau 1.

Extrems, 2

Defs: Sigui H una matriu $n \times n$ simètrica.
• Direm que H és definida positiva si els seus vaps λ són tots $\lambda > 0$. Equivalentment, $\mathbf{x}^T H \mathbf{x} > 0$ sempre que $\mathbf{x} \neq 0$. Equivalentment (Jacobi-Sylvester) els determinants dels menors principals son tots estrictament positius.
• Direm que H és definida negativa si els seus vaps λ són tots $\lambda < 0$. Equivalentment, $\mathbf{x}^T H \mathbf{x} < 0$ sempre que $\mathbf{x} \neq 0$. Equivalentment (Jacobi-Sylvester) els determinants dels menors principals son tots diferents de zero i amb signes alternats.
• Direm que H és indefinida té vaps positius i vaps negatius.

Teorema:
• Si $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ i $Hf(\mathbf{a})$ és definida positiva $\Rightarrow$ $\mathbf{a}$ és mínim relatiu.
• Si $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ i $Hf(\mathbf{a})$ és definida negativa $\Rightarrow$ $\mathbf{a}$ és màxim relatiu.
• Si $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ i $Hf(\mathbf{a})$ és indefinida $\Rightarrow$ $\mathbf{a}$ no és màxim ni mínim relatiu (és punt de sella).

Prova: Taylor de grau 2.
Exercici: $f(\mathbf{x}) = e^{-(1-||\mathbf{x}||^2)^2}$.

Extrems, 3 (extrems absoluts)

Prop.: En un conjunt compacte (tancat i fitat) tota funció contínua assoleix el seu màxim absolut i el seu mínim absolut.

Procediment: 1) Es busquen tots els màxims i mínims relatius a l'interior del conjunt. 2) Es busquen tots els màxims i mínims relatius de la funció restringida a la frontera. 3) Es comparen tots els valors de f en els punts trobats.

Exemple: Trobeu màxims i mínims absoluts de $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ restringida a $\overline{\mathcal{B}}_1^2(0, 0)$.