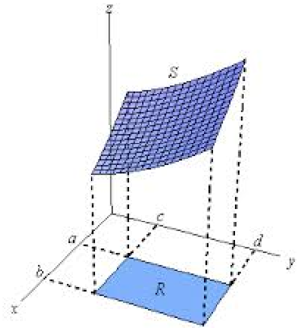
Idea intuitiva: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $f = f(x_1, x_2 \ldots x_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ escriurem

$$\int_\Omega f(x_1, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

per a referir-nos al *volum* $(n+1)$*-dimensional* (amb el seu signe) situat a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ entre $\Omega \times \{0\}$ i la gràfica de f (en el dibuix $\int_R f(x,y)\, dxdy$).



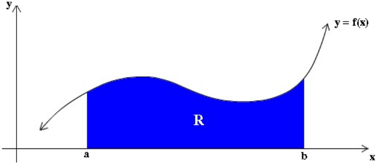
Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ positiva. Considerem el conjunt

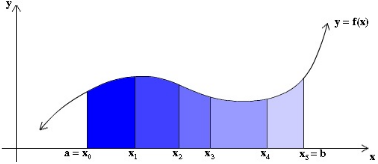
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Definim

$$\int_a^b f(x)\, dx = A(R),$$

on $A(R)$ és l'àrea de R. I l'àrea de R la calculem usant les *sumes de Riemann*.





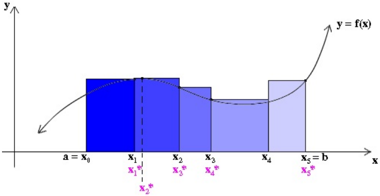
Integració a $\mathbb{R}$, 2

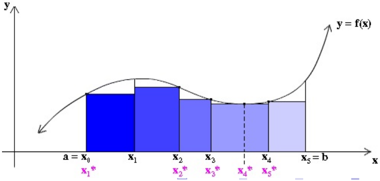
Sumes de Riemann: A l'interval $[a, b]$ considerem la partició donada per $x_i = a + (b-a)\frac{i}{N}$, i definim la suma superior S_N i la suma inferior s_N de Riemann com

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} M_i \frac{b-a}{N}, \quad s_N = \sum_{i=0}^{N-1} m_i \frac{b-a}{N},$$

on M_i i m_i són respectivament el màxim i el mínim de $f(x)$ a l'interval $[x_i, x_{i+1}]$. I tindrem

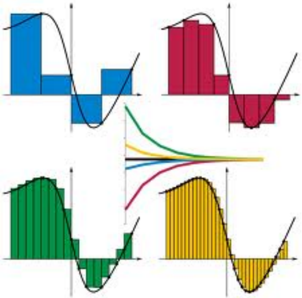
$$\int_a^b f(x)\,dx = A(\Omega) = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} s_N.$$





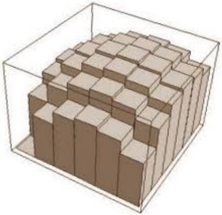
Suposem $D \subset I \subset \mathbb{R}$, on I és un interval fitat. Podem definit $\int_D f(x)\,dx$ com $\int_I \tilde{f}(x)\,dx$, on $\tilde{f}(x) = f(x)$ quan $x \in D$ i $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \in I \setminus D$.

Quan f no és positiva es pot fer el mateix, però apareixen "àrees negatives".



Donat un un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ i $f(x, y)$ definida a R i positiva, podem definir $\int_R f(x, y)\ dxdy$ com el volum del conjunt $W = \{(x, y, z) | ((x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, i el volum de W el definirem usant sumes de Riemann en particións Δ de R:

$$\int_R f(x, y)\ dxdy = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i,j} f(x^i, y^j) \Delta x^i \Delta y^j.$$



(normalment, particions equiespaiades, i sumes superiors o inferiors) **Exercici**: Quant val $\int_{[0,1]^2} (1 - x)\ dxdy$?

Integració $\mathbb{R}^n$, 1

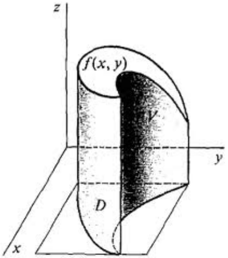
A $\mathbb{R}^n$ es fa igual:
- Paral·lelepípedes rectangulars
$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n]$ de mesura n-dimensional $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$ en els que està definida una funció $f(x_1, \dots x_n)$,
- conjunt sota de la gràfica
$W = \{(x_1, \dots x_n, x_{n+1}) | ((x_1, \dots x_n) \in P, 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1 \dots x_n)\}$,
- mesura $(n+1)$-dimensional dels prismes,
- sumes de Riemann, etc.

Quan les funcions no són positives es fa igual, però es substitueix la noció geomètrica de mesura per sumes algebraiques de mesures amb signes diferents.

Si volem integrar sobre $\Omega \subset P$ definim

$$\int_\Omega f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_R \tilde{f}(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

on $\tilde{f}$ coincideix amb f dins de Ω i val zero a $R \setminus \Omega$. Els paral·lelepípedes són més apropiats per a fer particions que no pas els conjunts arbitraris.



- Per $I = [a, b]$, $\int_I 1 \, dx = b - a$, la Longitud de I, $L(I)$.
- Anàlogament, si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Àrea$(\Omega) = A(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dxdy$.
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tindrem Volum$(\Omega) = V(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dxdydz$. En dimensió general escriurem $M(\Omega) = Mesura(\Omega)$.
- Linealitat: $\int_\Omega (af + bg) = a \int_\Omega f + b \int_\Omega g$.
- Aditivitat: si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ aleshores

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$$

- Monotonia: $f \leq g \Rightarrow \int_\Omega f \leq \int_\Omega g$. $(\Rightarrow \left| \int f \right| \leq \int |f|)$

Propietats de la integral, 2

- Teorema del Valor Mig: Si Ω és *arc-connex* i f és contínua a Ω aleshores existeix $\mathbf{a} \in \Omega$ tal que

$$\int_\Omega f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \cdot M(\Omega).$$

- Corol·lari: si $m_0 = \min_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x})$ i també $M_0 = \max_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x})$, aleshores

$$m_0 \cdot M(\Omega) \leq \int_\Omega f(\mathbf{x}) \leq M_0 \cdot M(\Omega).$$

(no cal que sigui arc-connex)

- Exercici: Fiteu superiorment i inferiorment

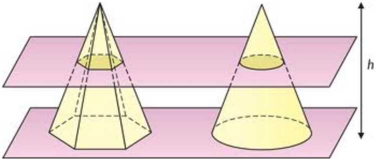
$$\int_{\mathcal{B}^3_R(0)} e^{-||\mathbf{x}||^2}.$$

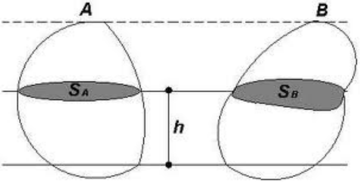
- Exercici: Demostreu que

$$1/6 \le \int_\Omega \frac{1}{y-x+3} \le 1/4,$$

on Ω és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,1)$ i $(1,0)$.

Principi de Cavalieri, 1





Principi de Cavalieri, 2

Donat $W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \in I\} \subset \mathbb{R}^3$, sigui $\Omega_{x_1^0}$ la secció que s'obté en tallar W amb el pla $x_1 = x_1^0$. Diem $A(x_1^0)$ a l'àrea de $\Omega_{x_1^0}$. Aleshores el volum de W és:

$$V(W) = \int_I A(x_1)\, dx_1 .$$

• Exemple: volum del con $W = \{x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, x_3 \in I = [0, H]\}$.
$(\pi H^3/3)$
• Exemple: volum de l'el·lipsoïde

$$W = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

$(4\pi abc/3)$
• Problemes 3(c) i 3(d)

Principi de Cavalieri, 3

Exemple fonamental: volem calcular el volum de

$$W = \{(x, y, z) | x \in I_x, y \in I_y, z \in [0, f(x, y)]\}$$

on suposem $f \geq 0$. Aquest volum serà, per definició, $\int_{I_x \times I_y} f(x, y)$. Si fixem $x = x_0$ l'àrea de la secció serà $A(x_0) = \int_{I_y} f(x_0, y)\, dy$ i pel principi de Cavalieri

$$V(W) = \int_{I_x} A(x)\, dx = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y)\, dy \right)\, dx.$$

O sigui que la integral doble és una integral iterada!
De la mateixa manera

$$\int_{I_x \times I_y} f(x, y) = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y)\, dy \right)\, dx = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y)\, dx \right)\, dy$$

(T. de Tonelli) i això val per totes les funcions, no només les positives (T. de Fubini).

Integrals iterades, 1

- Per $\Omega = \{(x, y : x \in I, y \in I_x = [\phi_1(x), \phi_2(x)]$ amb $\phi_1 \leq \phi_2$ tindrem

$$\int_\Omega f(x,y) = \int_I \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

(i no convé fer-ho en l'altre ordre).

- De la mateixa manera, si $\Omega = \{(x, y : y \in J, x \in J_y = [\phi_1(y), \phi_2(y)]$ tindrem

$$\int_\Omega f(x,y) = \int_J \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

- Finalment, per $\Omega = \{(x, y, z) | x \in I, y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)], z \in [\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)]$ tindrem

$$\int_\Omega f(x,y,z) = \int_I \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

Integrals iterades, 2

Exemples:

- $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x^2\}$. Escriviu les dues integrals iterades.
- Ω domini limitat per les corbes $y = x^2$ i $x = y^2$. Escriviu les dues integrals iterades.
- Calculeu $\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x}$.
- Calculeu $\int_\Omega x^2 \sin(xy)$ on $\Omega = \{0 \leq y \leq 1; y \leq x \leq 1\}$.
- Calculeu $\int_W xyz$ on W és el conjunt limitat per les superfícies $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ i $z = 0$.

Exercicis 8(b), 8(c), 8(e), 11(e), 11(g), 14(a), 14(c), 15(e).

Teorema: (del canvi de variable) Si $T : \Omega^* \subset \mathbb{R}^n \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$, (*noves en velles*), amb $\mathbf{x}^* \mapsto \mathbf{x} = T(\mathbf{x}^*)$ és de classe $\mathcal{C}^1$, amb inversa també de classe $\mathcal{C}^1$, aleshores

$$\int_\Omega f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega^*} f(T(\mathbf{x}^*))|\det JT(\mathbf{x}^*)|.$$

Exemple 1, Coordenades polars: $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $|\det JT(r,\theta)| = r$.

- Area rosa 4 pètals ($r \leq a^2 \sin(4\theta)$).
- $\Omega = \{1 \leq r \leq 2\} \cap \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\}$. Calculeu $\int_\Omega xy$ $(= 15/8)$.

Exemple 2, Coordenades cilíndriques:
$T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, $|\det JT(r, \theta, z)| = r$.

- Volum comprès entre el con $z^2 = x^2 + y^2$ i el paraboloide $z = x^2 + y^2$ per $z > 0$.
- Volum de la part de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que és exterior al cilindre $x^2 + y^2 = b^2$ $(a > b > 0)$. (Solució: $\frac{4\pi}{3}(a^2 - b^2)^{3/2}$).

Exemple 3, Coordenades esfèriques:
$T(r, \theta, \phi) = (r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\phi)$,
$|\det JT(r, \theta, \phi)| = r^2\cos\phi$.

- Volum de $\mathcal{B}^3_R(0)$.
- Volum del domini tallat sobre la bola $r \leq a$ pel con $\alpha \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ $(a > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. (Solució: $\frac{2\pi a^3}{3}(1 - \sin\alpha)$.)

Altres canvis: 18(a), 18(d) i 18(g).

Exercicis:

- de polars 16(c), 16(d), 16(g), 17(c).
- de cilindriques 19(b) i 19(e)
- d'esfèriques 20(c), 21(b), 21(c)
- d'altres 18(a), 18(f)
- 23(a), 23(e), 23(f), 23(j), 23(l)

Ja hem vist que si $D \subset \mathbb{R}^2$ i $W \subset \mathbb{R}^3$ l'àrea de D, $A(D)$ i el volum de W, $V(W)$ es defineixen per

$$A(D) = \int_D 1\ dxdy, \qquad V(W) = \int_W 1\ dxdydz.$$

Per una funció $f : D \to \mathbb{R}$ o una funció $g : W \to \mathbb{R}$ es defineixen les mitjanes $\mathcal{V}_m(f)$ i $\mathcal{V}_m(g)$ per

$$\mathcal{V}_m(f) = \frac{1}{A(D)} \int_D f(x,y)\ dxdy,$$

$$\mathcal{V}_m(g) = \frac{1}{V(W)} \int_W f(x,y,z)\ dxdydz.$$

Ex.: Sigui $f(x,y,z)$ la distància al quadrat del punt (x,y,z) al punt $(0,0,c)$. Calculeu la mitjana de f sobre la bola $\mathcal{B}^3_R(0)$.
$(\frac{3}{5}R^2 + c^2)$
Exercici 24

Massa d'un cos del pla o de l'espai amb densitats $\rho(x, y)$ o $\rho(x, y, z)$:

$$m(D) = \int_D \rho(x, y), \qquad m(W) = \int_W \rho(x, y, z).$$

Ex.: Calculeu la massa d'una placa quadrada de costat a, on la seva densitat en cada punt és igual al quadrat de la seva distància a un vèrtex. $(\frac{2}{3}a^4)$

Aplicacions de la integral, 3 (CM i CG)

Centre de masses (CM) :

- Cas discret

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2 + \ldots m_n\mathbf{x}_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}$$

- Cas continu, interval I:

$$\overline{x} = \frac{\int_I x\rho(x)}{m(I)}$$

- Cas continu, cos pla D:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{\int_D x\rho(x,y)}{m(D)}, \frac{\int_D y\rho(x,y)}{m(D)} \right)$$

- Cas continu, cos W a l'espai:

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{\int_W x\rho(x,y,z)}{m(W)}, \frac{\int_W y\rho(x,y,z)}{m(W)}, \frac{\int_W z\rho(x,y,z)}{m(W)} \right)$$

Centre Geomètric: quan la densitat és constant, el CM s'anomena *centre geomètric* (CG), i tindrem

- Cas continu, cos pla D, el CG és

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{\int_D x}{A(D)}, \frac{\int_D y}{A(D)} \right)$$

- Cas continu, cos W a l'espai, el CG és

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{\int_W x}{V(W)}, \frac{\int_W y}{V(W)}, \frac{\int_W z}{V(W)} \right)$$

Propietats del CM (i del CG):

- Si dividim un cos en dues o més parts, el seu CM és el mateix que s'obtindria si les masses fossin puntuals i concentrades en els CM corresponents.
- Si un cos té simetria respecte a un pla (o una recta o un punt) i la seva densitat també, aleshores el seu CM pertany a aquest pla (o aquesta recta o és aquest punt).

Ex.: Calculeu el CM d'un cil·lindre d'alçada h i base circular de radi R, si la seva densitat en cada punt és proporcional a la seva distància a la base. $(0, 0, 2h/3)$
Ex.: Calculeu el centre geomètric del triangle de vèrtexs $(0, 0), (1, 0)$ i $(0, 1)$ del que se li ha extret un quart de disc de radi $1/2$ centrat a l'origen.
Exs.: 25(a), 25(b), 26(a), 26(c) i 28.

(Pappus-Guldin)
El volum d'un cos de revolució generat per una placa plana en girar al voltant d'un eix contingut al mateix pla que conté la placa, però que no talla la placa, és igual al producte de l'àrea de la placa per la longitud de la circunferència descrita pel seu CG en girar al voltant de l'eix de revolució.

$$V(W) = 2\pi\ d(p, CG)A(D),$$

ón p és l'eix de revolució i D és la placa.
Ex 1: En el pla (x,y) considerem la circumferència de radi r centrada en el punt $(R, 0)$, amb $R > r$, i en fer-la girar al voltant de l'eix OY obtenim un tor de revolució. Calculeu el seu volum. $(2\pi^2 r^2 R)$
Ex 2: Calculeu el CG d'un quart de disc de radi R centrat a l'origen. $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$

Moment d'inèrcia respecte d'un eix. Donat un eix R i n masses puntuals $m_1, m_2, \ldots m_n$ situades a distàncies $r_1, r_2, \ldots r_n$ de l'eix R el seu Moment d'Inèrcia respecte a R és

$$I_R = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots m_n r_n^2.$$

Passant al continu tindrem, per $D \subset \mathbb{R}^2$ o $W \subset \mathbb{R}^3$

$$I_R = \int_D d^2\left((x,y),R\right)\rho(x,y)\; dxdy,$$

$$I_R = \int_W d^2\left((x,y,z),R\right)\rho(x,y,z)\; dxdydz.$$

Ex.: Calculeu el moment d'inèrcia de $\mathcal{B}_1^3(0)$ respecte d'un diàmetre si la densitat en un punt és igual a la distància al centre de la bola. ($I = 4\pi/9$)

(Steiner)
El moment d'inèrcia d'un cos respecte a un eix és la suma del moment d'inèrcia respecte a l'eix paral·lel que passa pel CM del cos i el moment que tindria si tota la seva massa estigués concentrada en el CM

$$I_R = I_S + m(W)d^2(CM, R).$$

Ex.: Considereu el cilindre
$W = \{x^2 + y^2 \leq R^2, -h/2 \leq z \leq h/2\}$ amb densitat igual a 1, i sigui S un eix situat en el pla $z = h/2$ que passa pel punt $(0, 0, h/2)$. Calculeu I_S. $(= V(W)(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}))$
Ex.: 34(c) i 34(d).