La matemàtica dels Cartogrames Geogràfics

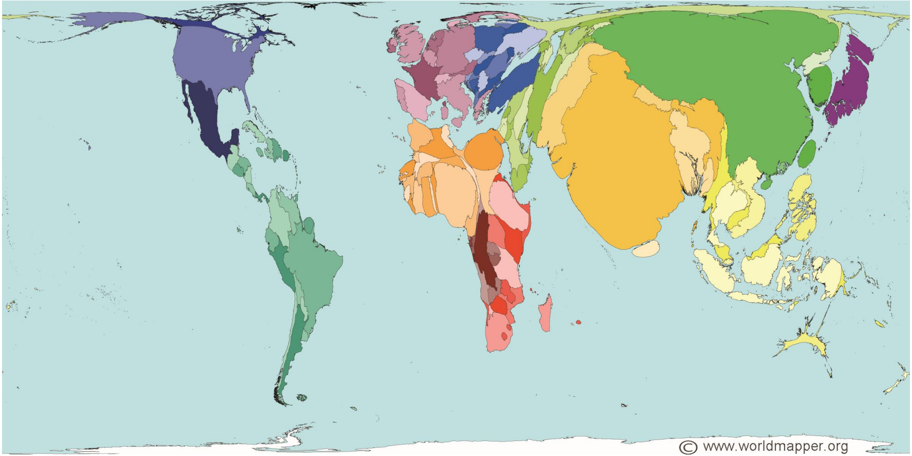
Joan de Solà-Morales i Rubió

17 de juny de 2013

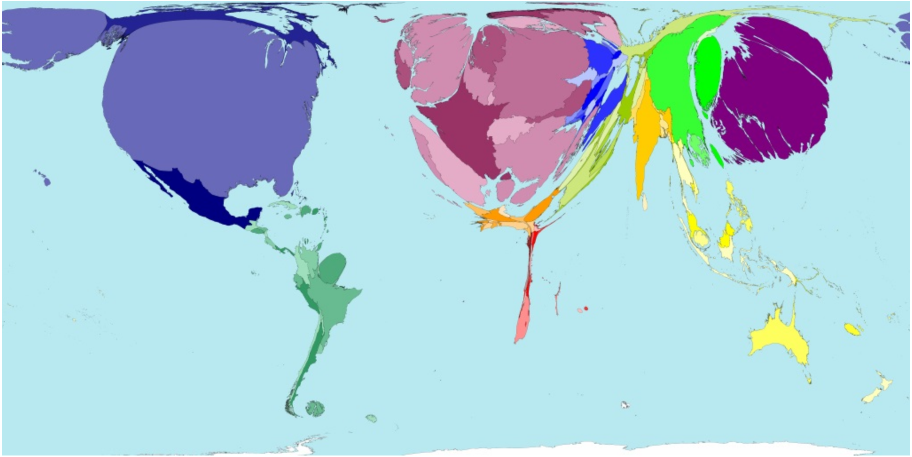
Discurs d'ingrés a la
Secció de Ciències i Tecnologia,
Institut d'Estudis Catalans

0. Presentació
1. Cartogrames geogràfics
2. Transformacions amb Jacobià donat
3. Cartogrames de Catalunya
4. Contigüitat i continuïtat

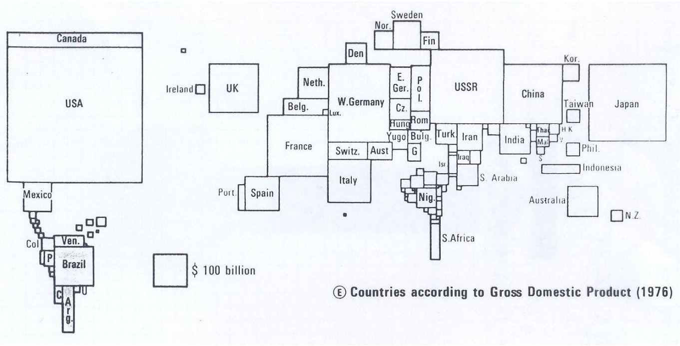
1 Cartogrames geogràfics



Població 2002 (www.worldmapper.org)

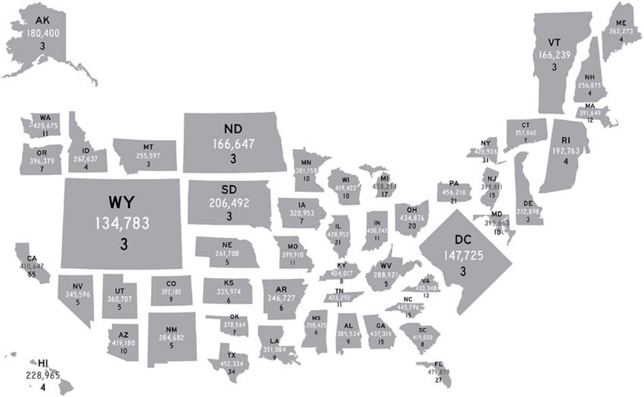


Producte interior brut 2002 (www.worldmapper.org)



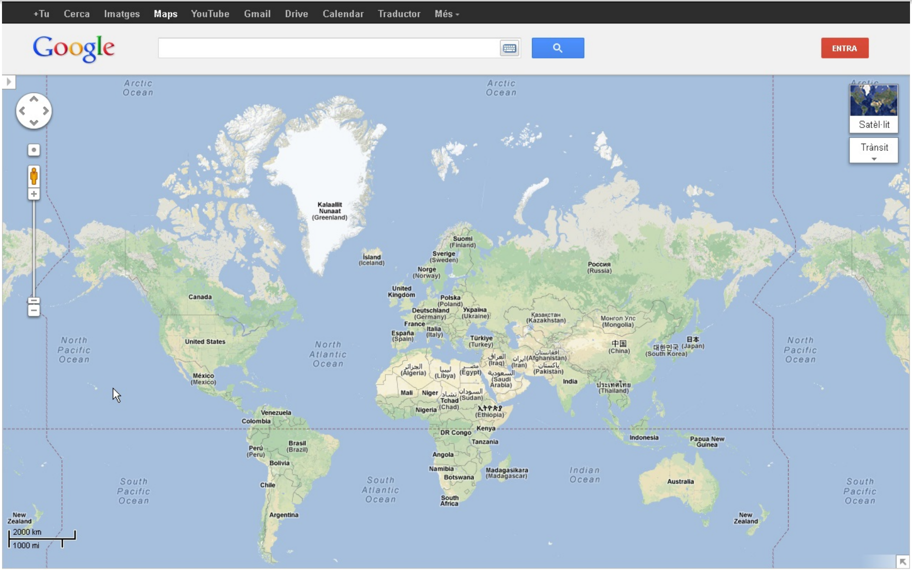
Producte interior brut 1976

- El problema de la contigüitat (continuïtat): fronteres d'Àustria amb Txecoslovàquia i Hongria, frontera de Polònia amb Romania.



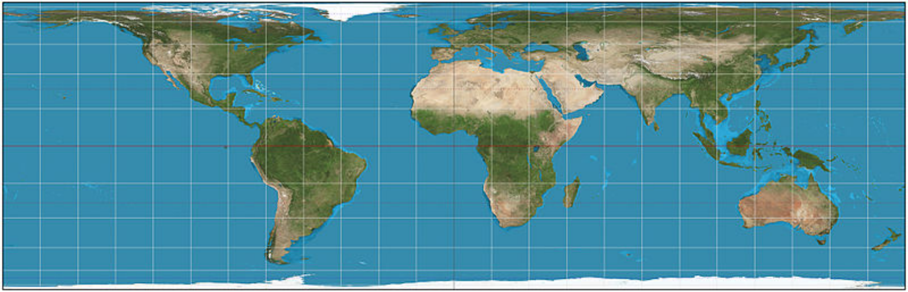
NY Times: influència electoral dels estats 2007

- Els cartogrames tenen una llarga tradició entre els geògrafs. El problema matemàtic de la contigüitat era vist essencialment com un problema combinatori.
  • Tobler, W.R.: Thirty-five years of computer cartograms, *Annals of the Association of American Geographers*, 94 1, 58–73, 2004.
- El panorama va canviar radicalment l'any 2004 amb l'aparició del primer programa basat en l'*Algorisme Equalitzador de Densitats* de M.T. Gastner M.T. i M.E.J. Newman.
  • Gastner M.T., Newman M.E.J.: Diffusion-based method for producing density-equalizing maps. *Proceedings of the National Academy of Sciences 2004, 101:7499–7504.*
- L'anàlisi matemàtica d'aquest algorisme havia començat independentment el 2003
  • A. Avinyó, JS–M and M. València: On Maps with given Jacobians involving the Heat Equation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 54 (2003), n. 6, 919-936*.
- L'interés segueix vigent a l'actualitat.
  • Hennig, B.: *Rediscovering the World. Map Transformations of Human and Physical Space.* Springer, 2013.



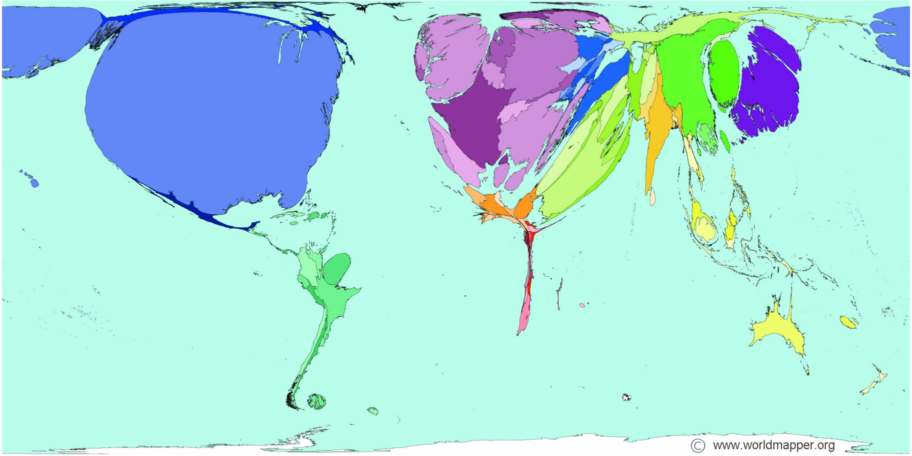
Distorsió de les àrees en la projecció de Mercator

- Gerardus Mercator, 1569.

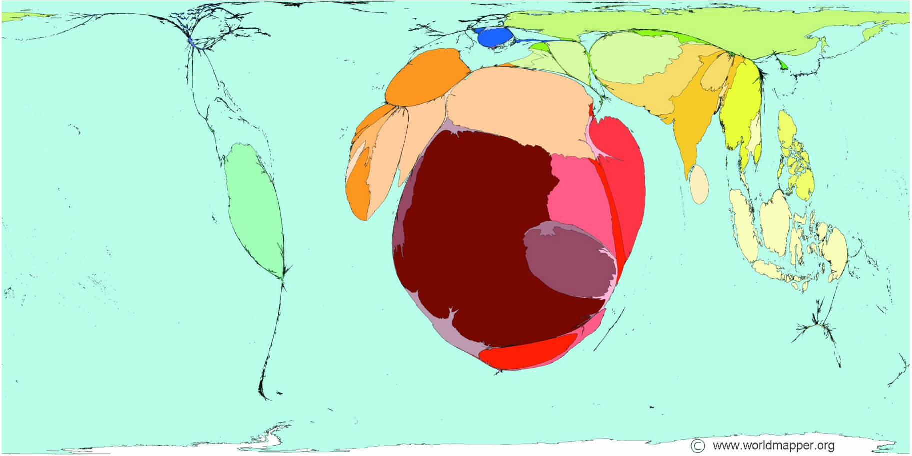


Projecció equivalent de Lambert

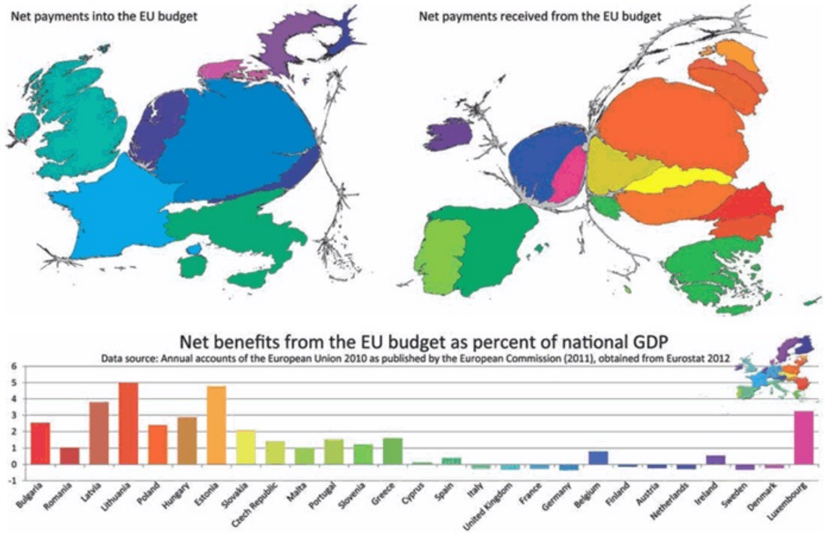
- J.H. Lambert, 1772.



Despeses militars 2002 (www.worldmapper.org)



Morts en guerra 2002 (www.worldmapper.org)

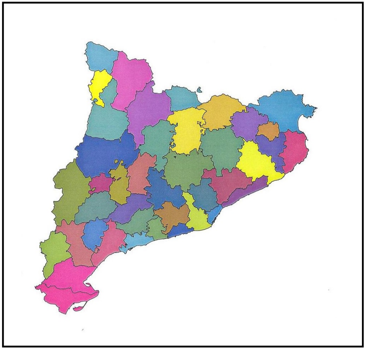


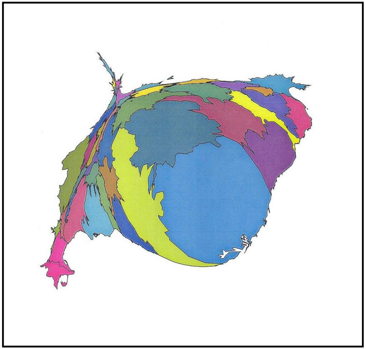
Hennig, B. D. and Dorling, D. (2012), Financing the European Union. Political Insight, 3: 34.

2 Transformacions amb Jacobià donat

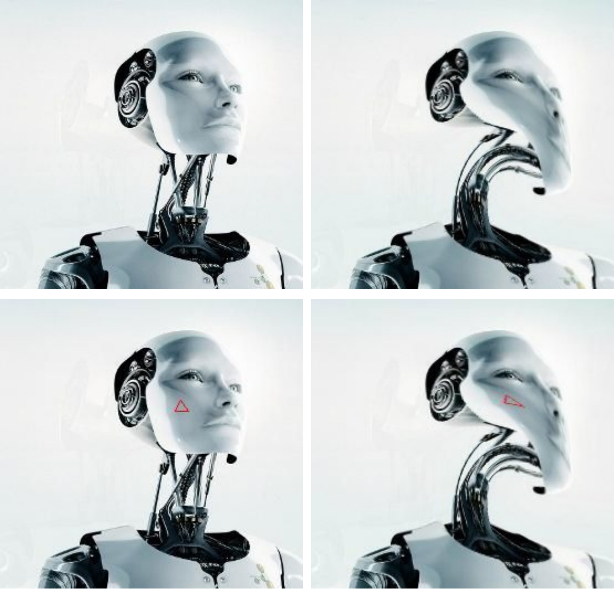
$$T : R \to R$$

$$(x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$$





Habitants per comarques (A. Avinyó, 2010)



- Si R és un rectangle en el pla x, y i tenim una transformació $T : R \to R$ que envia un punt de coordenades (x, y) a un punt de coordenades $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ aleshores el Jacobià de T es calcula com

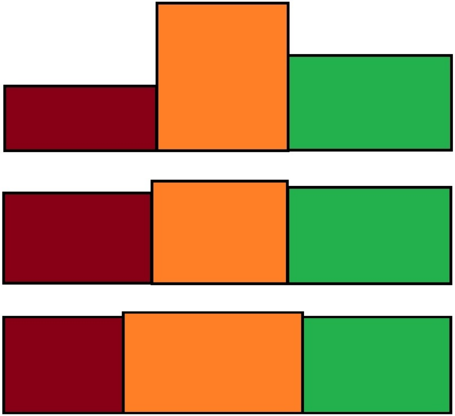
$$J(x,y) = \det DT(x,y) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

- El problema que voldriem resoldre és trobar T tal que el seu Jacobià sigui una funció donada $f(x, y)$ (> 0):

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = f(x,y).$$

(És fàcil de veure que la solució no serà única).

Conducció (o difusió) i advecció, 1



Conducció (o difusió) i advecció, 2

Conducció o difusió:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla \rho) = 0$$

Convecció o advecció

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Per tant la difusió pot mirar-se com una advecció amb el camp de velocitats

$$\vec{V} = -\frac{\nabla \rho}{\rho}$$

L'*algorisme equalitzador de densitats* consisteix en fer moure els punts del mapa segons les velocitats $\vec{V} = -\nabla \rho / \rho$, després de resoldre l'equació de la difusió, i deixar-los movent-se un temps (en teoria) infinit.

Algorisme equalitzador de densitats

Suposem R donat i $f(x,y) > 0$ també, de manera que $\int_R f(x,y)\,dxdy = \text{vol}(R)$. Donat $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ a R, definim $T(\mathbf{z}_0)$ per

$$\begin{cases} \rho_t = \nabla^2 \rho \qquad \text{a } R, \text{ per } t > 0 \\ \rho_\nu = 0 \qquad \text{a } \partial R, \text{ per } t > 0 \\ \rho(x,y,0) = f(x,y) \\ \mathbf{z}'(t) = -\dfrac{\nabla \rho(\mathbf{z}(t),t)}{\rho(\mathbf{z}(t),t)} \qquad \text{per } t > 0 \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \\ T(\mathbf{z}_0) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t). \end{cases}$$

Un càlcul formal en el cas diferenciable:

Definim $V^t(\mathbf{w}) = -\nabla\rho(\mathbf{w},t)/\rho(\mathbf{w},t)$ i T^t per $(d/dt)T^t(\mathbf{z}) = V^t(T^t(\mathbf{z}))$. Pel Teorema de Liouville

$$\frac{d}{dt}\ln\det\left(DT^t(\mathbf{z})\right) = \nabla\cdot V^t(T^t(\mathbf{z})).$$

Per la definició de V^t i ja que ρ satisfà l'equació de la calor,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot V^t(\mathbf{w}) &= -\frac{\nabla^2\rho(\mathbf{w},t)}{\rho(\mathbf{w},t)} + \left(\frac{\nabla\rho(\mathbf{w},t)}{\rho(\mathbf{w},t)}\right)^2 \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\ln\rho(\mathbf{w},t) - V^t(\mathbf{w})\cdot(\nabla\ln\rho(\mathbf{w},t)).\end{aligned}$$

Per tant, $(\nabla\cdot V^t)(T^t(\mathbf{z})) = -(d/dt)\left(\ln\rho\left(T^t(\mathbf{z})\right)\right)$. Aleshores

$$\frac{\det\left(DT^t(\mathbf{z})\right)}{\det\left(DT^0(\mathbf{z})\right)} = \frac{\rho(T^0(\mathbf{z}),0)}{\rho(T^t(\mathbf{z}),t)}.$$

Finalment, el resultat es segueix ja que $T^0(\mathbf{z}) \equiv \mathbf{z}$, $\rho(0,\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$ i $\rho(\mathbf{y},t) \to 1$ quan $t\to\infty$.

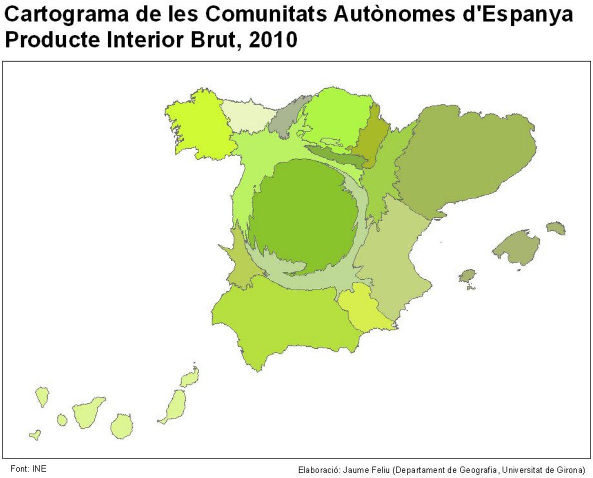
L'anterior càlcul formal pot fer-se rigorós si la densitat $f(x, y)$ és una funció que pertany a alguna classe de Hölder $\mathcal{C}^{\alpha}(R)$. En aquest cas T resulta ser de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}$.
Les dificultats venen de que la constant de Lipschitz de V^t es fa infinit massa de pressa quan $t \to 0$ si $f(x, y)$ no està en una classe de Hölder. En les classes de Hölder es pot usar la desigualtat

$$\|\nabla \rho(t, \cdot)\|_{\mathcal{C}^{1,\beta}} \leq \frac{C}{t^{1-(\alpha-\beta)/2}} \|f(\cdot)\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}$$

(Solonnikov and Belonosov ('79), X. Mora ('83)).

Això és òbviament insuficient, si volem considerar funcions $f(x, y)$ constants a trossos.

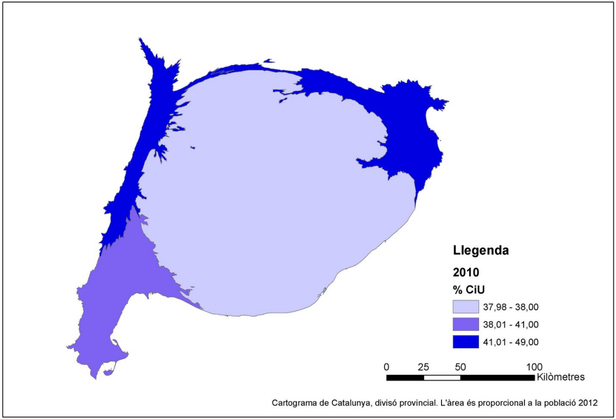
3 Cartogrames de Catalunya



Jaume Feliu, Departament de Geografia, Universitat de Girona
elmapacomaexcusa.blogspot.com.es

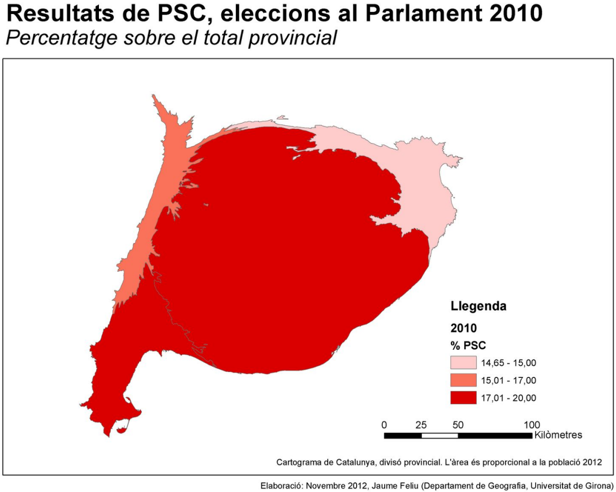
Resultats de CiU, eleccions al Parlament 2010

Percentatge sobre el total provincial



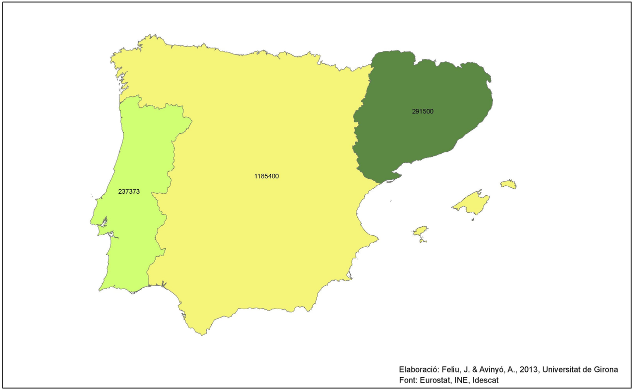
Elaboració: Novembre 2012, Jaume Feliu (Departament de Geografia, Universitat de Girona)

elmapacomaexcusa.blogspot.com.es



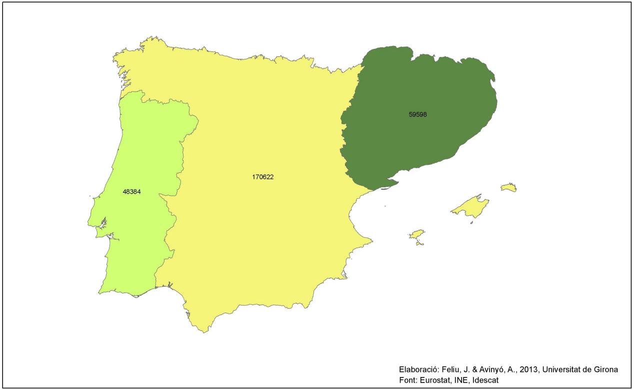
elmapacomaexcusa.blogspot.com.es

Cartograma del Producte Interior Brut (PIB en milions de dolars, 2012)



(J. Feliu i A. Avinyó, 2013)

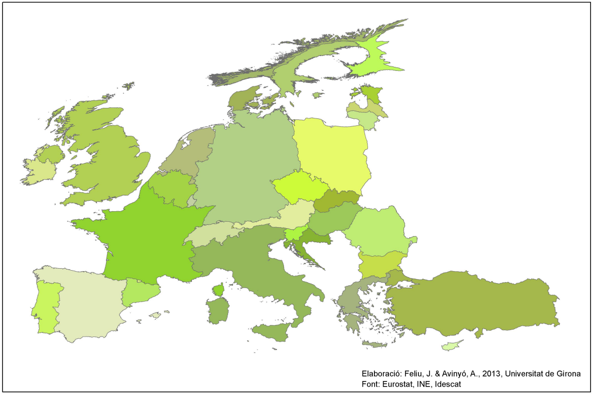
Cartograma de les exportacions (milions d'euros, 2012)



(J. Feliu i A. Avinyó, 2013)

Hipòtesi de Catalunya com a nou estat d'Europa

Cartograma de la població (nombre d'habitants, 2012)



(J. Feliu i A. Avinyó, 2013)

i 4 Contigüitat i continuïtat

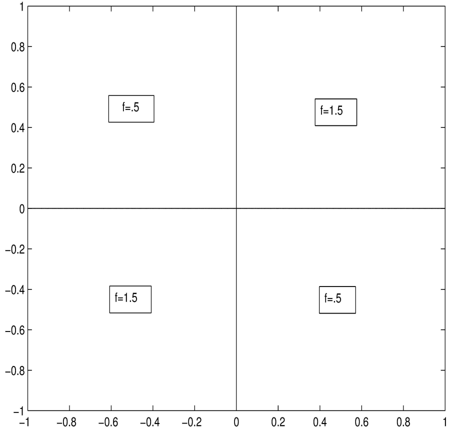
- Des del punt de vista de l'anàlisi de l'algorisme, el problema que vam creure que quedava pendent era el de demostrar que l'algorisme estava ben posat en casos en que la densitat $f(x, y)$ no és una funció contínua.
- El problema principal acaba sent el de la continuïtat de la transformació obtinguda. I el problema de la continuïtat està completament lligat al problema de la unicitat de solució de les equacions diferencials ordinàries que hi estan involucrades.
- Aquestes idees es veuen mes clares en l'exemple següent, que descriu un algorisme diferent per a obtenir transformacions amb Jacobià donat.

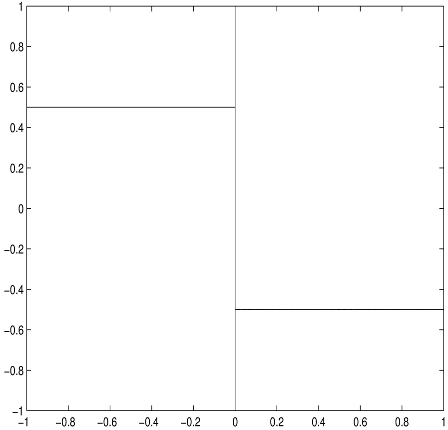
Mètode de les direccions invariants (Knothe-Rosenblatt)

$$T : [0,a] \times [0,b] \to [0,a] \times [0,b]$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x,y) \end{pmatrix} =$$

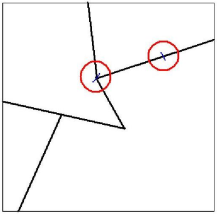
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b} \int_0^x \int_0^b f(\xi,\eta) d\eta \, d\xi \\ \\ \dfrac{b \int_0^y f(x,\eta) d\eta}{\int_0^b f(x,\eta) d\eta} \end{pmatrix}$$


f=.5
f=1.5
f=1.5
f=.5



- Els nostres resultats (2012) mostren la continuïtat de la transformació $T(x, y)$ per densitats $f(x, y)$ que inclouen, com a mínim, funcions constants en polígons del pla (aquest és el cas pràctic pels cartogrames geogràfics).

- Si estem interessats en la continuïtat respecte a l'estat inicial / unicitat de solució $\mathbf{z}(t)$ per $t \sim 0$ d'un problema amb valor inicial $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ podem restringir-nos a considerar $\mathbf{z} \sim \mathbf{z}_0$. Això és una invitació a usar idees de l'Anàlisi Assimptòtica.



Si es magnifiquen les variables $\mathbf{z} = (x, y)$ prop de $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ i la variable t prop de $t = 0$ en les proporcions apropiades, s'acaba obtenint un problema similar però a tot el pla i amb una funció $f(x, y)$ que és constant en sectors angulars centrats a (diguem) $\mathbf{z}_0 = 0$.

Per aquest problema magnificat podem demostrar que el problema està ben posat, i en particular hi ha unicitat de solució.

En les noves variables la EDO té la forma particular

$$\mathbf{z}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{H}(\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{z}(t))$$

amb una funció vectorial fitada $\mathbf{H}(\mathbf{w})$ independent del temps. Està prou clar que la part de la dreta tindrà una constant de Lipschitz com $1/t$ (no integrable).

Teorema (A. Avinyó, M. València i JS-M, 2012):

Si $\mathbf{F}(\mathbf{z},t)$ *és contínua per* $0<t\le\varepsilon$ *i* $0\le|\mathbf{z}|\le\varepsilon$ *i*

$$|\mathbf{F}(\mathbf{z},t)|<\frac{M}{\sqrt{t}}$$

$$(\mathbf{F}(\mathbf{z}_1,t)-\mathbf{F}(\mathbf{z}_2,t))\cdot(\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2)\le L\frac{|\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_1|^2}{t}$$

per $t>0$ *i* $L<1/2$*, aleshores el problema de valor inicial per* $\mathbf{z}'=\mathbf{F}(\mathbf{z},t)$ *està ben posat per* $t>0$*.*

- Comparar amb (P. Hartman 1964, ODE's, Exercici 6.8, *One-sided generalization of Nagumo's criterion*)
- Tenim un contraexemple amb $L=1/2$.
- Per $\mathbf{z}'=\mathbf{H}(\mathbf{z}/\sqrt{\mathbf{t}})/\sqrt{\mathbf{t}}$ aquestes hipòtesis simplement demanen: $|\mathbf{H}|$ fitada i $\frac{1}{2}(D\mathbf{H}+D\mathbf{H}^{\mathbf{T}}))<L<1/2$ (que es comproven a partir de la EDP).

Hi ha un cas fàcil de calcular en que $\mathbf{H}(w_1, w_2) = \mathbf{H}(w_1)$. En aquest cas $\mathbf{H}$ depen d'un paràmetre $C > 1$. El que s'ha de comprovar és que $\mathbf{H}'(w_1) < 1/2$. Els dibuixos que surten són els següents: