ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — Conditions au bord sur la vitesse et la pression pour les équations de Navier-Stokes dans une conduite finie.

Note de **Joan de Solà-Morales Rubió**, présentée par Jacques-Louis Lions.

Reçue le 18 juin 1984, acceptée le 24 juillet 1984.

On considère les équations de Navier-Stokes dans une conduite finie avec la condition d'adhérence aux parois. On montre que le problème à valeur initiale est bien posé quand on prend comme valeurs aux limites sur les sections extrêmes la pression et la vitesse tangentielle.

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. — Boundary Conditions on the Velocity and the Pressure for the Navier-Stokes Equations in a Finite Conduction.

This Note deals with the Navier-Stokes equations in a finite pipe with no-slip at the wall. We show that the initial value problem is correctly posed when the pressure and the tangent velocity are taken as boundary values at the ends.

1. Position du problème. — Soit Σ un domaine de $\mathbb{R}^2$ avec bord assez régulier, et considérons dans $\mathbb{R}^3$ le domaine $\Omega=(0, L)\times\Sigma$, pour $L>0$. Pour nous, Ω représentera une conduite finie avec les parois au repos, dans laquelle on étudiera l'écoulement au cours du temps d'un fluide homogène, incompressible et visqueux obéissant aux équations de Navier-Stokes. Si on appelle $V(x, y, z, t)=(u, v, w)$ la vitesse du fluide et $p\,(x, y, z, t)$ la pression, dans un système de mesures approprié, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}V+\nabla p=-(V\cdot\nabla)\,V+\Delta V+G, \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot V=0 \tag{1.2}$$

où G représente le champ des forces extérieures.

Divisons maintenant le bord de Ω en deux parties : $\partial_1=[0, L]\times\partial\Sigma$ et $\partial_2=\{0, L\}\times\bar{\Sigma}$.

A cause de la viscosité, il est naturel de demander que :

$$V=0 \quad \text{sur } \partial_1, \tag{1.3}$$

et nous sommes intéressé à voir si on peut avoir un problème bien posé quand on fixe la pression sur ∂_2 :

$$p\,(0, y, z, t)=p_0\,(y, z, t) \qquad \text{et} \qquad p\,(L, y, z, t)=p_L\,(y, z, t). \tag{1.4}$$

Ce problème-ci est classique dans le cas stationnaire, où on impose en plus que p_0 et p_L soient des constantes et que V soit « laminaire », c'est-à-dire que $v=w=0$ sur Ω, et on obtient une solution (stationnaire) unique. Mais dans le cas non stationnaire la condition de laminarité semble trop restrictive, et la discussion sur l'existence et l'unicité d'une solution pour un problème à valeur initiale satisfaisant (1.1)-(1.4) semble n'avoir pas été faite jusqu'ici. Le but de notre travail a été de nous convaincre que le problème à valeur initiale pour (1.1)-(1.4) n'avait pas d'unicité, et en même temps de chercher des conditions supplémentaires ayant le maximum de sens du point de vue physique pour arriver à un problème mathématiquement bien posé. Ainsi on a trouvé qu'on avait unicité de solution si on ajoutait à (1.1)-(1.4) la condition de laminarité restreinte au bord ∂_2 : $v=w=0$ sur ∂_2.

Puisque cela veut dire qu'on fixe sur ∂_2 la pression p et aussi les composantes tangentielles de V, on s'est posé un problème plus général et non homogène en prenant un champ auxiliaire sur Ω : $V_b=(u_b, v_b, w_b)$, qui peut dépendre du temps, à divergence

0249-6321/84/02990499 $ 2.00 © Académie des Sciences

nulle et satisfaisant (1.3), et en demandant alors :

(1.5) $$v = v_b \quad \text{et} \quad w = w_b \quad \text{sur } \partial_2.$$

C'est le problème à valeur initiale pour (1.1)-(1.5) qu'on va traiter dans ce qui suit. Le cas particulier $V_b = 0$ semble un modèle assez raisonnable pour l'évolution au cours du temps des perturbations des écoulements du type de Poiseuille dans des conduites finies. [L'alternative classique est de substituer (1.4) et (1.5) par des conditions de périodicité.]

Comme d'habitude, pour rendre homogènes les conditions au bord on prend une fonction $p_b(x, y, z, t)$ satisfaisant (1.4) et on cherche V et p sous la forme $V = V_b + U$, $p = p_b + q$. On appelle aussi (u, v, w) les composantes de U.

Ainsi on a :

(1.6) $$\frac{\partial}{\partial t} U + \nabla q = -(V_b \cdot \nabla) U - (U \cdot \nabla) V_b - (U \cdot \nabla) U + \Delta U + H(t),$$

(1.7) $$\nabla \cdot U = 0,$$

(1.8) $$U = 0 \quad \text{sur } \partial_1,$$

(1.9) $$q = 0 \quad \text{sur } \partial_2,$$

(1.10) $$v = w = 0 \quad \text{sur } \partial_2,$$

où $H = -(\partial/\partial t) V_b - (V_b \cdot \nabla) V_b - \nabla p_b + \Delta V_b + G(t)$. Et on se donne aussi une condition initiale :

(1.11) $$U(t_0) = U_0.$$

2. Espaces fonctionnels et opérateurs. — Pour formuler le problème (1.6)-(1.11) comme une équation semi-linéaire d'évolution dans un cadre fonctionnel approprié, on va construire une décomposition orthogonale de l'espace de Hilbert $L_2(\Omega)^3$ appropriée aux conditions (1.7)-(1.10) qui nous permettra d'éliminer la pression comme une inconnue explicite.

Considérons l'espace fonctionnel :

$$J_b(\Omega; \partial_1) = \{ U \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})^3 \mid \nabla \cdot U = 0,\ v = w = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ u = 0 \text{ sur } \partial_1 \}$$

et ses adhérences dans $L_2(\Omega)^3$ et dans l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)^3$, qui seront notées $J_0(\Omega; \partial_1)$ et $H(\Omega; \partial_1)$, respectivement. Considérons aussi l'espace :

$$G(\Omega; \partial_2) = \{ \nabla p \mid p \in H^1(\Omega),\ p = 0 \text{ sur } \partial_2 \text{ au sens des traces} \}.$$

Alors on a :

Théorème 1. — *$G(\Omega; \partial_2)$ est l'espace orthogonal à $J_0(\Omega; \partial_1)$ dans $L_2(\Omega)^3$.*

Théorème 2. — *Si Π est la projection orthogonale de $L_2(\Omega)^3$ dans $J_0(\Omega; \partial_1)$ et si l'on considère l'opérateur $A = \Pi \circ \Delta$, où Δ est le Laplacien, comme un opérateur de $J_0(\Omega; \partial_1)$ avec domaine $D(A) = H(\Omega; \partial_1)$, alors A est à domaine dense, fermé, autoadjoint et strictement négatif.*

Idée des démonstrations. — On a choisi pour les démonstrations une méthode indirecte qui, par des raisonnements de symétrie, fait découler ces résultats des résultats déjà connus avec des conditions au bord seulement pour la vitesse pour un domaine D que nous allons définir :

Soit D la variété différentiable $\mathbb{R} \times \Sigma / \sim$ où la relation d'équivalence $\sim$ est définie par $(x, y, z) \sim (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Leftrightarrow y = \bar{y},\ z = \bar{z}$, et $(x - \bar{x})/2L \in \mathbb{Z}$, munie de la métrique plate induite par $\mathbb{R}^3$. Considérons l'espace $J.(D)=\{U\in\mathscr{C}_0^\infty(D)^3 \mid \nabla\cdot U=0\}$, et ses adhérences dans $L_2(D)^3$ et dans $H^1(D)^3$, qui seront notées $J_0(D)$ et $H(D)$, respectivement. Considérons aussi l'espace $G(D)=\{\nabla p \mid p\in H^1(D)\}$. On a la décomposition orthogonale suivante :

$$L_2(D)^3=J_0(D)\oplus G(D).$$

Ce résultat, essentiellement dû à de Rham ([1], p. 117), est bien connu dans le cas où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais il est aussi valable dans notre cas.

Nous nous sommes permis dans ce qui suit de travailler sans distinction sur D ou sur $[-L, L]\times\Sigma$ comme s'il s'agissait d'une carte globale. Alors, sur les fonctions définies sur D on peut définir une involution s par l'expression $sf(x, y, z)=f(-x, y, z)$, qui peut s'étendre aux distributions de façon naturelle. Sur les champs de vecteurs $U=(u, v, w)$ définis sur D nous définissons maintenant l'involution S par l'expression $SU=(-su, sv, sw)$, et nous avons alors $\nabla sf=S\,\nabla f$ et $\nabla\cdot SU=s\nabla\cdot U$.

Nous nous intéressons à des espaces de champs de vecteurs sur D antisymétriques par rapport à S ($SU=-U$), que nous noterons par un indice a. Ainsi, par exemple, on déduit du théorème de de Rham énoncé ci-dessus la décomposition orthogonale :

$$(L_2(D)^3)_a=J_0(D)_a\oplus G(D)_a. \tag{2.1}$$

Soit maintenant Π_a la projection orthogonale sur le premier facteur dans (2.1), et considérons l'opérateur $A_a=\Pi_a\circ\Delta$ comme un opérateur de $J_0(D)_a$ avec domaine $H^2(D)^3\cap H(D)_a$. Compte tenu de la symétrie et des résultats connus sur l'opérateur de Stokes avec des conditions de Dirichlet pour la vitesse au bord ([2], [3]) il n'est pas difficile de voir qu'il est à domaine dense, fermé, autoadjoint et strictement négatif. Pour voir qu'il est surjectif et fermé, ce qui est le plus difficile, on voit qu'il a un inverse continu en prouvant l'existence et l'unicité d'une solution faible des équations de Stokes et en prouvant leur régularité comme dans [2], mais, puisque D n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il faut travailler avec une partition de l'unité.

Maintenant on veut identifier $J_0(\Omega;\partial_1)$ avec $J_0(D)_a$ et aussi $G(\Omega;\partial_2)$ avec $G(D)_a$ par l'application E définie par $E(U)(x, y, z)=U(x, y, z)$ si $x>0$, et $SE(U)=-E(U)$. On voit que E est une isométrie (à un facteur constant 2, près). On vérifie l'identification sans beaucoup de travail en utilisant la caractérisation de l'espace $J_0(D)$ faite dans [2]. Alors le théorème 1 découle de (2.1).

Pour prouver le théorème 2 on veut voir que E identifie $H(\Omega;\partial_1)$ avec $H^2(D)^3\cap H(D)_a$. On vérifie sans peine que $E(U)\in H^2(D)^3$ si $U\in J_b(\Omega;\partial_1)$, malgré que $E(U)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}^2(D)^3$ mais à $\mathscr{C}^1(D)^3$, et aussi que $E(U)\in H(D)$, si on prouve auparavant que sur D on n'a pas le phénomène de Heywood, mais que $H(D)\supset\{U\in H_0^1(D)^3 \mid \nabla\cdot U=0\}$. Ainsi on a que $E(H(\Omega;\partial_1))\subset H^2(D)^3\cap H(D)_a$. Voir que E est surjective c'est facile si on sait que $\{U\in\mathscr{C}^2(\bar{D}) \mid \nabla\cdot U=0,\ U=0 \text{ sur } \partial D\}$ est dense dans $H^2(D)^3\cap H(D)$ avec la norme de $H^2(D)^3$, et cela peut se prouver en utilisant les propriétés de régularité de l'opérateur de Stokes sur D. Avec cela on voit que $A_a\circ E=E\circ A$, et le théorème 2 découle de ce qu'on a dit sur A_a.

3. Le problème à valeur initiale. — En utilisant les théorèmes 1 et 2 ci-dessus on peut maintenant écrire le problème (1.6)-(1.11) comme un problème semi-linéaire d'évolution dans l'espace de Hilbert $J_0(\Omega;\partial_1)$, d'une façon analogue à ce qui a été fait dans [4] pour les équations de Navier-Stokes avec les conditions au bord classiques seulement pour la vitesse. On trouve des points de vue semblables, mais avec de petites différences, dans [3] et [5], et dans le travail [6], qui est à l'origine de cette formulation.

Si on applique la projection Π de $L_2(\Omega)^3$ dans $J_0(\Omega; \partial_1)$ à l'équation (1.6), compte tenu de (1.7)-(1.10), on peut formuler (1.6)-(1.11) comme :

$$\frac{d}{dt} U = A\, U + F(t, U), \tag{3.1}$$

$$U(t_0) = U_0, \tag{3.2}$$

où $F(t, U) = \Pi[-(V_b \cdot \nabla) U - (U \cdot \nabla) V_b - (U \cdot \nabla) U + H(t)]$.

Soit maintenant I un intervalle de temps ouvert où $V_b(t)$ et $p_b(t)$ sont définies et avec $t_0 \in I$. Supposons que $V_b(t)$ soit $\mathscr{C}^{1+\theta}$ par rapport à t dans $H^2(\Omega)^3$ pour quelque $\theta > 0$, que $p_b(t)$ soit Hölder continue par rapport à t dans $H^1(\Omega)$ et que $G(t)$ soit Hölder continue par rapport à t dans $L_2(\Omega)^3$. Alors, à cause du théorème 2, A est le générateur d'un semi-groupe analytique dans $J_0(\Omega; \partial_1)$, et on peut aussi définir les puissances fractionnaires A^α et leurs domaines $D(A^\alpha)$. Suivant [4], p. 81, on voit que si on choisit α avec $3/4 < \alpha < 1$, et on pose $B = I \times D(A^\alpha)$, alors on voit que $F : B \to J_0(\Omega; \partial_1)$ est localement Hölder par rapport à t et localement Lipschitz par rapport à U. On obtient :

THÉORÈME 3. — *Étant donnés* t_0 *et* U_0 *tels que* $(t_0, U_0) \in B$, *il existe un* $T > t_0$ *et une unique solution de* (3.1) $U(t; t_0, U_0)$ *définie pour* $t_0 \leq t < T$, *vérifiant* (3.2). *Pour* $t \geqq t_0$ *fixe, l'application* $(t_0, U_0) \to U(t; t_0, U_0)$ *est continue de* B *dans* $D(A^\alpha)$, *là où elle est définie. Si dans son domaine de définition* F *est de classe* $\mathscr{C}^r$ *où analytique, alors il en est de même pour* $U(t; t_0, U_0)$ *par rapport à ses trois arguments à l'intérieur de son domaine de définition.*

4. REMARQUES FINALES. — (*a*) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ non nécessairement tubulaire, et si on divise le bord de Ω en deux parties ∂_1 et ∂_2, il semble raisonnable de croire qu'on peut avoir un problème bien posé pour les équations de Navier-Stokes avec des conditions au bord du type (1.3) sur ∂_1 et du type (1.4), (1.5) sur ∂_2. Mais il semble raisonnable aussi de croire qu'on aura besoin de quelques précisions techniques dépendant des angles entre ∂_1 et ∂_2. Nous ne sommes pas capable de donner ces résultats à présent.

(*b*) Tout ce qu'on a fait pour $\Omega = (0, L) \times \Sigma$ peut se faire aussi sans peine pour $\Omega = (0, L) \times (-1, 1)$, où alors Ω représente un canal fini dans $\mathbb{R}^2$.

(*c*) Les conditions (1.8) et (1.10) pour U, au contraire des conditions usuelles, n'entraînent pas en général que l'intégrale $\int_\Omega U \cdot (U \cdot \nabla) U$ soit nulle. A cause de cela il ne semble pas facile de prolonger pour $t \to \infty$ les solutions de (1.6)-(1.11), même en dimension deux, ni l'extension des théorèmes de Leray d'existence de solutions stationnaires, ni la possibilité d'avoir des critères de stabilité globale dans le sens de [7].

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. DE RHAM, *Variétés Différentiables*, Hermann, Paris, 1960.
[2] R. TEMAN, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam-N.Y.-Ox., 1977.
[3] G. IOOSS, *Bifurcation et Stabilité*, U.E.R. Mathématique, Université de Paris-XI, 1973, *Lect. Notes*, n° 31.
[4] D. HENRY, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin-H.-N.Y., 1981, *L.N.M.*, n° 840.
[5] X. MORA, Sistemes dinàmics determinats per equacions diferencials semilineals sobre espais de Banach, *Tesi Doctoral*, Univ. Autònoma de Barcelona, 1982.
[6] H. FUJITA et T. KATO, On the Navier-Stokes Initial Value Problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16, 1964, p. 269-315.
[7] J. SERRIN, On the Stability of Viscous Fluid Motions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3, 1959, p. 1-13.

Secció de Matemàtiques, Fac. de Ciències,
Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona, Espagne.