Resolucions de problemes, anàlisi complexa

10 de febrer de 2021

1 El pla complex

1. Passeu de forma rectangular a exponencial o viceversa, i representeu en el pla complex:

   i) $3 - 3i$.

   ii) $-2 - 4i$.

   iii) -8.

   iv) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   v) $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

   vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

   Resolució:

   Per passar de forma rectangular a exponencial hem de calcular el mòdul i l'argument del nombre complex

   i) $z = 3 - 3i$, aleshores:
   $$|z| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \tan\theta = -1$$
   Com $\Re z > 0$ i $\Im z < 0$, el nombre pertany al quart quadrant, per tant $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ i tenim que $z = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

   ii) $z = -2 - 4i$, aleshores:
   $$|z| = \sqrt{20} = 5\sqrt{2}, \quad \tan\theta = 2$$
   Com $\Re z < 0$ i $\Im z < 0$, el nombre pertany al tercer quadrant per tant $\theta = \arctan 2 + \pi$ i tenim que $z = 5\sqrt{2}e^{(\arctan 2+\pi)i}$.

   iii) $z = -8$, aleshores:
   $$|z| = \sqrt{64} = |-8| = 8, \quad \tan\theta = 0$$
   Com $\Re z < 0$ i $\Im z = 0$, el nombre és real negatiu, per tant $\theta = \arctan 0 + \pi = \pi$ i tenim que $z = 8e^{\pi i}$.

   Per passar de forma exponencial a rectangular només cal usar que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ i operar:

   iv) $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, aleshores:
   $$z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

v) $z = e^{\frac{4\pi}{3}i}$, aleshores:

$$z = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

vi) $z = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{5\pi}{6}i}$, aleshores:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{5\pi}{6}i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

2. Calculeu els següents nombres complexes en forma exponencial:

(a) $\frac{-4}{1+i}$.

(b) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.

(d) $i^{37}\overline{\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{7}}}{-3+3i}\right)}$.

(e) $\frac{1+i}{1-i}$.

(f) $(2+2i)^8$.

Resolució:

i) $z = \frac{-4}{1+i}$, aleshores:

$$z = \frac{-4(1-i)}{2} = -2+2i, \quad |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \tan\theta = -1$$

Com $\Re z < 0$ i $\Im z > 0$, el nombre és al quart quadrant, per tant $\theta = \arctan -1 + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ i tenim que $z = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

ii) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = w^3$, aleshores:

$$|w| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \tan\theta = \sqrt{3}$$

Com $\Re w > 0$ i $\Im w > 0$, el nombre és al primer quadrant, per tant $\theta = \arctan\sqrt{3}\frac{\pi}{3}$ i tenim que $w = e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Com $z = w^3 = |w|^3e^{3\theta i} = e^{\pi i}$

iii) $z = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$, aleshores:

$$z = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{4}, \quad |z| = \frac{1}{2}, \quad \tan\theta = -1$$

Com $\Re z > 0$ i $\Im z < 0$, el nombre és al quart quadrant, per tant $\theta = \arctan -1 = -\frac{\pi}{4}$ i tenim que $z = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

iv) $z = i^{37}\overline{\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{7}}}{-3+3i}\right)}$ Tenim que:

$$i^{37} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{37} = e^{i\frac{37\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -3+3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Per tant:

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}}\overline{\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{7}}}{3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}\overline{\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{7}-\frac{3\pi}{4})}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{7}+\frac{3\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(\pi+\frac{3\pi}{28})}$$

v) $z = \frac{1+i}{1-i}$, aleshores:

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

vi) $z = (2+2i)^8 = w^8$, aleshores:

$$|w| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \tan\theta = 1$$

Com $\Re w > 0$ i $\Im w > 0$, el nombre és al primer quadrant per tant $\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ i tenim que $w = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.
Aleshores $z = w^8 = 2^8 2^4 e^{2\pi i} = 2^{12}$

3. Trobeu les arrels complexes que s'indiquen:

i) Les arrels cúbiques de 1.
(ii) Les arrels quadrades de i.
iii) $(3\sqrt{3} - 27i)^{\frac{1}{5}}$.
iv) $(-64)^{\frac{1}{6}}$.

Resolució:

i) $1^{\frac{1}{3}}$, aleshores:

$$1 = 1e^{0i} = e^{2\pi k i}, \quad 1^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{2\pi k}{3}i} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}, \ k = 0,1,2$$

Per tant tenim tres arrels cúbiques de la unitat:

$$z_1 = e^{0i} = 1, \ z_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \ z_3 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ii) $i^{\frac{1}{2}}$, aleshores:

$$i = 1e^{\frac{\pi}{2}i}, \quad i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}i} == e^{(\frac{\pi}{4}+\pi k)i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right), \ k = 0,1$$

Per tant tenim dues arrels quadrades de i:

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \ z_2 = e^{(\frac{\pi}{4}+\pi)i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

iii) Per calcular $(3\sqrt{3}-27i)^{\frac{1}{5}}$, calculem primer la forma exponencial de $z=3\sqrt{3}-27i$:

$$|z|=\sqrt{27\cdot 28}=6\sqrt{21},\ \tan\theta=-3\sqrt{3}$$

com z és al segon quadrant $\theta=\arctan(-3\sqrt{3})$. Aleshores les 5 solucions seran:

$$z_k=(6\sqrt{21})^{\frac{1}{5}}e^{\frac{\theta+2k\pi}{5}i}, \qquad k=0,1,2,3,4.$$

iv) $(-64)^{\frac{1}{6}}=(64e^{i\pi})^{\frac{1}{6}}$, que té les solucions $z_k=2e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}i}=2\left(\cos(\frac{(2k+1)\pi}{6})+i\sin(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)$:

$$z_0=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right),\ \ z_1=2i,\ \ z_2=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right),$$
$$z_3=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-z_0,\ \ z_4=-2i=-z_1,\ \ z_5=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-z_2$$

4. Calculeu:

i) $\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$.

ii) $\sqrt[4]{-1}$.

iii) $\sqrt[4]{i}$.

Resolució:

i) $\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$, aleshores, si $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, tenim que:

$$|z|=1,\ \tan\theta=-\sqrt{3},\quad \theta=-\frac{\pi}{3}$$

per tant, si $k=0,1$:

$$\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}=1e^{i\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}}=\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right).$$

És a dir:

$$z_0=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, \qquad z_1=e^{i(-\frac{\pi}{6}+\pi)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=-z_0$$

ii) $(-1)^{\frac{1}{4}}=(1e^{i\pi})^{\frac{1}{4}}=1e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}$, amb $k=0,1,2,3$. Per tant:

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ z_1=e^{i\frac{\pi+2\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$z_2=e^{i\frac{\pi+4\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-z_0,\ \ z_3=e^{i\frac{\pi+6\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-z_1,$$

iii) $i^{\frac{1}{4}}=(1e^{i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{4}}=1e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}$ amb $k=0,1,2,3$.

Per tant, anomenant $a = \cos\frac{\pi}{8}$, i $b = i\sin\frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = a + bi, \\
z_1 &= e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})} = \cos(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}) = -b + ia, \\
z_2 &= e^{i(\frac{\pi}{8}+\pi)} = \cos(\frac{\pi}{8}+\pi) + i\sin(\frac{\pi}{8}+\pi) = -a - ib = -z_0, \\
z_3 &= e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2})} = \cos(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}) = b - ia = -z_1,
\end{aligned}$$

7. Descriviu els conjunts

   i) $|z+i| < 5$.
   ii) $|2i - z| = |z + 1 + 3i|$.
   iii) $2 > \Re z > -3$.
   iv) $\Re[(3-4i)z] > 0$.
   v) $|z + 2 - i| = 3$.
   vi) $|(1+i)z - 4| = 2$.
   vii) $\Re\left(\frac{z-i}{1-i}\right) > 1$.

   Resolució:

   i) $|z+i| < 5$ és un cercle centrat al punt $z = -i$, que es pot identificar amb el punt $(0, -1)$ de $\mathbb{R}^2$, ja que la distància entre dos complexos $z_k = a_k + ib_k$, $k = 1, 2$ ve donada per:

   $$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2 = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

   Si usem coordenades $z = x + iy$ obtenim

   $$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} < 5$$

   ii) La condició $|2i - z| = |z+1+3i|$ és equivalent a $d(2i, z) = d(z, -1-3i)$. Identificant $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{R}^2$ aquesta és l'equació dels punts que equidisten de dos punts donats $z_1 = 2i$, $z_2 = -1-3i$, que és la recta mediatriu. Observem que en cartesianes:

   $$\begin{aligned}
   |2i - z|^2 &= x^2 + (2-y)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4, \\
   |z + 1 + 3i|^2 &= (x+1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10
   \end{aligned}$$

   Aleshores $|2i - z| = |z + 1 + 3i|$ és equivalent a:

   $$2x + 10y + 6 = 0. \tag{1.1}$$

   Per altra banda la mediatriu és la recta que passa pel punt mig $p = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ i és ortogonal a la recta que uneix z_1 i z_2. Per tant el seu vector director será, per exemple: $v = (5, -1)$. Si calculem aquesta recta:

   $$\frac{x + \frac{1}{2}}{5} = \frac{y + \frac{1}{2}}{-1}$$

   obtenint la mateixa recta (1.1).

iii) $2 > \operatorname{Re} z > -3$ és una banda vertical. Si usem $z = x+iy$ el conjunt a $\mathbb{R}^2$ esdevé $2 > x > -3$.

iv) $\operatorname{Re}((3-4i)z) > 0$, si $z = x+iy$:

$$\operatorname{Re}((3-4i)z) = \operatorname{Re}((3-4i)(x+iy)) = 3x+4y > 0,$$

que és un semipla.

De fet si anomenem $z_1 = 3-4i = re^{i\theta}$, el conjunt

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}(zz_1) > 0\} &= \{z = se^{i\alpha}, \operatorname{Re}(rse^{i(\alpha+\theta)}) > 0\} = \{z = se^{i\alpha},\ \cos(\alpha+\theta) > 0\} \\ &= \left\{z = se^{i\alpha}, -\theta - \frac{\pi}{2} < \alpha < -\theta + \frac{\pi}{2}\right\}\end{aligned}$$

que és un semipla centrat a la direcció $-\theta$ (és un semipla que conté el punt $\bar{z}_1$).

v) Observem que

$$\{z \in \mathbb{C}, |z+2-i| = 3\} = \{z \in \mathbb{C}, d(z, -2+i) = 3\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9\},$$

que és el cercle de radi 3 i centre $z = -2+i \equiv (-2,1)$.

vi) Anàlogament al cas anterior,

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C}, |(1+i)z - 4| = 2\} &= \left\{z \in \mathbb{C}, \left|z - \frac{4}{1+i}\right| |1+i| = 2\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}, \left|z - \frac{4}{1+i}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}}\right\} \\ &= \left\{z \in \mathbb{C}, \left|z - \frac{4(1-i)}{2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}, |z - 2(1-i)| = \sqrt{2}\right\}\end{aligned}$$

que és el cercle de radi $\sqrt{2}$ i centre $z = 2(1-i)$.

vii En aquest cas tenim que:

$$\begin{aligned}\left\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\frac{z-i}{1-i} > 1\right\} &= \left\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\frac{(z-i)(1+i)}{2} > 1\right\} \\ &= \{z = x+iy \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}(x+i(y-1))(1+i) > 2\} \\ &= \{z = x+yi \in \mathbb{C},\ x-y+1 > 2\} \\ &= \{z = x+yi \in \mathbb{C},\ x-y-1 > 0\},\end{aligned}$$

que és un semipla.

8. Proveu:

   i) Si $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $|b| < 1 \implies \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{b}a}\right| < 1$.

   ii) Si $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $|b| = 1 \implies \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{b}a}\right| = 1$.

Resolució:

i) Observem que la desigualtat que ens demanen és equivalent a provar que $|a-b| < |1-\bar{b}a|$. Tenim que:

$$\begin{aligned}&|a-b| < |1-\bar{b}a| \iff (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) < (1-\bar{b}a)(1-b\bar{a}) \\ &\iff |a|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b + |b|^2 < 1 + |b|^2|a|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b \iff |a|^2 + |b|^2 - 1 - |b|^2|a|^2 < 0 \\ &\iff (|a|^2 - 1)(1 - |b|^2) < 0\end{aligned}$$

i la darrera desigualtat és certa si $|a| < 1$ i $|b| < 1$.

ii) Per provar la segona propietat només cal observar que si $|b| = 1$ la darrera desigualtat és una igualtat. Com totes eren equivalents tenim que, en el cas que $|b| = 1$, es verifica la igualtat en totes elles.

Observació: Si $|a| < 1$ i $|\bar{b}| \leq 1$, $|\bar{b}a| < |\bar{b}| \leq 1$. Per tant, $|\bar{b}a| < 1$ i $1 - \bar{b}a \neq 0$.

9. Siguin $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$. Demostreu que són els vèrtexs d'un triangle equilàter sí, i només sí, $(a_1 \neq a_2 \neq a_3)$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$$

Resolució: Observem que:
$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 &\iff a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_2a_3 - a_1a_3 = 0 \\ &\iff 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 - 2a_1a_2 - 2a_2a_3 - 2a_1a_3 = 0 \\ &\iff (a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2 = 0 \\ &\iff 1 + \left(\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1}\right)^2 + \left(\frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

A la darrera operació hem dividit per $(a_2 - a_1)^2 \neq 0$.
Anomenem $x = \frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}$. Tenim que $\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1} = x - 1$ i per tant x satisfà l'equació de segon grau:
$$1 + x^2 + (x-1)^2 = 0 \iff x^2 - x + 1 = 0$$
que té les solucions $x_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ i $x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{\pi}{3}i} = 1 - x_1$. Tenim dons dues opcions:
$$\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = x_1 \qquad \text{o} \qquad \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = x_2.$$

- En el primer cas $\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1} = x_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}$ i, com $|x_1| = 1$, tenim que $|a_3 - a_1| = |a_2 - a_1|$. Per altra banda, $\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1} = x_1 - 1 = -x_2$. Així, com $|x_2| = 1$, tenim que $|a_3 - a_2| = |a_2 - a_1|$ i podem concloure que $|a_3 - a_1| = |a_2 - a_1| = |a_3 - a_2|$. En conclusió a_1, a_2, a_3 formen un triangle equilàter.
- El cas $\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1} = x_2 = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ és anàleg a l'anterior.

Observem que podem concloure el mateix observant que si $\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1} = x_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}$, els complexos $w = a_3 - a_1$, i $z = a_2 - a_1$ tenen el mateix mòdul i els seus arguments differeixen en $\frac{\pi}{3}$, és a dir, pensant w i z com vectors de $\mathbb{R}^2$, w i z són dos vectors del mateix mòdul que formen un angle de $\frac{\pi}{3}$ i per tant els punts a_1, a_2 i a_3 formen un triangle equilàter.

11. Si ω és un generador de les arrels n-èsimes de la unitat ($\omega^n = 1$ i $\omega^m \neq 1$ si $m < n$),
$$1 + \omega^h + \omega^{2h} + \cdots + \omega^{(n-1)h} = 0,$$
sent $h \in \mathbb{Z}$, $h \neq \dot{n}$.

Resolució: Tenim que w satisfà:
$$w^n = 1, \quad w^m \neq 1, \text{ si } m < n$$
La observació important és la descomposició polinomial:
$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \tag{1.2}$$
Prenem ara $h \in \mathbb{Z}$, tal que $h \neq \dot{n}$. Aleshores:

- Si $h > n$, sabem que $h = p\,n + q$ amb $0 < q < n$ i per tant:

$$w^h = w^{np+q} = w^{np}w^q = (w^n)^p w^q = w^q.$$

Es doncs suficient provar-ho per valors de $h < n$.

- Suposem doncs que $h < n$. Com per hipòtesi $w^n = 1$, tenim que $(w^h)^n = w^{nh} = (w^n)^h = 1$ per tant, usant la descomposició (1.2):

$$0 = 1 - (w^h)^n = (1 - w^h)(1 + w^h + (w^h)^2 + \cdots + (w^h)^{n-1}).$$

Sabem també per hipòtesi que, com $h < n$, $w^h \neq 1$ i per tant es verifica:

$$1 + w^h + (w^h)^2 + \cdots + (w^h)^{n-1} = 0$$

com volíem demostrar.

12. Per a quins valors de a, b i c, $az + b\bar{z} + c = 0$ és una recta?

Resolució: L'equació que considerem és:

$$az + b\bar{z} + c = 0.$$

De fet, aquest problema està relacionat amb el problema 10, on es demana quan aquesta equació defineix un únic punt. Si conjuguem l'equació tenim:

$$\bar{a}\bar{z} + \bar{b}z + \bar{c} = 0.$$

Considerem el sistema de les dues equacions:

$$\begin{aligned} az + b\bar{z} + c &= 0 \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} + \bar{c} &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Resolent aquest sistema, obtenim

$$z = \frac{-c\bar{a} + b\bar{c}}{|a|^2 - |b|^2},$$

i la corresponent solució per $\bar{z}$ coherentment. Per tant l'equació (i el sistema (1.3)) defineix un únic punt si i només si $|a|^2 \neq |b|^2$.

Així una condició necessària per tal que l'equació $az + b\bar{z} + c = 0$ defineixi una recta és que $|a|^2 = |b|^2$. En aquest cas ($|a|^2 = |b|^2$) escrivim l'equació $az + b\bar{z} + c = 0$ en cartesianes, és a dir, separant la part real i imaginària dels nombres complexos implicats. Per aquest motiu escrivim $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ i $z = x + iy$. Llavors l'equació $az + b\bar{z} + c = 0$ és

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + c_1 &= 0 \\ (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y + c_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

És fàcil veure que

$$\begin{vmatrix} (a_1 + b_1) & (-a_2 + b_2) \\ (a_2 + b_2) & (a_1 - b_1) \end{vmatrix} = |a|^2 - |b|^2 = 0$$

i per tant sabem que existirà $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(a_1 + b_1) = \lambda(a_2 + b_2), \qquad (-a_2 + b_2) = \lambda(a_1 - b_1)$$

Aleshores tenim dues possibilitats:

- si $c_1 = \lambda c_2$ les dues equacions són equivalents i defineixen la mateixa recta.
- Si $c_1 \neq \lambda c_2$ aleshores el sistema (1.4) és incompatible i no defineix cap solució.

Observació: Les condicions $(a_1 + b_1) = \lambda(a_2 + b_2)$, $(-a_2 + b_2) = \lambda(a_1 - b_1)$ i $c_1 = \lambda c_2$ són equivalents a $b\bar{c} - c\bar{a} = 0$.

14. Resoleu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (1+i)x - 2y = 4i \\ -x + (2+i)y = 0 \end{cases}$$

Solució: $x = \frac{14+2i}{5}$, $y = \frac{6-2i}{5}$

15. Utilitzant la forma exponencial d'un nombre complex, expresseu les funcions trigonomètriques $\cos(\theta_1 \pm \theta_2)$, $\sin(\theta_1 \pm \theta_2)$, $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ en termes de $\cos\theta$, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\sin\theta$, $\sin\theta_1$, $\sin\theta_2$.

Resolució:

- Observem que
$$e^{i(\theta_1 \pm \theta_2)} = \cos(\theta_1 \pm \theta_2) + i\sin(\theta_1 \pm \theta_2).$$

  Per altra banda:
$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1 \pm \theta_2)} &= e^{i\theta_1} e^{\pm i\theta_2} = (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\pm\theta_2) + i\sin(\pm\theta_2)) \\ &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) \pm i\sin(\theta_2)). \end{aligned}$$

  Llavors, de la identitat
$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) + i\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) \pm i\sin(\theta_2)),$$

  igualant part real i imaginària, tenim que:
$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \mp \sin(\theta_1)\sin(\theta_2), \qquad \sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \pm \cos(\theta_1)\sin(\theta_2).$$

- Observem ara que
$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

  i que
$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n.$$

  Usem ara la fórmula
$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} i^k (\sin\theta)^k \\ &= \sum_{l=0}^{[n/2]} \binom{n}{2l} (\cos\theta)^{n-2l} (-1)^l (\sin\theta)^{2l} \\ &\quad + i \sum_{l=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2l+1} (\cos\theta)^{n-2l-1} (-1)^l (\sin\theta)^{2l+1}. \end{aligned}$$

Per tant, igualant part real i imaginaria a les dues expresions per $e^{in\theta}$:

$$\cos(n\theta) = \sum_{l=0}^{[n/2]} \binom{n}{2l} (-1)^l (\cos\theta)^{n-2l} (\sin\theta)^{2l}$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{l=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2l+1} (-1)^l (\cos\theta)^{n-2l-1} (\sin\theta)^{2l+1}.$$

17. Proveu la identitat de Lagrange: siguin $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Aleshores es compleix

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - \sum_{1\le i<j\le n} |a_i\bar{b}_j - a_j\bar{b}_i|^2.$$

Resolució:

Comencem a desenvolupar per l'esquerra:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j \bar{b}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_i \bar{a}_j \bar{b}_j = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 |b_i|^2 + \sum_{i,j=1,j\neq i}^{n} a_i b_i \bar{a}_j \bar{b}_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) - \sum_{i,j=1,j\neq i}^{n} |a_i|^2|b_j|^2 + \sum_{i,j=1,j\neq i}^{n} a_i b_i \bar{a}_j \bar{b}_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) - \sum_{i,j=1,j\neq i}^{n} \left(|a_i|^2|b_j|^2 - a_i b_i \bar{a}_j \bar{b}_j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n} \left\{\left(|a_i|^2|b_j|^2 - a_i b_i \bar{a}_j \bar{b}_j\right) + \left(|a_j|^2|b_i|^2 - a_j b_j \bar{a}_i \bar{b}_i\right)\right\}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n} \left(a_i\bar{b}_j - a_j\bar{b}_i\right)\left(\bar{a}_i b_j - \bar{a}_j b_i\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n} \left|a_i\bar{b}_j - a_j\bar{b}_i\right|^2.$$

18. **Projecció estereogràfica i l'esfera de Riemann.**

Sigui $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $N = (0, 0, 1)$ (*pol nord*) i identifiquem el pla $x_3 = 0$ amb $\mathbb{C}$. Considerem l'aplicació $\phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ (que anomenem *projecció estereogràfica*) tal que per cada punt $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $\phi(P)$ és el nombre complex obtingut de tallar la recta definida pels punts N i P amb el pla $x_3 = 0$.

Prescrivint que la imatge de N sigui ∞, la projecció estereogràfica estén a una aplicació $\phi : \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que continuarem denotant ϕ. En aquest context, a $\mathbb{S}^2$ se l'anomena *esfera de Riemann*.

i) Trobeu les expressions en coordenades de ϕ^{-1} i de ϕ.

ii) Demostreu que els cercles que passen per N són en correspondència bijectiva amb les rectes de $\mathbb{C}$.

iii) Demostreu que els cercles que no passen per N són en correspondència bijectiva amb els cercles de $\mathbb{C}$.

iv) Si definim la distància entre dos punts de $\overline{\mathbb{C}}$ com la distància entre les seves corresponents antiimatges en $\mathbb{S}^2$, trobeu $d(z_1, z_2)$ si $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$, i $d(z, \infty)$, si $z \in \mathbb{C}$.

v) Demostreu que si z_1 i z_2 es corresponen a punts diametralment oposats en $\mathbb{S}^2$ segons ϕ^{-1}, aleshores $z_1\bar{z}_2 = -1$.

Resolució:

i) Donat $P = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$, per calcular $z = x + iy = \phi(P)$ considerem la recta r que passa per P i per $N = (0, 0, 1)$:

$$\frac{x_1}{x_1^0} = \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{x_3 - 1}{x_3^0 - 1}$$

i calculem el punt intersecció $r \cap \{x_3 = 0\}$ obtenint

$$x_1 = \frac{x_1^0}{1 - x_3^0}, \qquad x_2 = \frac{x_2^0}{1 - x_3^0}, \;\Rightarrow\; z = x + iy = \phi(P) = \frac{x_1^0 + ix_2^0}{1 - x_3^0} = \frac{x_1^0}{1 - x_3^0} + i\frac{x_2^0}{1 - x_3^0}.$$

Notem que, usant que $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + (x_3^0)^2 = 1$, tenim:

$$|z|^2 = \frac{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}{(1 - x_3^0)^2} = \frac{1 - (x_3^0)^2}{(1 - x_3^0)^2} = \frac{1 + x_3^0}{1 - x_3^0}.$$

Per tant

- Si $x_3 = 0 \Rightarrow |z| = 1$ i de fet, tots els punts de l'equadors són punts fixos de ϕ, és a dir, $\phi(P) = P$ si $P = (x_1^0, x_2^0, 0)$.
- Si $x_3^0 > 0 \Rightarrow |z| > 1$, per tant la semiesfera superior s'envia als complexos de mòdul més gran que 1 (exteriors al cercle de radi 1).
- Si $x_3^0 < 0 \Rightarrow |z| < 1$, per tant la semiesfera inferior s'envia als complexos de mòdul menor que 1 (interiors al cercle de radi 1).

Calculem ara ϕ^{-1}. Prenem un punt $z = x_1^0 + ix_2^0$ i per calcular $P = \phi^{-1}(z)$, considerem la recta r que passa per $(x_1^0, x_2^0, 0)$ i per $N = (0, 0, 1)$:

$$\frac{x_1}{x_1^0} = \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{x_3 - 1}{-1} \iff x_1 = (1 - x_3)x_1^0, \qquad x_2 = (1 - x_3)x_2^0$$

i calculem el punt intersecció $r \cap \mathbb{S}^2$ obtenint

$$\begin{aligned}
&1 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = (1 - x_3)^2[(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2] + (x_3)^2 \\
&\Rightarrow (1 - x_3)^2[(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2] = 1 - (x_3)^2 \Rightarrow (1 - x_3)|z|^2 = 1 + x_3 \\
&\Rightarrow x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}, \qquad 1 - x_3 = \frac{2}{1 + |z|^2}.
\end{aligned}$$

Per tant
$$P=\phi^{-1}(z)=\left(\frac{2x_1^0}{1+|z|^2},\frac{2x_2^0}{1+|z|^2},\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right).$$
Es fàcil comprovar que $P\in\mathbb{S}^2$, ja que:
$$\frac{4(x_1^0)^2+4(x_2^0)^2+(|z|^2-1)^2}{(1+|z|^2)^2}=\frac{4|z|^2+(|z|^2-1)^2}{(1+|z|^2)^2}=\frac{(|z|^2+1)^2}{(1+|z|^2)^2}=1$$
Observem que si $|z|>1$ la tercera coordenada del punt P és positiva i si $|z|<1$ la tercera coordenada del punt P és negativa. Tanmateix si $|z|=1$, la tercera component de P és 0.

iii) Farem primer aquest cas ja que el ii) és un cas particular dels càlculs que farem aquí. El cercles a $\mathbb{S}^2$ s'obtenen tallllant un pla π amb $\mathbb{S}^2$:
$$\pi\cap\mathbb{S}^2=\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=d\\(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=1.\end{cases}$$
Observem que si $N\in\pi$ aleshores $c=d$.
Si prenem $P\in\pi\cap\mathbb{S}^2$, $P=\phi^{-1}(z)$ on $z=x_1^0+ix_2^0$, i per tant
$$P=\left(\frac{2x_1^0}{1+|z|^2},\frac{2x_2^0}{1+|z|^2},\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right).$$
Imposem a més que $P\in\pi$:
$$\begin{aligned}&a\frac{2x_1^0}{1+|z|^2}+b\frac{2x_2^0}{1+|z|^2}+c\frac{(|z|^2-1)}{1+|z|^2}=d\Rightarrow 2ax_1^0+2bx_2^0+c|z|^2-c=d+d|z|^2\\&\Rightarrow((x_1^0)^2+(x_2^0)^2)(c-d)+2ax_1^0+2bx_2^0-c-d=0.\end{aligned}\tag{1.5}$$
Si el pla π no passa per N tenim que $c-d\neq 0$ i, dividint l'equació per $c-d$, obtenim
$$(x_1^0)^2+(x_2^0)^2+\frac{2a}{c-d}x_1^0+\frac{2b}{c-d}x_2^0-\frac{c+d}{c-d}=0$$
que és l'equació d'una circunferència de centre $(\frac{a}{c-d},\frac{b}{c-d})$ i radi $r^2=\frac{a^2}{(c-d)^2}+\frac{b^2}{(c-d)^2}+\frac{c+d}{c-d}$.
Per tal que aquesta circumferència no sigui buida cal la condició: $\frac{a^2}{(c-d)^2}+\frac{b^2}{(c-d)^2}+\frac{c+d}{c-d}>0$, és a dir $a^2+b^2+c^2-d^2>0$.
Fixem-nos que aquesta condició és la condició que garanteix que la intersecció de la que hem partit no sigui buida, ja que el pla π tallarà a $\mathbb{S}^2$ si i només si la distància del pla a l'origen és menor que 1, és a dir:
$$\mathrm{dist}^2(0,\pi)=\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}<1$$
Per tant hem vist que els cercles a $\mathbb{S}^2$ que no passen pel pol nord és transformen per la projecció estereogràfica en cercles de $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}^2$).

ii) Veiem ara que passa si el cercle, i per tant el pla π, passa pel pol nord N. En aquest cas $c=d$ per tant l'equació (1.5) esdevé:
$$2ax_1^0+2bx_2^0-c-d=0$$
que és l'equació d'una recta.

iv) Prenem $z = x_1 + ix_2$, $z' = x_1' + ix_2' \in \mathbb{C}$, dos nombres complexos i $P = \phi^{-1}(z)$, $P' = \phi^{-1}(z')$. Reccordem que

$$P = \left(\frac{2x_1}{1+|z|^2}, \frac{2x_2}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{S}^2$$
$$P' = \left(\frac{2x_1'}{1+|z'|^2}, \frac{2x_2'}{1+|z'|^2}, \frac{|z'|^2-1}{1+|z'|^2} \right) = ((x_1^0)', (x_2^0)', (x_3^0)') \in \mathbb{S}^2$$

Calculem

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2(P,P') &= (x_1^0 - (x_1^0)')^2 + (x_2^0 - (x_2^0)')^2 + (x_3^0 - (x_3^0)')^2 \\
&= 2 - 2x_1^0(x_1^0)' - 2x_2^0(x_2^0)' - 2x_3^0(x_3^0)' \\
&= 2 - \frac{2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} \big(4x_1x_1' + 4x_2x_2' + (|z|^2-1)(|z'|^2-1)\big) \\
&= \frac{2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} \big((1+|z|^2)(1+|z'|^2) - 4x_1x_1' - 4x_2x_2' - (|z|^2-1)(|z'|^2-1)\big) \\
&= \frac{4}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} \big(|z|^2 + |z'|^2 - 2x_1x_1' - 2x_2x_2'\big) \\
&= \frac{4}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} \big(|z|^2 + |z'|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}')\big) \\
&= \frac{4}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} \big(|z|^2 + |z'|^2 - (z\bar{z}' + \bar{z}z')\big) = \frac{4}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} |z-z'|^2
\end{aligned}$$

Per tant, si $z, z' \in \mathbb{C}$ la distància definida mitjançant la projecció estereogràfica ve donada per

$$\mathrm{d}_\phi(z,z') = \frac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}} |z-z'|.$$

Suposem ara que $z' = \infty$, en aquest cas

$$P = \left(\frac{2x_1}{1+|z|^2}, \frac{2x_2}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{S}^2$$
$$P' = (0,0,1) = N \in \mathbb{S}^2$$

i per tant:

$$\mathrm{d}^2(P,N) = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + (x_3^0 - 1)^2 = 2 - 2x_3^0 = 2\left(1 - \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right) = \frac{4}{1+|z|^2}$$

Per tant, si $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{d}_\phi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

v) Si z_1 i z_2 corresponen a punts diametralment oposats tenim que existirà $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ tal que

$$z_1 = \phi(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}, \qquad z_2 = \phi(-x_1,-x_2,-x_3) = \frac{-x_1 - ix_2}{1+x_3}.$$

Per tant

$$z_1\bar{z}_2 = \frac{(x_1+ix_2)(-x_1+ix_2)}{1-x_3^2} = \frac{-x_1^2 - x_2^2}{1-x_3^2} = -1$$

19. **Transformacions de Möbius** Sigui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriu amb coeficients complexos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i determinant no nul, és a dir $ad - bc \neq 0$. Definim la transformació de Möbius associada a A com $T = T_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

i) Demostreu que tota transformació de Möbius T és una bijecció de $\overline{\mathbb{C}}$ i trobeu T^{-1}.

ii) Demostreu que donats $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, diferents dos a dos, existeix una única transformació de Möbius S tal que $S(z_1) = 1$, $S(z_2) = 0$ i $S(z_3) = \infty$, donada per

$$S(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

iii) Donades dues ternes z_1, z_2, z_3 i z_1', z_2', z_3' com ii) proveu que existeix una única tranformació de Möbius T tal que $T(z_j) = z_j'$ $\forall j = 1, 2, 3$.

iv) Donats quatre punts $z, z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, diferents dos a dos, la seva raó doble es defineix com $(z, z_1, z_2, z_3) = S(z)$, on S és la transformació de ii) (calculada en termes de z_1, z_2, z_3). Demostreu que si T és una transformació de Möbius, llavors T preserva el valor de la raó doble: $\big(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)\big) = (z, z_1, z_2, z_3)$.

v) Si T és una transformació de Möbius i denotem $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, llavors es té:

$$T(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tal que } T = T_A.$$

vi) Si T és una transformació de Möbius, llavors $T(\overline{\mathbb{R}}) = C$, on C és un "cercle de $\overline{\mathbb{C}}$", això és, C és un cercle de $\mathbb{C}$ o una recta de $\mathbb{C}$ a la que afegim ∞.

vii) Proveu que $(z, z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow z, z_1, z_2, z_3$ són sobre un "cercle de $\overline{\mathbb{C}}$".

viii) Proveu que si T és una transformació de Möbius, llavors transforma "cercles"en "cercles".

ix) Si T és una transformació de Möbius que envia el cercle unitat $C(0:1)$ en ell mateix, llavors

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{\overline{z}_0 z - 1},$$

sent $\theta \in \mathbb{R}$ i $z_0 \notin C(0:1)$.

x) Si T és una transformació de Möbius que envia $\overline{\mathbb{R}}$ a $C(0:1)$, llavors

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

sent $\theta \in \mathbb{R}$ i $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Resolució:

Abans de resoldre el problema unes observacions que farem servir.

- Per a tot $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, les matrius λA i A defineixen la mateixa transformació de Möbius.
- Si Id és la matriu identitat, $T_{\mathrm{Id}}(z) = z$.

- Si A, B són dues matrius 2×2 tals que $\det A \cdot \det B \neq 0$, llavors $T_A \circ T_B = T_{AB}$. Aquesta propietat es comprova directament.

Així concluïm que tenim una estructura de grup en les transformacions de Möbius.

Tenim a més una altra propietat molt útil:

Observació 1.1 *Si T és una transformació de Möbius diferent de la identitat, com a molt, pot tenir dos punts fixos, és a dir, com a molt, existeixen dues solucions de $T(z) = z$. Distingim casos segons si ∞ és o no punt fix, és a dir quan $c = 0$ ja que $T(\infty) = a/c$.*

- *Quan $c = 0$, ∞ és un punt fix i l'altre punt fix és solució de $az + b = zd$ i tenim com a molt una altra solució si $a \neq d$.*
- *Quan $c \neq 0$, $T(z) = z$ és equivalent a $az + b = cz^2 + dz$ que pot tenir com a molt dues solucions complexes.*

També podem entendre aquesta propietat com que si dues transformacions de Möbius coincideixen en tres punts diferents, llavors són la mateixa.

Fent servir aquestes propietats, anem a resoldre el problema.

i) Sigui $T = T_A$. Calculem la inversa. Notem primer que $d/c, a/c \in \mathbb{C}$ (no són ∞) perquè $d = c = 0$ i $a = c = 0$ no pot ser ja que $ad - bc \neq 0$. És clar que $T(-d/c) = \infty$ i $T(\infty) = a/c$. Llavors, si $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = w &\iff az + b = w(cz+d) \iff z(a - wc) = -b + dw \\ &\iff z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-wc + a}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Observeu que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Per tant $T^{-1} = T_{A^{-1}}$.

ii) Siguin $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ diferents dos a dos. Descartem primer els casos $z_i = \infty$. Observeu que si $z_1 = \infty$, llavors $z_2, z_3 \neq \infty$ i el mateix per la resta de combinacions.

$$\begin{cases} \text{Si } z_1 = \infty & S(z) = \dfrac{z - z_2}{z - z_3}. \\ \text{Si } z_2 = \infty & S(z) = (z_1 - z_3)\dfrac{1}{z - z_3}. \\ \text{Si } z_3 = \infty & S(z) = \dfrac{1}{z_1 - z_2}(z - z_2). \end{cases} \tag{1.7}$$

Ara ja podem suposar que $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Com $S(z_3) = \infty$, $S(z) = \frac{ax+b}{\alpha(z-z_3)}$ per algun $\alpha \neq 0$ i, com $S(z_2) = 0$, és clar que $S(z) = \gamma\frac{z-z_2}{z-z_3}$ per algun $\gamma \neq 0$. Per trobar la constant γ, normalitzem amb la condició $S(z_1) = 1$ i obtenim la fórmula que busquem.

La unicitat prové de la construcció o alternativament podeu fer el següent raonament; si S, S' satisfan les condicions, en particular tenim que la transformació de Möbius definida per $T := S^{-1} \circ S'$ satisfà $T(z_j) = z_j$ per $j = 1, 2, 3$ i per tant té tres punts fixos. Aplicant 1.1 concluïm que $T = \mathrm{Id}$.

iii) Fixem $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ i $z_1', z_2', z_3' \in \overline{\mathbb{C}}$ diferents dos a dos. Siguin S, S' les transformacions de l'apartat ii). És a dir

$$S(z_1) = S'(z_1') = 1, \qquad S(z_2) = S'(z_2') = 0, \qquad S(z_3) = S'(z_3') = \infty.$$

Com S, S' són bijectives, $\left(S'\right)^{-1}(1) = z_1'$, $\left(S'\right)^{-1}(0) = z_2'$, $\left(S'\right)^{-1}(\infty) = z_3'$. Per tant, l'aplicació definida per $T(z) = \left(S'\right)^{-1} \circ S$ satisfà $T(z_j) = z_j'$.

iv) Observeu que la raó doble definida (w, w_1, w_2, w_3) satisfà

$$(w_1, w_1, w_2, w_3) = 1, \qquad (w_2, w_1, w_2, 2_3) = 0, \qquad (w_3, w_1, w_2, w_3) = \infty.$$

Sigui T una transformació de Möbius i $z, z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. Definim les aplicacions

$$S(z) = (z, z_1, z_2, z_3), \qquad S'(z) = (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)).$$

Per definició de S i S'

$$S(z_1) = S'(z_1) = 1, \qquad S(z_2) = S'(z_2) = 0, \qquad S(z_3) = S'(z_3) = \infty$$

Per tant, utilitzant l'observació 1.1 deduïm que $S(z) = S'(z)$.

v) Sigui A una matriu real i $T = T_A$. És clar que si $z \in \overline{\mathbb{R}}$, $T(z) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Suposem ara que T és una aplicació de Möbius satisfent $T(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. Com $1, 0, \infty \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$x_1 := T^{-1}(1), x_2 := T^{-1}(0), x_3 := T^{-1}(\infty) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Com T està determinada unívocament pels punts x_1, x_2, x_3, és a dir

$$T(z) = (z, x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_2}{x - x_3}$$

i per tant, clarament, els coeficients a, b, c, d que determinen T són reals.
Si algun dels x_j són ∞, feu servir les expressions (1.7).

vi) Sigui T una transformació de Möbius, $T(\overline{\mathbb{R}}) = C$ si i només si $T^{-1}(C) = \overline{\mathbb{R}}$. Denotem per $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ els nombres que defineixen T. És clar que $T^{-1}(w) \in \overline{\mathbb{R}}$ si i només si

$$T^{-1}(w) = \overline{T^{-1}(w)}.$$

És a dir, fent servir l'expressió (1.6) per T^{-1}

$$\frac{dw - b}{a - wc} = \frac{\overline{d}\overline{w} - \overline{b}}{\overline{a} - \overline{wc}} \Longleftrightarrow (\overline{d}c - d\overline{c})|w|^2 + w(d\overline{a} - \overline{b}c) + \overline{w}(b\overline{c} - \overline{d}a) + \overline{b}a - b\overline{a} = 0. \qquad (1.8)$$

L'objectiu ara és veure que aquesta equació defineix un cercle de $\overline{\mathbb{C}}$ i amb això haurem acabat. Aquesta equació té molta estructura. Denotem

$$\overline{d}c - d\overline{c} = i\beta, \qquad \overline{b}a - b\overline{a} = i\rho, \qquad \gamma = -i(\overline{d}a - b\overline{c})$$

amb $\beta, \rho \in \mathbb{R}$. Llavors (1.8) és

$$\beta|w|^2 + w\overline{\gamma} + \overline{w}\gamma + \rho = 0. \qquad (1.9)$$

Si $\beta = \mathrm{Re}(\overline{d}c) = 0$, llavors l'equació a (1.8) és, escrivint $w = w_1 + iw_2$ i $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, obtenim

$$2(w_1\gamma_1 + w_2\gamma_2) + \rho = 0$$

que és l'equació d'una recta al pla.

Si $\beta = \mathrm{Re}(\overline{d}c) \neq 0$, denotant $\alpha = \gamma/\beta$, $r = \rho/\beta$, tenim que l'equació (1.9) és

$$0 = |w|^2 + w\overline{\alpha} + \overline{w}\alpha + r = |w + \alpha|^2 + r - |\alpha|^2$$

que defineix una circumferència si $r < |\alpha|^2$, un punt si $r = |\alpha|^2$ o el conjunt buït en cas contrari. Comprovem dons que $|\alpha|^2 > r$:

$$\begin{aligned}
\beta^2(|\alpha|^2 - r) &= |\overline{d}a - b\overline{c}|^2 - |\overline{b}a - b\overline{a}| \cdot |\overline{d}c - d\overline{c}| \\
&= |d|^2|a|^2 + |b|^2|c|^2 - ad\overline{bc} - bc\overline{ad} \\
&= |ad - bc|^2 > 0.
\end{aligned}$$

vii) Suposem que $S(z) := (z, z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{R}}$ i sigui C el "cercle"tal que (apartat vi)) $S^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = (C)$. Per hipòtesi tenim que $z \in S^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = C$. Per definició de S, $S(z_1) = 1$, $S(z_2) = 0$ i $S(z_3) = \infty$, $z_1, z_2, z_3 \in S^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = C$. Per tant $z, z_1, z_2, z_3 \in C$.

Ara fem la implicació contrària. Suposem que $z, z_1, z_2, z_3 \in C$ amb C un "cercle". Sigui $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$. Tenim que $S(z_1), S(z_2), S(z_3) \in \overline{\mathbb{R}}$ o equivalentment $z_1, z_2, z_3 \in S^{-1}(\overline{\mathbb{R}})$. Sigui C' el cercle (apartat vi)) tal que $C' = S^{-1}(\overline{\mathbb{R}})$. Llavors $z_1, z_2, z_3 \in C' \cap C$. Com dos cercles s'interseqüen en a) en un punt o b) en dos punts o c) en cap punt o d) $C = C'$, concluïm que $C = C'$. Finalment, per hipòtesis, $z \in C = C' = S^{-1}(\overline{\mathbb{R}})$ que implica $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{R}}$.

viii) Sigui T una transformació de Möbius, i C un cercle. Considerem tres punts $z_1, z_2, z_3 \in C$ i denotem per C' el cercle determinat per $T(z_1), T(z_2), T(z_3)$ (observeu que T és bijectiva i per tant $T(z_1), T(z_2), T(z_3)$ són tres punts diferents). Veurem que $T(C) = C'$.

Per l'apartat vii), $z \in C \iff (z, z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{R}}$. Per l'apartat iv) $(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = (z, z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{R}}$ i altre cop per l'apartat vii),

$$(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) \in \overline{\mathbb{R}} \iff T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3) \in C' \iff T(z) \in C'.$$

L'última implicació és certa perquè C' és el cercle definit per $T(z_1), T(z_2), T(z_3)$.

ix) Observeu que, si T és de la forma que proposa l'enunciat T envia el cercle unitat a ell mateix. El resultat és clar si $z_0 = 0$. Suposem que $z_0 \neq 0$, llavors si $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ tenim que

$$|z - z_0|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z = 1 + |z_0|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z = |\overline{z}_0 z - 1|^2$$

i per tant $\big|T(z)\big| = 1$.

Sigui $C = C(0:1)$ el cercle unitat i suposem que $T(C) = C$. Considerem $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $T(z_0) = 0$. És clar que $z_0 \notin C$ ja que $0 \notin C$.

Si $z_0 = \infty$, llavors $T(z) = \frac{a}{z-b}$. Imposant que $|T(z)| = 1$ si $|z| = 1$ obtenim que

$$|a|^2 = |z - b|^2 = 1 - \overline{z}b - z\overline{b} + |b|^2, \qquad \forall |z| = 1.$$

És clar que cal que $b=0$ i $|a|=1$, ja que la igualtat anterior ha de ser vàlida per $z=e^{i\beta}$, amb $\beta\in(-\pi,\pi]$. Resumint tenim que $T(z)=e^{i\theta}z^{-1}$ que no té exactament la forma que ens proposa l'enunciat. Observeu, però que:

$$T(z)=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{\overline{z}_0 z-1}=e^{i\theta}\frac{\frac{z}{\overline{z}_0}-\frac{z_0}{\overline{z}_0}}{z-\frac{1}{\overline{z}_0}}.$$

Quan $z_0=\infty$, aquesta darrera expressió de T té sentit i és $T(z)=-e^{i\theta}z^{-1}=e^{i\theta'}z^{-1}$. Observeu com a detall que $\overline{\infty}=\infty$.
Suposem que $z_0\in\mathbb{C}$. Llavors per alguns z,c,d:

$$T(z)=a\frac{z-z_0}{cz+d}.$$

Observem que $c\neq 0$. En efecte, $c=0$ implica que $d\neq 0$ (ja que $ad-bc\neq 0$). Per tant $T(z)=\alpha(z-z_0)$ per algun $\alpha\neq 0$. Si $|z|=1$ i $|T(z)|=1$, llavors

$$1=|T(z)|^2=|\alpha|^2(1+|z_0|^2-z\overline{z}_0-\overline{z}z_0)$$

que implica que $z\overline{z_0}=0$ per a tot $z\in C$. Això és una contradicció que ve de suposar $c=0$ i $T(C)=C$.
En definitiva $c\neq 0$ i per tant podem escriure T com

$$T(z)=\alpha\frac{z-z_0}{z+\delta},\qquad \alpha,\delta\in\mathbb{C}.$$

Utilitzem que si $|z|=1$, llavors $|T(z)|=1$. Obtenim

$$|\alpha|^2(1+|z_0|^2-z\overline{z}_0-\overline{z}z_0)=1+|\delta|^2+\overline{z}\delta+z\overline{\delta}$$

o equivalentment

$$|\alpha|^2(1+|z_0|^2)-1-|\delta|^2=z\big(\overline{\delta}+|\alpha|^2\overline{z}_0\big)+\overline{z}\big(\delta+|\alpha|^2z_0\big).$$

Un altre cop, com la igualtat anterior ha de ser certa per a tot $z\in C$, deduïm que

$$\delta+|\alpha|^2z_0=0,\qquad |\alpha|^2(1+|z_0|^2)=1+|\delta|^2.$$

De la primera equació, obtenim que $\delta=-|\alpha|^2z_0$ i per tant,

$$|\alpha|^4|z_0|^2-|\alpha|^2(1+|z_0|^2)+1=0$$

que té com a solucions:

$$|\alpha|^2=\frac{1}{2|z_0|^2}\big(1+|z_0|^2\pm(1-|z_0|^2)\big)=\begin{cases}1\\ \dfrac{1}{|z_0|^2}\end{cases}.$$

La opció $|\alpha|=1$ implica $\delta=-z_0$ i $T(z)=\alpha\frac{z-z_0}{z-z_0}$ que no és una transformació de Möbius perquè els coeficients no satisfant $ad-bc\neq 0$. Per tant $|\alpha|=|z_0|^{-1}$ i $\delta=-\frac{\overline{z}_0}{|z_0|^2}=-(\overline{z}_0)^{-1}$. Finalment

$$T(z)=\alpha\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\overline{z}_0}}=\alpha\overline{z}_0\frac{z-z_0}{\overline{z}_0z-1}$$

i només resta comprovar que $|\alpha\overline{z}_0|=|z_0|^{-1}|\overline{z}_0|=1$.

x) Igual que a l'apartat anterior, és clar que si T té la forma de l'enunciat envia $\overline{\mathbb{R}}$ a $C = C(0:1)$. En efecte, si $z \in \mathbb{R}$:

$$\left|T(z)\right|^2 = \frac{(z-z_0)(z-\overline{z}_0)}{(z-\overline{z_0})(z-z_0)} = 1.$$

Suposem ara que T és una transformació de Möbius tal que $T(\overline{\mathbb{R}}) = C$ i sigui z_0 tal que $T(z_0) = 0$, és clar que $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Així $T(z) = a\frac{z-z_0}{cz+d}$. Si $c = 0$, com $d \neq 0$, $T(z) = \alpha(z - z_0)$ amb $\alpha \neq 0$. És clar que, en aquest cas, $T(\overline{\mathbb{R}}) \neq C$. Per tant podem suposar que $c \neq 0$. Llavors,

$$T(z) = \alpha\frac{z-z_0}{z+\delta}.$$

Observeu que $\alpha = T(\infty) \in C$ i per tant $\alpha = e^{i\theta}$ per algun $\theta \in (-\pi, \pi]$. A més tenim que $T(0) = -e^{i\theta}\frac{z_0}{\delta} \in C$ que implica $|\delta| = |z_0|$. Imposem que $|T(z)| = 1$ si $z \in \overline{\mathbb{R}}$ i obtenim

$$z^2 - z\overline{z}_0 - zz_0 + |z_0|^2 = z^2 + z\overline{\delta} + z\delta + |\delta|^2 = 1 + z\overline{\delta} + z\delta + |z_0|^2.$$

Per tant cal

$$\overline{z}_0 + \delta + z_0 + \overline{\delta} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\delta = -\operatorname{Re} z_0.$$

Imposant que $|\delta| = |z_0|$ obtenim que $\operatorname{Im}\delta = \pm\operatorname{Im} z_0$. Si $\operatorname{Im}\delta = -\operatorname{Im} z_0$, llavors $\delta = -z_0$ i per tant $T(z) = \alpha$ que no és una transformació de Möbius. Per tant cal $\operatorname{Im}\delta = \operatorname{Im} z_0$, obtenint que $\delta = -\overline{z}_0$ i en conseqüència el darrer apartat està demostrat.

Resolucions de problemes, anàlisi complexa

8 de març de 2021

1 Funcions holomorfes

Denotarem per $z = x + \mathrm{i}y$ i $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$. En alguns enunciats identifiquem les funcions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ amb les funcions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ via la identificació $\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}y \sim (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Per una funció qualsevol $g(t, s)$ denotarem, quan ens convingui, les parcials com

$$\partial_t g = \frac{\partial g}{\partial t} = \partial_t g, \qquad \partial_s g = \frac{\partial g}{\partial s}$$

1. Trobeu la part real i imaginària $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ de les següents funcions:

(i) $f(z) = \overline{z}$.

(ii) $f(z) = |z|$.

(iii) $f(z) = \frac{1}{z}$.

(iv) $f(z) = z^2$.

Resolució:

(i) $f(z) = \bar{z} = x - iy$, per tant $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$.

(ii) $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, per tant $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = 0$.

(iii) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$, per tant $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

(iv) $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$, per tant $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

2. Tota funció complexa $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ es pot escriure en forma polar fent la substitució $z = re^{\mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. Posarem $f(z) = u(r, \theta) + \mathrm{i}v(r, \theta)$ i seguirem anomenant les funcions reals $u(r, \theta), v(r, \theta)$ la part real i imaginària, respectivament, de f. Trobeu la part real i imaginària en coordenades polars de les funcions del problema 1.

Resolució:

(i) $f(z) = \bar{z} = re^{-i\theta}$, per tant $u(r, \theta) = r\cos\theta$, $v(r, \theta) = -r\sin\theta$.

(ii) $f(z) = |z| = r$, per tant $u(r, \theta) = r$, $v(r, \theta) = 0$.

(iii) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$, per tant $u(r, \theta) = \frac{1}{r}\cos\theta$, $v(r, \theta) = -\frac{1}{r}\sin\theta$.

(iv) $f(z) = z^2 = r^2 e^{2i\theta}$, per tant $u(r, \theta) = r^2\cos 2\theta$, $v(r, \theta) = r^2\sin 2\theta$.

3. Expresseu les variables reals x, y en termes de z i $\overline{z}$. Llavors, escriviu les següents funcions en termes de z i $\overline{z}$.

(i) $f(z)=x^2+y^2$.

(ii) $f(z)=x^2-y^2-5(xy)\mathrm{i}$.

(iii) $f(z)=x-2y+2+(6x+y)\mathrm{i}$.

(iv) $f(z)=3y^2+(3x^2)\mathrm{i}$.

Resolució: Usarem que
$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}=\frac{\bar{z}-z}{2}i.$$

(i) $f(z)=x^2+y^2=z\bar{z}$.

(ii) $f(z)=x^2-y^2-5xyi=\frac{7z^2-3\bar{z}^2}{4}$.

(iii) $f(z)=x-2y+2+(6x+y)i=(1+4i)z+2i\bar{z}+2$.

(iv) $f(z)=3y^2+(3x^2)i=\frac{3}{4}\left((-1+i)(z^2+\bar{z}^2)+2(1+i)z\bar{z}\right)$.

4. Comproveu si es verifiquen o no les equacions de Cauchy-Riemann per a les funcions del problema 1.

Resolució: Recordem les equacions de Cauchy-Riemann. Si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ i f és holomorfa ha de satisfer:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

(i) $f(z)=\bar{z}$, tenim que $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$, per tant no es verifiquen.

(ii) $f(z)=|z|$, en aquest cas, com $v=0$ i $u=\sqrt{x^2+y^2}$ és evident que no es verifiquen perquè, per exemple: $\frac{\partial v}{\partial y}=0\neq\frac{\partial u}{\partial x}$.

(iii) $f(z)=\frac{1}{z}$, tenim que $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial v}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, per tant si que es verifiquen.

(iv) $f(z)=z^2$, tenim que: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$, per tant si que es verifiquen.

5. Trobeu constants reals $a,b\in\mathbb{R}$ perquè la funció $f(z)=3x-y+5+\mathrm{i}(ax+by-3)$ sigui holomorfa en $\mathbb{C}$ i doneu la seva fórmula en termes de z.

Resolució: Si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ i f és holomorfa ha de satisfer les equacions de Cauchy-Riemann:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Com $u(x,y)=3x-y+5$ i $v(x,y)=ax-by-3$, si imposem que es verifiquin les equacions de Cauchy-Riemann tenim:
$$3=-b,\quad -1=-a\Rightarrow f(z)=3x-y+5+i(x+3y-3)$$

Usant que $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, i $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ tenim: $f(z)=(3+2i)z+5-3i$ que, obviament, no depén de $\bar{z}$.

6. Donada $f(x,y)=(2x(1-y)+\lambda x^2-\mu y^2, 2y-y^2+xy+x^2)$. Determineu λ i μ perquè sigui holomorfa i expresseu-la en funció de z.

Resolució: Si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ i f és holomorfa ha de satisfer les equacions de Cauchy-Riemann:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Com $u(x,y) = 2x(1-y) + \lambda x^2 - \mu y^2$ i $v(x,y) = 2y - y^2 + xy + x^2$, si imposem que es verifiquin les equacions de Cauchy-Riemann tenim:

$$2\lambda x + 2 - 2y = 2 - 2y + x, \quad -2x - 2\mu y = -y - 2x \Rightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

i per tant

$$f(z) = 2x(1-y) + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + i(2y - y^2 + xy + x^2).$$

Usant que $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, i $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ tenim: $f(z) = 2z + z^2\left(\frac{1}{2} + i\right)$. (Per fer el càlcul més directe, useu que $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$)

7. Sigui

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{z^4}\right), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Demostreu que

(i) f satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a $\mathbb{C}$.

(ii) f és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i no és contínua en 0.

Resolució:

- Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ i f és holomorfa ha de satisfer les equacions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Observem que, si $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-\frac{1}{(x+iy)^4}} = e^{-\frac{(x-iy)^4}{(x^2+y^2)^4}} = e^{-\frac{x^4-6x^2y^2+y^4+i(-3x^3y+3xy^3)}{(x^2+y^2)^4}} \\ &= e^{-\frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^4}}\left(\cos\frac{-3x^3y+3xy^3}{(x^2+y^2)^4} - i\sin\frac{-3x^3y+3xy^3}{(x^2+y^2)^4}\right) \end{aligned}$$

Per tant:

$$u(x,y) = e^{-\frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^4}}\cos\frac{-3x^3y+3xy^3}{(x^2+y^2)^4}, \quad v(x,y) = -e^{-\frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^4}}\sin\frac{-3x^3y+3xy^3}{(x^2+y^2)^4}$$

Tot i que es podria fer, és molt laboriós comprovar que es verifiquen les equacions de Cauchy-Riemann usant les expressions de u i v.

De fet, recordem que les equacions de C-R també es poden escriure, pensant f com una funció de (x,y) amb valors complexos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$$

o bé pensant f com una funció de $(z,\bar{z})$ amb valors complexos:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

per la nostra funció f, aquesta darrera condició és la més sencilla de comprovar ja que, si $z \neq 0$ és clar que es verifica, i en el $z = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0,0) = \lim_{\bar{z}\to 0} \frac{f(0,\bar{z}) - f(0,0)}{\bar{z}} = 0$$

per tant f satisfà C-R a tot $\mathbb{C}$.

- Per veure que f no és continua al $z = 0$ prenem la successió: $z_n = \frac{1}{n}e^{i\theta} \to 0$. Calculem ara

$$f(z_n) = e^{-n^4 e^{-4\theta i}} = e^{-n^4(\cos 4\theta - i \sin 4\theta)} = e^{-n^4 \cos 4\theta} e^{in^4 \sin 4\theta}$$

prenem, per exemple $\theta = \frac{\pi}{4}$ i tenim:

$$f(z_n) = e^{n^4} \to \infty$$

per tant la imatge de la successió no tendeix a zero i la funció no és continua al zero

8. Demostreu que $f(z)$ i $\overline{f(\overline{z})}$ són simultàniament $\mathbb{C}$-diferenciables en z_0 i $\overline{z_0}$, respectivament.

Resolució: Observem que si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, aleshores la funció $h(z) = \overline{f}(\bar{z})$ satisfà $h(z) = \overline{f}(\bar{z}) = u(x,-y) - iv(x,-y)$.

Suposem que f és holomorfa en $z = z_0 = x_0 + iy_0$. Aleshores sabem que u i v són diferenciables a (x_0, y_0) i a més verifiquen les equacions de C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{1.1}$$

Considerem ara les funcions $\bar{u}(x,y) = u(x,-y)$ i $\bar{v}(x,y) = -v(x,-y)$. És clar que aquestes funcions seran diferenciables en el punt $(x_0, -y_0)$. A més:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_0,-y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x_0,-y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Igualment:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(x_0,-y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}(x_0,-y_0) = +\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Usant aquestes igualtats i les de (1.1) tenim:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_0,-y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}(x_0,-y_0)$$

Igualment:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x_0,-y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}(x_0,-y_0).$$

Per tant les funcions $\bar{u}$ i $\bar{v}$ verifiquen les equacions de C-R al punt $(x_0, -y_0)$ i per tant la funció $h(z) = \overline{f}(\bar{z}) = u(x,-y) - iv(x,-y) = \bar{u}(x,y) + i\bar{v}(x,y)$ és diferenciable al punt $w = x_0 - iy_0 = \bar{z}_0$.

La implicació contrària la veiem usant que: $f(z) = \bar{h}(\bar{z})$.

9. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funció diferenciable (en el sentit real) en z_0. Sigui

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{existeix}\, z_n \to z_0,\ \lim_n \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = z \right\}.$$

(i) Useu la definició de funció diferenciable en un punt per concloure que es compleix que $f(z) - f(z_0) - \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,(z - z_0) - \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\,(\bar{z} - \bar{z}_0) = o(|z - z_0|)$. Useu-ho per demostrar que, si $z \in S$, llavors es pot escriure com $z = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)e^{i\theta}$, per un cert $\theta \in (-\pi, \pi]$.

(ii) Demostreu que si f és $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0, aleshores S és un punt.

(iii) Demostreu que si f no és $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0, aleshores S és una circumferència.

Resolució:

(i) Suposem que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és diferenciable a $z_0 = (x_0, y_0)$. Si considerem la funció $F = (u, v)$ com a funció de $\mathbb{R}^2$ en ell mateix sabem que aquesta funció serà diferenciable, és a dir:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - F(x_0, y_0) - DF(x_0, y_0)\,(h_1, h_2)^T}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

on

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0).$$

Si escrivim aquest limit en components tenim:

$$\lim_{(0,0)} \frac{u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 - \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

o, el que és el mateix:

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = o(|h|)$$

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 - \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = o(|h|).$$

Amb aquestes observacions, anomenant $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ i $h = (x - x_0, y - y_0)$, tenim que:

$$\begin{aligned} &(u + iv)(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - (u + iv)(x_0, y_0) \\ &\quad - (x - x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_0, y_0) - (y - y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = o(|h|). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observem ara que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, usant que

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy,\ x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

tenim les relacions:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

i també:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Per tant:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(\bar z - \bar z_0)\\
=&\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)h_1 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)h_2\right) + \frac{i}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)h_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)h_1\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)h_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)h_2\right) + \frac{i}{2}\left(-\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)h_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)h_1\right)\\
=&\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)h_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)h_2
\end{aligned}$$

Així doncs l'equació (1.2) es tradueix en:

$$f(z) - f(z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0) - \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)(\bar z - \bar z_0) = o(|h|).$$

Prenem ara un punt $z \in S$, sabem que existeix una successió $z_n \to z_0$ i

$$\begin{aligned}
z &= \lim_n \frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_n \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z_n - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)(\bar z_n - \bar z_0) + o(|z_n - z_0|)}{z_n - z_0}\\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\lim_n \frac{\bar z_n - \bar z_0}{z_n - z_0}.
\end{aligned}$$

L'observació és la següent: denotem $w_n = \frac{\bar z_n - \bar z_0}{z_n - z_0}$. Sabem que:

- $|w_n| = 1$, per tant w_n pertany al disc unitat, que és un compacte, per a tot $n \in \mathbb{N}$.
- Sabem que $\lim_n w_n = w$ existeix.

Llavors $|w| = 1$ i $w = e^{i\theta}$ per algun $\theta \in (-\pi, \pi]$ i per tant:

$$z = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)e^{i\theta}.$$

(ii) Observem que, per l'apartat anterior, si $z \in S$, existeix un $\theta \in (-\pi,\pi]$ tal que $z = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)e^{i\theta}$. D'altra banda, si f és diferenciable a z_0, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$, per tant z és el punt $z = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$

(iii) Hem vist que si $z \in S$, aleshores:

$$z = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)e^{i\theta}$$

per algun $\theta \in (-\pi, \pi]$ i per tant :

$$\left|z - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\right|.$$

Això ens diu que tot punt de S pertant al cercle C de centre $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ i de radi $r = \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\right|$, i llavors tenim que $S \subset C$.
Ara bé, si $z \in C$ aleshores existirà un θ_0 tal que:

$$z = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\right| e^{i\theta_0}.$$

Denotem $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\right| e^{i\alpha}$. Per veure que $z \in S$ hem de construir una successió $z_n \to z_0$ tal que

$$z = \lim_n \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}.$$

Sabem que:

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \lim_n \frac{\bar{z}_n - \bar{z}_0}{z_n - z_0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\right| e^{i\alpha} \lim_n \frac{\bar{z}_n - \bar{z}_0}{z_n - z_0}.\end{aligned}$$

Per tant només cal prendre $z_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i(\frac{-\theta_0+\alpha}{2})}$, i tenim que $z_n \to z_0$ i:

$$\lim_n \frac{\bar{z}_n - \bar{z}_0}{z_n - z_0} = \lim_n \frac{e^{-i(\frac{-\theta_0+\alpha}{2})}}{e^{i(\frac{-\theta_0+\alpha}{2})}} = \lim_n e^{-2i(\frac{-\theta_0+\alpha}{2}+\frac{1}{n})} = e^{i(\theta_0-\alpha)}.$$

Així,

$$\lim_n \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\right| e^{i\alpha} e^{i(\theta_0-\alpha)} = z$$

i per tant $z \in S$.
De forma alternativa, podem considerar qualsevol successió real $r_n \to 0$ quan $n \to \infty$ i $z_n = z_0 + r_n e^{i\theta}$ per qualsevol $\theta \in (-\pi, \pi)$. És clar que $z_n \to z_0$ i per tant, si el límit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$$

existeix, ens donarà un punt de S. Calculem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \lim_n \frac{\bar{z}_n - \bar{z}_0}{z_n - z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) e^{-2i\theta}.$$

És clar que, com $\theta \in (-\pi, \pi]$ és qualsevol, tenim que

$$C = \left\{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) e^{-2i\theta}, \quad \theta \in (-\pi, \pi]\right\} \subset S$$

i per tant $C \subset S$.

10. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funció diferenciable (en el sentit real) en z_0. Suposem que el límit

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$$

existeix. Demostreu que f o bé $\overline{f}$ és $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0.

Resolució: Anomenem

$$A^2 = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|^2$$

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tenim:

$$A^2 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(u(x, y) - u(x_0, y_0))^2 + (v(x, y) - v(x_0, y_0))^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Com aquest límit existeix, podem prendre qualsevol limit direccional $(x, y) = (x_0, y_0) + (a, b)t$ amb $a^2 + b^2 = 1$, i sabem que el límit és independent de (a, b):

$$A^2 = \lim_{t\to 0} \frac{(u(x_0 + ta, y_0 + tb) - u(x_0, y_0))^2 + (v(x_0 + ta, y_0 + tb) - v(x_0, y_0))^2}{t^2}$$

Per altra banda, com u i v són diferenciables:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{(u(x_0 + ta, y_0 + tb) - u(x_0, y_0)^2}{t^2} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)b \right)^2 \\
\lim_{t\to 0} \frac{(v(x_0 + ta, y_0 + tb) - v(x_0, y_0)^2}{t^2} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)b \right)^2 .
\end{aligned}$$

Així, tenim la següent igualtat per tot a, b satisfent $a^2 + b^2 = 1$:

$$A^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)b \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)b \right)^2 .$$

Si prenem els valors d'a, b següents

$$(a, b) = (1, 0), \qquad (a, b) = (0, 1), \qquad (a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

tenim les igualtats:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 \\
A^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^2 \\
2A^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^2
\end{aligned}$$

que són equivalents a

$$A^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^2$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

Les úniques possibles solucions d'aquestes equacions són, o bé

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

que són les equacions de C-R associades a la funció $f=u+iv$ o bé:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

que són les equacions de C-R associades a la funció $\bar f=u-iv$. (Nota: podeu interpretar la relació anterior prenent ds vectors $w_1=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x})$, i $w_2=(\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y})$ com dos vectors amb ell mateix modul i ortogonals)

Alternativa. Fent servir el problema 9. En efecte, pel problema anterior tindrem que

$$\begin{aligned}f(z)-f(z_0)&=\partial_z f(z_0)(z-z_0)+\partial_{\bar z}f(z_0)(\bar z-\bar z_0)+o(|z-z_0|)\\ \overline{f}(z)-\overline{f}(z_0)&=\partial_z\overline{f}(z_0)(z-z_0)+\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)(\bar z-\bar z_0)+o(|z-z_0|).\end{aligned}$$

Llavors

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|^2&=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot\frac{\overline{f}(z)-\overline{f}(z_0}{\bar z-\bar z_0}\\ &=\left(\partial_z f(z_0)+\partial_{\bar z}f(z_0)\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}+o(1)\right)\left(\partial_z\overline{f}(z_0)\frac{z-z_0}{\bar z-\bar z_0}+\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)+o(1)\right)\end{aligned}$$

ja que $|z-z_0|^{-1}o(|\bar z-\bar z_0|),|\bar z-\bar z_0|^{-1}o(|z-z_0|)\to 0$ quan $z\to z_0$.

Com la funció f és diferenciable en el sentit real, les parcials $\partial_z f(z_0),\partial_{\bar z}f(z_0),\partial_z\overline{f}(z_0),\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)$ estàn acotades i a més $\left|\frac{z-z_0}{\bar z-\bar z_0}\right|=\left|\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}\right|=1$. Per tant, l'hipòtesi de l'enunciat es satifà dons quan existeix el límit

$$\begin{aligned}&\lim_{z\to z_0}\left(\partial_z f(z_0)+\partial_{\bar z}f(z_0)\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}\right)\left(\partial_z\overline{f}(z_0)\frac{z-z_0}{\bar z-\bar z_0}+\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)\right)\\ &=\partial_z f(z_0)\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)+\partial_{\bar z}f(z_0)\partial_z\overline{f}(z_0)\\ &\quad+\partial_z\overline{f}(z_0)\partial_z f(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\bar z-\bar z_0}+\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)\partial_{\bar z}f(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}.\end{aligned}$$

Però, els límits

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\bar z-\bar z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}$$

no existeixen. És suficient agafar $z_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\theta}$ i comprovar que els límits valen $e^{2i\theta},e^{-2i\theta}$ respectivament. Per tant, cal que

$$\partial_z\overline{f}(z_0)\partial_z f(z_0)=\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)\partial_{\bar z}f(z_0)=0.$$

I llavors o bé $\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)=0$ o bé $\partial_{\bar z}f(z_0)$. És a dir, o bé $\overline{f}$ és $\mathbb{C}$- diferenciable o bé f és $\mathbb{C}$-diferenciable.

Exercici: Comproveu que si $\partial_{\bar z}\overline{f}(z_0)\partial_{\bar z}f(z_0)=0$, llavors $\partial_z\overline{f}(z_0)\partial_z f(z_0)=0$.

12. (i) Demostreu que, en coordenades polars, les equacions de Cauchy-Riemann prenen la següent forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(ii) Demostreu que, si f és $\mathbb{C}$-diferenciable llavors:

$$f'(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

Resolució: Sigui $f(z) = f(x,y) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$. Tenim que

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta), \quad u(r,\theta) = \tilde{u}(r\cos\theta, r\sin\theta),\ v(r,\theta) = \tilde{v}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Per tant

$$\begin{aligned} \partial_r u &= \partial_x\tilde{u}\cos\theta + \partial_y\tilde{u}\sin\theta & \partial_r v &= \partial_x\tilde{v}\cos\theta + \partial_y\tilde{v}\sin\theta \\ \partial_\theta u &= -r\partial_x\tilde{u}\sin\theta + r\partial_y\tilde{u}\cos\theta & \partial_\theta v &= -r\partial_x\tilde{v}\sin\theta + r\partial_y\tilde{v}\cos\theta \end{aligned}$$

(i) Quan $\partial_x\tilde{u} = \partial_y\tilde{v}$ i $\partial_y\tilde{u} = -\partial_x\tilde{v}$ tenim que

$$\begin{aligned} \partial_r u &= \partial_y\tilde{v}\cos\theta - \partial_x\tilde{v}\sin\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta v \\ \partial_r v &= -\partial_y\tilde{u}\cos\theta + \partial_x\tilde{u}\sin\theta = -\frac{1}{r}\partial_\theta u. \end{aligned}$$

Anàlogament, si $r\partial_r u = \partial_\theta v$ i $-r\partial_r v = \partial_\theta u$, llavors

$$\begin{aligned} (\partial_x\tilde{u} - \partial_y\tilde{v})\cos\theta + (\partial_y\tilde{u} + \partial_x\tilde{v})\sin\theta = 0 \\ (\partial_y\tilde{u} + \partial_x\tilde{v})\cos\theta - (\partial_x\tilde{u} - \partial_y\tilde{v})\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

i per tant $\partial_x\tilde{u} = \partial_y\tilde{v}$ i $\partial_y\tilde{u} = -\partial_x\tilde{v}$.

(ii) Recordem que

$$f'(z) = \partial_x\tilde{u}(x,y) + i\partial_x\tilde{v}(x,y) = -i(\partial_y\tilde{u}(x,y) + i\partial_y\tilde{v}(x,y)).$$

És clar que

$$\partial_r u + i\partial_r v = (\partial_x\tilde{u} + i\partial_x\tilde{v})\cos\theta + (\partial_y\tilde{u} + i\partial_y\tilde{v})\sin\theta = f'(z)\cos\theta + if'(z)\sin\theta = f'(z)e^{i\theta}$$

i per tant la primera igualtat està demostrada. La segona es fa de manera anàloga.
Com a alternativa, tenim que $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$. Derivant aquesta igualtat respecte r i θ, com f és $\mathbb{C}$-diferenciable,

$$e^{i\theta}f'(re^{i\theta}) = \partial_r u + i\partial_r v, \qquad ire^{i\theta}f'(re^{i\theta}) = \partial_\theta u + i\partial_\theta v.$$

14. Demostreu que u és harmònica $\iff \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}} = 0$.

Resolució: Recordem que una funció u és harmònica si és C^2 i $\partial^2_{xx}u + \partial^2_{yy}u = 0$.

Primer anem a calcular $\partial^2_{z\bar{z}}u$. Tenim que

$$u(x,y) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, i\frac{\bar{z}-z}{2}\right).$$

Així,

$$\partial_z u\left(\frac{z+\bar z}{2}, i\frac{\bar z - z}{2}\right) = \frac{1}{2}\partial_x u\left(\frac{z+\bar z}{2}, i\frac{\bar z - z}{2}\right) - \frac{i}{2}\partial_y u\left(\frac{z+\bar z}{2}, i\frac{\bar z - z}{2}\right)$$

i per tant, derivant la igualtat anterior respecte $\bar z$

$$\partial^2_{z\bar z}u = \frac{1}{4}\partial^2_{xx}u + \frac{i}{4}\partial^2_{xy}u - \frac{i}{4}\partial^2_{yx}u + \partial^2_{yy}u = \frac{1}{4}\left(\partial^2_{xx}u + \partial^2_{yy}u\right) + \frac{i}{4}\left(\partial^2_{xy}u - \partial^2_{yx}.u\right)$$

Tot aquest càlculs són correctes si existeixen les parcials segones.

Ara anem a demostrar l'exercici. Recordem que una funció u és harmònica si i només si és C^2, és a dir, existeixen les parcials segones satisfent $\partial^2_{xy}u = \partial^2_{yx}u$, i $\Delta u := \partial^2_{xx}u + \partial^2_{yy}u = 0$. Llavors, $\partial^2_{z\bar z}u = 0$ si només si, existeixen les derivades segones i

$$\partial^2_{xx}u + \partial^2_{yy}u = \partial^2_{xy}u - \partial^2_{yx}u = 0$$

que és equivalent a que u és harmònica.

15. Trobeu el polinomi harmònic més general de la forma $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ i una funció $v(x,y)$ tal que $u + iv$ sigui holomorfa. Expresseu $f = u + iv$ en funció de z.

Resolució: Com u és un polinomi, no cal preocupar-se per la diferenciabilitat. La condició que cal que satisfagui és $\partial^2_{xx}u + \partial^2_{yy}u = 0$, és a dir

$$x(6a + 2c) + y(2b + 6d) = 0 \Longleftrightarrow c = -3a,\ b = -3d.$$

Per tant

$$u(x,y) = ax(x^2 - 3y^2) + dy(y^2 - 3x^2).$$

Ara busquem v, C^1, tal que $\partial_x u = \partial_y v$ i $\partial_y u = -\partial_x v$. El mètode general és, donada u:

- Com $\partial_y v = \partial_x u$, llavors

  $$v(x,y) = \int \partial_x u(x,y)\,dy + \omega(x),$$

  essent $\int$ una primitiva qualsevol.
- Determinem $\omega(x)$ tal que

  $$-\partial_y u = \partial_x v = \int \partial^2_{xx}u(x,y)\,dy + \omega'(x) \Longleftrightarrow \omega'(x) = -\partial_y u(x,y) - \int \partial^2_{xx}u(x,y)\,dy.$$

  Aquesta darrera equació, no té perquè tenir solució per tota funció u, però sí que en té si u és harmònica i el domini on estem treballant és simplement connex per garantir que les funcions tenen primitiva. En efecte observeu que, si u és harmònica:

  $$\partial_y\left(-\partial_y u(x,y) - \int \partial^2_{xx}u(x,y)\,dy\right) = 0.$$

- Podem començar amb

  $$v(x,y) = -\int \partial_y u(x,y)\,dx + \omega(y)$$

  i procedir anàlogament.

En el nostre cas:

$$v(x,y) = \int [3ax^2 - 3ay^2 - 6dxy]\,dy + \omega(x) = 3ax^2y - ay^3 - 3dxy^2 + \omega(x)$$

i llavors, imposant $\partial_x v = -\partial_y u = -[-6axy + 3dy^2 - 3dx^2]$, tindrem que

$$\partial_x v(x,y) = 6axy - 3dy^2 + \omega'(x) = 6axy - 3dy^2 + 3dx^2 \iff \omega'(x) = 3dx^2 \iff \omega(x) = dx^3 + C.$$

Per tant, $v(x,y) = 3ax^2y - ay^3 - 3dxy^2 + dx^3 + C$ amb C qualsevol constant complexa.

17. Demostreu que $u = \log(x^2+y^2)$ és harmònica a $R^2\setminus\{(0,0)\}$ però no existeix una funció v tal que $u + iv$ sigui holomorfa en aquest conjunt.

Resolució: Observeu que el domini $U = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ no és simplement connex.

Tenim que $u = u(z,\bar{z}) = \log(z\bar{z})$ i és una funció C^∞ a U. Per tant, pel problema 14 només cal comprovar que $0 = \partial^2_{z\bar{z}} u$ que és evident perquè $\partial_z u = z^{-1}$ que no depén de $\bar{z}$.

Pasem a coordenades polars i trobem $v(r,\theta)$ tal que $f(z) = \log(r^2) + iv(r,\theta)$ sigui holomorfa, és a dir que satisfagui les equacions de Cauchy-Riemann. Pel problema 12, sabem que cal

$$\partial_r u = \frac{1}{r}\partial_\theta v, \qquad \partial_r v = -\frac{1}{r}\partial_\theta u.$$

En el nostre cas,

$$\partial_\theta v = 2, \qquad \partial_r v = 0$$

i per tant $v(r,\theta) = 2\theta + C$.

Tornem ara a les coordenades cartesianes (ja que el domini U està definit en aquestes coordenades). Llavors

$$v(x,y) = 2\arg(x+iy)$$

i la funció arg no és pot definir de manera contínua a U. En efecte, sigui $z_0 = -x_0$, un nombre real negatiu, llavors, si $z_n^{\pm} = z_0 \pm i\frac{1}{n} = -x_0 \pm i\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \arg(z_n^{\pm}) = \pm\pi.$$

18. Determineu el radi de convergència de les sèries següents.

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^p z^n \ (p \in \mathbb{R})$

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n n^p z^n \ (p \in \mathbb{R})$

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{4^n + 3n} z^n$

(iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^n \ (|a| < 1)$

(v) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\log n)^2 z^n$

(vi) $\sum_{n\geq 0} n! z^n$

(vii) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$

(viii) $\sum_{n\geq 0} \cos(in) z^n$

(ix) $\sum_{n\geq 0} z^{5n}$

(x) $\sum_{n\geq 0} z^{n!}$

Resolució: El radi de convergència d'una sèrie de potències $\sum_n a_n z^n$ es defineix com $R > 0$ satisfent

$$R^{-1} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Si el $\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ existeix, llavors

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

(i), (ii) En els dos casos tenim que $|a_n| = n^p$, per tant:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 \iff R = 1.$$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(4^{n+1} + 3(n+1))}{(n+1)^2(4^n + 3n)} = 4 \iff R = 4.$$

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} \left(a^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^n = 0, \text{ ja que } |a| < 1 \iff R = \infty$$

(v)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{\log(n+1)} = 1 \iff R = 1.$$

(vi)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \iff R = 0.$$

(vii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^3\big(3(n+1)\big)!}{\big((n+1)!\big)^3(3n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = 27 \iff R = 27.$$

Exercici: Utilitzeu la fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

i veieu que $\frac{1}{27} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(viii) Noteu que $|\cos(in)| = \cosh n$. Llavors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e \left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = e \Longleftrightarrow R = \frac{1}{e}.$$

(ix) S'ha d'anar en compte. En aquest cas, $a_n = 1$, si $n = 5m$ i $a_n = 0$ en cas contrari. Per tant, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ no existeix. Ara bé, és clar que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

ja que $|a_n| \le 1$ i la parcial $a_{5n} = 1$ és tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[5n]{|a_{5n}|} = 1$. Per tant $R = 1$. Alternativament podem redefinir la sèrie de potències $\sum_{n\ge 0} z^{5n}$ perquè tingui com a variable $y = z^5$, obtenint la sèrie $\sum_{n\ge0} y^n$ que clarament té radi de convergència 1. Llavors $|y| < R$ implica $|z|^5 < R$ i per tant la sèrie (amb z) té radi de convergència $R^{1/5} = 1$.

(x) Anàlogament al cas (ix),

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

ja que $|a_n| \le 1$ i la parcial $a_{n!} = 1$ és tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{|a_{n!}|} = 1$. Per tant $R = 1$.

20. Escriviu les funcions següents com a sèries de potències $\sum_{n\ge0} a_n z^n$. Doneu el radi de convergència en cada cas.

$$\text{(i)}\ \frac{1}{2z+5} \qquad \text{(ii)}\ \frac{1}{1+z^4} \qquad \text{(iii)}\ \frac{1+iz}{i-iz}$$
$$\text{(iv)}\ \frac{1}{z^2+3z+2} \qquad \text{(v)}\ \frac{1}{(i-z)^2}.$$

Resolució: Recordeu que el radi de convergència R d'una sèrie de potències $\sum_{n\ge0} a_n z^n$ es defineix per $R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|^n}$. També, en cas de que el límit existeixi, tenim que $R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n+1|}{|a_n|}$.

Tota l'estona farem servir que, per $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\ge0} z^n, \qquad R = 1.$$

Recordeu a més que si R és el radi de convergència d'una sèrie de potències $\sum_{n\ge0} a_n z^n$, llavors per a tot $|z| < R$, la sèrie defineix una funció holomorfa a $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ i per $z \in D(0,R)$:

$$f'(z) = \sum_{n\ge1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\ge0} (n+1) a_{n+1} z^n, \qquad F(z) = C + \sum_{n\ge0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = C + \sum_{n\ge1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

amb $F'(z) = f(z)$. Observeu que el radi de convergència per les sèries de potències associades a f' i F és també R.

(i) En aquest cas:

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{2}{5}z} = \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{5}\right)^n z^n.$$

El radi de convergència és $R = \frac{5}{2}$.

(ii) Clarament

$$\frac{1}{1+z^4} = \sum_{n\geq 0}(-1)z^{4n}, \qquad R = 1.$$

(iii) Tenim que

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{-1+iz}{1-iz} + \frac{2}{1-iz} = -1 + 2\sum_{n\geq 0}(iz)^n = 1 + 2\sum_{n\geq 1}(iz)^n,$$

amb $R = 1$.

(iv) Tenim que $z^2+3z+2 = (z+1)(z+2)$. Fent la descomposició en fraccions simples:

$$\frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+2)} \Longrightarrow A = -B = 1.$$

Per tant

$$\frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n$$
$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

El radi de convergència és $R = 1$.

Observació 1.1 *Aquí hem sumat i restat sèries sense preocupar-nos quan era convergent o no. Al final, però hem aconseguit una sèrie de potències tal com la volíem. Per unicitat del desenvolupament de Taylor, sabem que és aquesta sèrie. Per tant a posteriori la teoria ens dóna la seguretat que hem trobat la sèrie correcta.*

Observeu també que el radi de convergència és el mínim dels radis de convergència de les sèries que defineixen $\frac{1}{z+1}$ *i* $\frac{1}{z+2}$.

(v) Definim la funció $f(z) = \frac{1}{i-z}$ que és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash\{i\}$. La sèrie de potències centrada a l'origen de f és

$$\frac{1}{i}\frac{1}{1+iz} = -i\sum_{n\geq 0}(-1)^n(iz)^n$$

que té radi de convergència $R = 1$. És clar que $f'(z) = \frac{1}{(i-z)^2}$, per tant, la sèrie de potències que defineix f' té radi de convergència $R = 1$ i

$$f'(z) = -i\sum_{n\geq 1} n(-1)^n i^n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)(-1)^{n+1}i^n z^n.$$

21. Desenvolupeu

(i) $(1-z)^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, en sèrie de potències de z.

(ii) $\dfrac{2z+3}{z+1}$ en sèrie de potencies de $z-1$.

(iii) Desenvolupeu $\dfrac{1}{1+z^2}$ en sèrie de potències de $z-a$ ($a \in \mathbb{R}$). Trobeu el coeficient general si $a=1$ i reduïu-lo a la forma més simple possible.

Doneu el radi de convergència en cada cas.

Resolució:

(i) Prenem $f(z) = (1-z)^{-m}$ i derivant obtenim:

$$f'(z) = m(1-z)^{-m-1}, \qquad f''(z) = m(m+1)(1-z)^{-m-1}, \cdots$$

i, en general:

$$f^{(k)}(z) = m(m+1)\cdots(m+k-1)(1-z)^{-m-k}.$$

Aleshores, usant la formula de Taylor, tenim

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k\geq 0} \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!} z^k.$$

Aquesta sèrie té radi de convergencia 1, resultat que ja era "esperable"perquè la funció té una singularitat a $z=1$ que és a distància 1 de l'origen.

Per altra banda, recordem aquí que, si $n \in \mathbb{N}$, tenim:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

ara bé, la segona expressió està definida per a n, qualsevol nombre real i per conveni la prendrem com a definició. Usant aquesta notació és fàcil veure, tal com hem fet abans amb f, que la funció:

$$g(w) := (1+w)^\alpha = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} w^k = \sum_{k\geq 0} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) w^k$$

Observem que si prenem $\alpha = -m$ i $w = -z$ tenim

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k\geq 0} \left(\begin{array}{c} -m \\ k \end{array} \right) (-z)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{-m(-m-1)\cdots(-m-k+1)}{k!} (-z)^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!} z^k \end{aligned}$$

(ii) Per desenvolupar la funció $\frac{2z+3}{z+1}$ en sèrie de potencies de $z-1$, és millor fer primer la divisió de polinomis:

$$\begin{aligned} \frac{2z+3}{z+1} &= 2 + \frac{1}{z+1} = 2 + \frac{1}{z-1+2} = 2 + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = 2 + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n \\ &= 2 + \sum_{k\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^n \end{aligned}$$

El radi de convergència d'aquesta sèrie és $R = 2$, resultat esperable perque la funció té una singularitat a $z = -1$ i aquest punt és a distància 2 del centre del disc (que és a $z = 1$).

iii) Per desenvolupar la funció $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ en sèrie de potències de $z - a$, on $a \in \mathbb{R}$, primer la descomposem en fraccions simples:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-iz} + \frac{1}{1+iz}\right]$$

Per altra banda tenim:

$$\frac{1}{1-iz} = \frac{1}{1-ia-i(z-a)} = \frac{1}{1-ia}\frac{1}{1-\frac{i}{1-ia}(z-a)} = \frac{1}{1-ia}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{i}{1-ia}\right)^n (z-a)^n$$

Igualment:

$$\frac{1}{1+iz} = \frac{1}{1+ia-i(z-a)} = \frac{1}{1+ia}\frac{1}{1+\frac{i}{1+ia}(z-a)}$$

Aleshores, sumant les dues sèries tenim:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} i^n \left(\left(\frac{1}{1-ia}\right)^{n+1} + (-1)^n\left(\frac{1}{1+ia}\right)^{n+1}\right)(z-a)^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} i^n \left(\frac{(1+ia)^{n+1} + (-1)^n(1-ia)^{n+1}}{(1+a^2)^{n+1}}\right)(z-a)^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} i^{2n+1}\frac{(a-i)^{n+1} - (a+i)^{n+1}}{(1+a^2)^{n+1}}(z-a)^n \\
&= \frac{i}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(a-i)^{n+1} - (a+i)^{n+1}}{(1+a^2)^{n+1}}(z-a)^n
\end{aligned}$$

Observem ara que, com $a \in \mathbb{R}$, si anomenem $\alpha = \arg(a+i)$ i usem que $|a+i|^2 = a^2+1$ tenim

$$a+i = (\sqrt{a^2+1})e^{i\alpha}, \quad a-i = (\sqrt{a^2+1})e^{-i\alpha}$$

per tant:

$$f(z) = \frac{i}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{e^{-i(n+1)\alpha} - e^{i(n+1)\alpha}}{(a^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}(z-a)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{a^2+1})^{n+1}}\sin\left((n+1)\alpha\right)\,(z-a)^n$$

És senzill veure que el radi de convergència d'aquesta sèrie és igual a $R = \sqrt{a^2+1}$, resultat esperable ja que la funció té una singularitat en $z = i$ que és a una distància $\sqrt{a^2+1}$ del punt $z = a$ que és el centre del disc de convergència.
En el cas $a = 1$ tenim, $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}$ i $\alpha = \frac{\pi}{4}$, per tant

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)(z-1)^n$$

22. Per a quins valors de $z \in \mathbb{C}$ és convergent $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$?

Resolució: Anomenem $w = z/(1+z)$. La sèrie $\sum_{n\geq 0} w^n$ és convergent si i només si $|w| < 1$. Això és cert perquè, és clar que si $|w| < 1$ la sèrie és absolutament convergent i, de fet,

$$\sum_{n\geq 0} w^n = \frac{1}{1-w}.$$

D'altra banda, quan $|w| \geq 1$, $\lim_{n\to 0} w^n \neq 0$ i per tant la sèrie és divergent.

Per tant els valors de z que satisfan que la sèrie és convergent són els que satisfant

$$\left|\frac{z}{1+z}\right| < 1 \iff |z|^2 < |1+z|^2 \iff 0 < 1 + 2\operatorname{Re} z.$$

Observeu que, quan la sèrie és convergent, defineix la funció

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{1+z}} = 1+z$$

que és entera.

23. Els nombres de Fibonacci són definits per la recurrència $c_0 = c_1 = 1$ i $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$. Demostreu que $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ és el desenvolupament en sèrie d'una funció racional i trobeu una expressió tancada de c_n.

Resolució: Prenem $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ i calculem:

$$zf(z) + z^2 f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^{n+1} + \sum_{n\geq 0} c_n z^{n+2} = \sum_{k\geq 1} c_{k-1} z^k + \sum_{k\geq 2} c_{k-2} z^k \tag{1.3}$$

$$= c_0 z + \sum_{k\geq 2}(c_{k-1} + c_{k-2}) z^k = c_0 z + \sum_{k\geq 2} c_k z^k = c_0 z + f(z) - c_0 - c_1 z \tag{1.4}$$

Usant que $c_0 = c_1 = 1$ i aillant $f(z)$ tenim

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$$

Ara desenvolupem $f(z)$ en sèrie de potències descomposant-la en fraccions simples. Els zeros de $1 - z - z^2 = 0$ són

$$z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} := \gamma, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -\frac{1}{\gamma}$$

I tenim:

$$f(z) = -\frac{\gamma}{\gamma^2+1}\left(\frac{1}{z-\gamma} - \frac{1}{z+\frac{1}{\gamma}}\right) = -\frac{\gamma}{\gamma^2+1}\left(\frac{1}{-\gamma}\frac{1}{1-\frac{z}{\gamma}} - \gamma\frac{1}{1+\gamma z}\right) \tag{1.5}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma^2+1}\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^n + \gamma\sum_{n\geq 0}(-\gamma z)^n\right) = \frac{\gamma}{\gamma^2+1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{\gamma^{n+1}} + (-1)^n\gamma^{n+1}\right) z^n \tag{1.6}$$

Usem ara que el desenvolupament de Taylor és únic i tenim:

$$c_n = \frac{\gamma}{\gamma^2+1}\left(\frac{1}{\gamma^{n+1}} + (-1)^n\gamma^{n+1}\right)$$

Observem que tenim

$$c_0 = \frac{\gamma}{\gamma^2+1}\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right) = 1 \tag{1.7}$$

i usant que $1-\gamma-\gamma^2=0$:

$$c_1 = \frac{\gamma}{\gamma^2+1}\left(\frac{1}{\gamma^2} - \gamma^2\right) = \frac{1}{\gamma^2+1}\frac{1-\gamma^4}{\gamma} = \frac{1-\gamma^2}{\gamma} = 1 \tag{1.8}$$

També podem veure que els coeficients obtinguts verifiquen la recurrència $c_{n-2}+c_{n-1}=c_n$. Per això, només cal comprovar que:

$$\frac{1}{\gamma^{n-1}} + (-1)^{n-2}(\gamma)^{n-1} + \frac{1}{\gamma^n} + (-1)^{n-1}(\gamma)^n = \frac{1}{\gamma^{n+1}} + (-1)^n(\gamma)^{n+1} \tag{1.9}$$

Efectivament:

$$\frac{1}{\gamma^{n-1}} + (-1)^{n-2}(\gamma)^{n-1} + \frac{1}{\gamma^n} + (-1)^{n-1}\gamma^n = \frac{1}{\gamma^n}(\gamma+1) + (-1)^{n-2}\gamma^n\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)$$

usem ara que

$$(-1)^{n-2} = (-1)^n, \quad \gamma^2+\gamma-1=0 \Longrightarrow \gamma+1 = \frac{1}{\gamma},$$

i tenim el resultat (1.9).

Per acabar, oservem que com $0<\gamma<1$:

$$\lim(c_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\gamma}$$

i, per tant, el radi de convergència de la série de Taylor de $f(z)$ és γ, resultat esperable ja que les singularitats de $f(z)$ són a $z_1=\gamma$ i $z_2=-\frac{1}{\gamma}<-1$, així doncs la singularitat més propera a l'origen és γ i ens dóna el radi de convergència de la sèrie.

24. La funció de Bessel de primera classe d'ordre zero $J_0(z)$ és l'única funció desenvolupable en sèrie de potències a l'origen tal que

$$z^2J_0''(z) + zJ_0'(z) + z^2J_0(z) = 0, \qquad J_0(0)=1,\ J_0'(0)=0.$$

Trobeu la seva sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ i proveu que defineix una funció entera.

Resolució: En el disc de convergència (si en té) la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ que defineix J_0 ha de satisfer l'equació diferencial que la defineix. Per tant:

$$z^2\sum_{n\geq 2} a_nn(n-1)z^{n-2} + z\sum_{n\geq 1} a_nnz^{n-1} + z^2\sum_{n\geq 0} a_nz^n = 0$$

o el que és el mateix:

$$\sum_{n\geq 2}\big[a_n[n(n-1)+n]+a_{n-2}\big]z^n=0. \tag{1.10}$$

Com el desenvolupament en sèrie de potències és únic, els coeficients de la sèrie de potències de la part esquerra de (1.10) han de ser 0:

$$a_n n^2+a_{n-2}=0 \Longleftrightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{n^2}. \tag{1.11}$$

Fem servir ara les condicions inicials $J_0(0)=1$ i $J_0'(0)=0$. És clar que $J_0(0)=a_0$ i $J_0'(0)=1$. Per tant $a_0=1$ i $a_1=0$. Fent servir la recurrència (1.11), tenim que

$$a_{2k-1}=0, \qquad a_{2k}=\frac{(-1)^k}{[2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2]^2}=\frac{(-1)^k}{[(2k)!!]^2}.$$

Observeu que la funció, $J_0(z)$, definida per la sèrie

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}z^n$$

té radi de convergència $R=\infty$ i per tant és una funció entera.

25. Considereu la sèrie de potències $g(z)=\sum_{n\geq 0} g_n z^n$ i un nombre complex $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Volem trobar una nova sèrie de potències $f(z)=\sum_{n\geq 0} f_n z^n$ tal que:

$$f(\lambda z)-f(z)=g(z).$$

Dita equació es coneix com *equació cohomològica* per $f(z)$.

(i) **Càlcul formal**. Si suposem $g_0=0$ i $\lambda^n\neq 1$, per a tot $n\in\mathbb{N}$, proveu que existeix una única solució formal per f de l'equació cohomològica excepte pel valor de f_0 que és lliure.

(ii) **Convergència**. Rslacioneu el radi de convergència de $f(z)$ amb el de $g(z)$ en els casos següents:

(a) Si $|\lambda|\neq 1$.

(b) Si $|\lambda|=1$ però λ compleix una *condició diofàntica* de la forma:

$$|\lambda^n-1|\geq\frac{C}{n^\tau}, \qquad \forall n\geq 1,$$

per unes certes constants $C>0$ i $\tau>1$.

Resolució: Siguin $g(z)=\sum_{n\geq 0} g_n z^n$, $f(z)=\sum_{n\geq 0} f_n z^n$, verificant:

$$f(\lambda z)-f(z)=g(z)$$

(i) **Càlcul formal**. Com $f(\lambda z)=\sum_{n\geq 0} f_n\lambda^n z^n$, si desenvolupem l'equació homològica en sèrie tenim:

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda^n-1)f_n z^n=\sum_{n\geq 0} g_n z^n.$$

Per tant, per $n = 0$ tenim:

$$0 \cdot f_0 = g_0$$

i aquesta equació només té solució si $g_0 = 0$. Observem que el valor de f_0 pot ser qualsevol. Per $n \geq 1$ tenim:

$$f_n = \frac{g_n}{(\lambda^n - 1)},$$

com $\lambda^n \neq 1$, per a $n \in \mathbb{N}$ sempre podem trobar els coeficients f_n.

(ii) **Convergència**. Sigui R_g el radi de convergència de g: $\frac{1}{R_g} = \limsup(|g_n|)^{\frac{1}{n}}$. Anomenem R_f al radi de convergència de f, per tant: $\frac{1}{R_f} = \limsup(\frac{|g_n|}{(|\lambda^n - 1|)})^{\frac{1}{n}}$.

a) $|\lambda| \neq 1$, Observem que $\lambda = re^{i\alpha}$, per tant

$$|\lambda^n - 1|^2 = |r^n e^{in\alpha} - 1|^2 = (|r^n e^{in\alpha} - 1)(r^n e^{-in\alpha} - 1|) = |r^{2n} - 2r^n \cos(n\alpha) - 1|.$$

Així:

$$L = \lim |\lambda^n - 1|^{\frac{1}{n}} = |r^{2n} - 2r^n \cos(n\alpha) - 1|^{\frac{1}{2n}}$$

Clarament:
- Si $r > 1$ tenim que $L = r \lim_{n\to\infty} |1 - 2r^{-n} \cos(n\alpha) - r^{-2n}|^{\frac{1}{2n}} = r = |\lambda|$
- Si $0 < r < 1$ tenim $L = \lim_{n\to\infty} |1 + 2r^n \cos(n\alpha) - r^{2n}|^{\frac{1}{2n}} = 1$

Deduïm per tant que $R_f = R_g|\lambda|$ si $|\lambda| > 1$ i $R_f = R_g$ si $|\lambda| < 1$.

b) Com $|\lambda| = 1$ tenim que $|\lambda^n - 1| < |\lambda^n| + 1 < 2$, per tant com $\lim(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}} = 1$:

$$\frac{1}{R_f} > \limsup \left(\frac{g_n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R_g}$$

Per altra banda, com treballem amb successions positives:

$$\frac{1}{R_f} \leq \limsup(g_n)^{\frac{1}{n}} \limsup \left(\frac{C}{n^\tau}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R_g}$$

on hem usat que $\lim(\frac{C}{n^\tau})^{\frac{1}{n}} = 1$.
Per tant $R_f = R_g$.

26. Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ amb radi de convergència 1. Definim $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ per $|z| < 1$.

(i) Demostreu que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$, $0 \leq r < 1$.

(ii) Si f és injectiva, Àrea $\left[f\left(D_r(0)\right)\right] = \pi \sum_{n\geq 0} n|a_n|^2 r^{2n}$, $0 < r < 1$. (Indicació: Useu el teorema del canvi de variable.)

Resolució: Recordeu que si una sèrie de potències centrada al 0, té radi de convergència $R > 0$, per a tot $z \in D_R(0) := \{w : |w| < R\}$ la sèrie és uniformement convergent i defineix una funció holomorfa f, a $D_R(0)$. A més, les sèries que resulten d'integrar i derivar terme a terme els elements de la sèrie, tenen radi de convergència R i defineixen funcions F i f' respectivament, satisfent que $F'(z) = f(z)$ i $f'(z)$ és la derivada de $f(z)$ per $z \in D_R(0)$.

Recordem també que si dues sèries de potències tenen radis de convergència $0 < R_1 \leq R_2$, llavors per a tot $z \in D_{R_1}(0)$, el producte de sèries, la suma i la diferència tenen radi de convergència R_1.

Farem servir aquestes propietats sense especial menció.

(i) Com $re^{i\theta}$ pertany al disc de convergència $D_1(0)$ si $0 \leq r < 1$, llavors

$$\left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \left(\sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}\right) = \sum_{n,m\geq 0} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i\theta(n-m)}.$$

Com la sèrie producte és uniformement convergent, $\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$ és la integral terme a terme de la sèrie que defineix $\left|f(re^{i\theta})\right|^2$. És a dir

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{n,m\geq 0} a_n\overline{a_m} r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}\, d\theta.$$

És clar que, si $n - m \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}\, d\theta = 0$$

i quan $n - m = 0$, $\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}\, d\theta = 2\pi$. Per tant

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n\geq 0} a_n\overline{a_n} r^{2n} = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$$

com volíem demostrar.

(ii) Observeu que f holomorfa i injectiva vol dir que $|f'(z)| \neq 0$. En efecte, si $f = u + iv$, injectiva vol dir que f com a funció de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ satisfà que

$$0 \neq \det Df(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{vmatrix} = \partial_x u(x,y)\partial_y v(x,y) - \partial_y u(x,y)\partial_x v(x,y).$$

Com f és holomorfa, satisfà les equacions de Cauchy-Riemann i a més la seva derivada compleix $f'(z) = \partial_x u(x,y)) + i\partial_x v(x,y)$. Per tant

$$0 \neq \det Df(x,y) = \left(\partial_x u(x,y)\right)^2 + \left(\partial_x v(x,y)\right)^2 = \left|f'(z)\right|^2. \tag{1.12}$$

Pensem ara en $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, en particular $D_r(0) \subset \mathbb{R}^2$. Llavors, fixat $0 < r < 1$:

$$\text{Àrea}\left[f(D_r(0)\right] = \int_{f(D_r(0))} 1\, dx\, dy.$$

Fem el canvi de variables definit com

$$(x,y) = f(s\cos\theta, s\sin\theta),$$

amb $\theta \in [0, 2\pi)$ i $0 < s < r < 1$. El Jacobià, $J(s,\theta)$, del canvi de variables ve donat per

$$J(s,\theta) = \det\left(Df(s\cos\theta, s\sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & -s\sin\theta \\ \sin\theta & s\cos\theta \end{pmatrix}\right).$$

Utilitzant (1.12) obtenim

$$J(s,\theta) = s\left|f'(se^{i\theta})\right|^2.$$

Per tant,

$$\text{Àrea}\,\big[f(D_r(0)\big] = \int_{f(D_r(0))} 1\,dx\,dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} s\big|f'(se^{i\theta})\big|^2\,d\theta\,ds. \tag{1.13}$$

D'altra banda

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n.$$

Utilitzant (i) per $f'(z)$ tenim que:

$$\int_0^{2\pi} \big|f'(se^{i\theta})\big|^2\,d\theta = 2\pi \sum_{n\geq 0}(n+1)^2|a_{n+1}|^2 s^{2n}.$$

Fent servir aquesta igualtat a (1.13) obtenim que:

$$\begin{aligned}\text{Àrea}\,\big[f(D_r(0)\big] &= \int_0^r s\left(\int_0^{2\pi}\big|f'(se^{i\theta})\big|^2\,d\theta\right)ds = 2\pi\int_0^r s\sum_{n\geq 0}(n+1)^2|a_{n+1}|^2 s^{2n}\,ds \\ &= 2\pi\sum_{n\geq 0}(n+1)^2|a_{n+1}|^2\frac{r^{2n+2}}{2n+2} = \pi\sum_{n\geq 0}(n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n+2} \\ &= \pi\sum_{n\geq 1} n|a_n|^2 r^{2n}.\end{aligned}$$

27. Les sèries de potències següents tenen radi de convergència igual a 1. Demostreu que:

(i) La sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} nz^n$ no convergeix en cap punt de la vora del cercle unitat.

(ii) La sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} z^n/n^2$ convergeix en tot punt del cercle unitat.

Resolució:

(i) Si $|z| = 1$ podem escriure $z = e^{i\theta}$ i per tant la sèrie de l'enunciat és

$$\sum_{n\geq 0} nz^n = \sum_{n\geq 0} n\cos(n\theta) + i\sum_{n\geq 0} n\sin(n\theta).$$

Ara bé, les sèries $\sum_{n\geq 0} n\cos(n\theta)$, $\sum_{n\geq 0} n\sin(n\theta)$ són sèries numèriques de números reals i recordem que si una sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent aleshores $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Per tant cap de les dues és convergent i això ens diu que $\sum_{n\geq 0} nz^n$ no és convergent.

(ii) Tenim que, si $|z| = 1$, la serie $\sum_{n\geq 1} |\frac{z^n}{n^2}| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ i aquesta suma és convergent. De fet la seva suma és coneguda: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Per nosaltres lo important és que la sèrie $\sum_{n\geq 1}|\frac{z^n}{n^2}|$ és convergent i per tant la sèrie $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$ és absolutament convergent i també convergent.

28. El criteri de convergència de Dedekind diu que si $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ són successions de nombres complexos per les quals:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \qquad \sup_{N\in\mathbb{N}}\left|\sum_{n=0}^N a_n\right| < +\infty, \qquad \sum_{n\geq 1}|b_n - b_{n-1}| < +\infty,$$

llavors la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ és convergent.

(i) Useu el criteri de Dedekind per provar que la sèrie de potències $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ (que té radi de convergència 1) convergeix en tot punt del cercle unitat excepte en $z = 1$.

(ii) Demostreu que $\log(1-z) = -\sum_{n\geq 1} z^n/n$ per a $z \in \overline{D_1(0)}\setminus\{1\}$ i deduïu les següents fórmules:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\log\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2},$$

per $0 < \theta < 2\pi$.

Resolució:

(i) És clar que la sèrie de potències de l'enunciat té radi de convergència 1. És clar també que si $z = 1$, la sèrie no és convergent. Fixat $z \in \overline{D_1(0)}\setminus\{1\}$, anomenem $a_n = z^n$ i $b_n = 1/n$. Tenim que $b_n \to 0$ quan $n \to \infty$ i a més

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-1)} < \infty.$$

Respecte a_n, si $z = e^{i\theta}$ amb $\theta \in (0, 2\pi)$, per $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} e^{i\theta n} = \frac{1-e^{i\theta(N+1)}}{1-e^{i\theta}}$$

ja que $e^{i\theta} \neq 1$. Així, per $\theta \in (0, 2\pi)$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} e^{i\theta n}\right| = \frac{|1-e^{i\theta(N+1)}|}{|1-e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$$

que és una cota independent de N. En conclusió, si $z \in \overline{D_1(0)}\setminus\{1\}$ el criteri de Dedekind conclou que $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ és convergent.

(ii) La igualtat $\log(1-z) = -\sum_{n\geq 1} z^n/n$ és trivialment certa per $|z| < 1$ ja que la sèrie té radi de convergència 1 i a més, si definim $f(z) = \log(1-z)$, $f'(z) = -(1-z)^{-1}$ i per tant, com $f(0) = 0$,

$$f'(z) = -\sum_{n\geq 0} z^n \Longrightarrow f(z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}.$$

Observació 1.2 *Recordeu que per poder definir la funció* $\log z$ *cal fixar primer el domini dels arguments sempre treient una semirrecta centrada a l'origen. Cada semirrecta dóna lloc al que s'anomena branca del logaritme. La branca principal és la que descarta la semirrecta* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ *i per tant els arguments* $arg(z) \in (-\pi, \pi)$*. Llavors*

$$\log z = \log|z| + i\arg(z), \qquad \arg(z) \in (-\pi, \pi).$$

Aquesta branca principal és la que hem escollit en la definició de

$$f(z) = \log(1-z) = \log|1-z| + i\arg(1-z), \qquad \arg(1-z) \in (-\pi, \pi).$$

Llavors la semirecta que estem treient és $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 1\}$*. Observeu que llavors* $f(0) = 0$.

Ara farem servir el criteri d'Abel (o més aviat un corol·lari d'ell).

Teorema 1.3 (Criteri d'Abel) *Sigui $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n f(z)$ una sèrie amb radi de convergència 1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergeix, aleshores $f(z)$ tendeix cap a $f(1)$ si $z \to 1$ amb $z \in \{|1-z| < M(1-|z|)\}$. En particular si $z \to 1^-$ ($z < 1$).*

La demostració d'aquest resultat la podeu trobar en els apunts de teoria.

Corol·lari 1.4 *En les mateixes hipòtesis que el criteri d'Abel, si $\sum_{n\geq 0} a_n e^{in\theta}$ convergeix, llavors $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ tendeix cap a $f(e^{i\theta})$ si $z \to e^{i\theta}$ i $z \in \{|e^{i\theta} - z| < M(1-|z|)\}$.*

Demostració. La funció $g(w) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{in\theta} w^n$ satisfà les condicions del teorema d'Abel. Per tant $g(w) \to g(1)$ o equivalentment $g(z) = g(ze^{-i\theta}) \to f(e^{i\theta})$. El domini on aquesta convergència és certa:

$$\{|w-1| < M(1-|w|)\} = \{|ze^{-i\theta} - 1| < M(1-|z|)\} = \{|z - e^{i\theta}| < M(1-|z|)\}$$

i el resultat està provat. ■

Definim $E_\theta = \{|z - e^{i\theta}| < M(1-|z|)\}$. Com per l'apartat (i) $\sum_{n\geq 0} e^{in\theta}/n$ és convergent per a tot $z = e^{i\theta}$, amb $\theta \in (0, 2\pi)$, aplicant el corol·lari (1.4) tenim que

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{z\to e^{i\theta}, z\in E_\theta} f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{e^{in\theta}}{n}, \qquad \theta \in (0, 2\pi).$$

Ara anem a veure les diferents igualtats que ens proposa l'enunciat.

- $-1 = e^{i\pi}$, $\theta = \pi$. Llavors

$$f(-1) = f(e^{i\pi}) = \log(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

- Sigui $\theta \in (0, 2\pi)$. Tenim que

$$z^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

  Per tant

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) = \log(1 - e^{i\theta}) &= \log|1 - e^{i\theta}| + i\arg(1 - e^{i\theta}) \\ &= -\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\cos n\theta}{n} + i\frac{\sin n\theta}{n} \right). \end{aligned}$$

  Les dues sèries són convergents (ja que són les parts reals i imaginària respectivament d'una sèrie convergent) i per tant

$$-\log|1 - e^{i\theta}| = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\theta}{n}, \qquad -\arg(1 - e^{i\theta}) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n\theta}{n}. \tag{1.14}$$

  - Demostrem ara la segona igualtat de l'enunciat (la que conté cosinus). Observem que

$$\begin{aligned} \log|1 - e^{i\theta}| &= \frac{1}{2}\log\left([1-\cos\theta]^2 + \sin^2\theta\right) = \frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\theta) = \frac{1}{2}\log\left(4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= \log\left|2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

Com $\sin(\theta/2) > 0$ si $\theta \in (0, 2\pi)$, la segona igualtat està demostrada utilitzant la igualtat de l'esquerra a (1.14).

– Ara la igualtat amb sinus. Tenim que $1 - e^{i\theta} = 1 - \cos\theta - i\sin(\theta)$. Ens cal trobar l'argument $\varphi \in (-\pi, \pi)$ (recordeu que estem treballant amb la branca principal del logaritme) d'aquest nombre complex, és a dir φ tal que $1 - e^{i\theta} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Calculem la tangent de φ:

$$\tan\varphi = \frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

A la darrera igualtat hem fet servir que $\sin(\theta/2) > 0$ per $\theta \in (0, 2\pi)$. Observeu llavors que

$$\tan\varphi = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$$

A més $\mathrm{Re}(1-e^{i\theta}) = 1-\cos\theta > 0$. Per tant $\cos\varphi > 0$ que implica que $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Com

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} < \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

concluïm que $\varphi = \arg(1 - e^{i\theta}) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$. Utilitzant (1.14)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin n\theta}{n} = -\arg(1 - e^{i\theta}) = \frac{\pi - \theta}{2}$$

com ens diu l'enunciat.

29. Considereu la sèrie de potències $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ i considereu les composicions:

$$E(z) = \exp(f(z)) = \sum_{n\geq 0} e_n z^n, \quad C(z) = \cos(f(z)) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n, \quad S(z) = \sin(f(z)) = \sum_{n\geq 0} s_n z^n.$$

(i) **Càlcul formal**:

(a) Comproveu que $E'(z) = f'(z)E(z)$ i deduïu un mètode eficient pel càlcul recursiu dels coeficients e_n.

(b) Deriveu $C(z)$ i $S(z)$ i deduïu del resultat un mètode eficient pel càlcul recursiu dels coeficients c_n i s_n.

(ii) **Convergència**: Justifiqueu que $E(z)$, $C(z)$ i $S(z)$ tenen, almenys, el mateix radi de convergència que $f(z)$.

Resolució:

(i) Càlcul formal

(a) Clarament $E'(z) = \exp(f(z))f'(z) = E(z)f'(z)$. Si igualem les sèries corresponents:

$$\sum_{n\geq 1} n e_n z^{n-1} = \left(\sum_{n\geq 1} n f_n z^{n-1}\right)\left(\sum_{n\geq 0} e_n z^n\right)$$

és a dir:

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)e_{k+1}z^k = \left(\sum_{k\geq 0}(k+1)f_{k+1}z^k\right)\left(\sum_{k\geq 0}e_k z^k\right) = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{l=0}^{k}e_l(k-l+1)f_{k-l+1}\right)z^k$$

Igualant coeficients del mateix grau:

$$(k+1)e_{k+1} = \sum_{l=0}^{k}e_l(k-l+1)f_{k-l+1}$$

Aquestes fórmules ens donen els coeficients e_k recursivament, començant per $e_0 = E(0) = \exp(f(0)) = \exp(f_0)$ i:

$$e_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}e_l(k-l+1)f_{k-l+1}, \quad k \geq 0$$

(b) Per $S(z)$ i $C(z)$ és millor treballar amb els dos a l'hora ja que:

$$C'(z) = -\sin(f(z))f'(z) = -S(z)f'(z) \quad S'(z) = \cos(f(z))f'(z) = C(z)f'(z)$$

Expressant les igualtats usant les sèries tenim:

$$\sum_{n\geq 1}nc_n z^{n-1} = -(\sum_{n\geq 1}nf_n z^{n-1})(\sum_{n\geq 0}s_n z^n) \tag{1.15}$$

$$\sum_{n\geq 1}ns_n z^{n-1} = (\sum_{n\geq 1}nf_n z^{n-1})(\sum_{n\geq 0}c_n z^n) \tag{1.16}$$

és a dir, procedint igual que abans:

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)c_{k+1}z^k = -\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{l=0}^{k}s_l(k-l+1)f_{k-l+1}\right)z^k \tag{1.17}$$

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)s_{k+1}z^k = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{l=0}^{k}c_l(k-l+1)f_{k-l+1}\right)z^k \tag{1.18}$$

Igualant coeficients del mateix grau:

$$c_{k+1} = -\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}s_l(k-l+1)f_{k-l+1} \quad k \geq 0 \tag{1.19}$$

$$s_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}c_l(k-l+1)f_{k-l+1} \quad k \geq 0 \tag{1.20}$$

Això ens dóna una recurrència per als coeficients c_k, s_k començant per

$$c_0 = \cos f_0, \quad s_0 = \sin f_0.$$

(ii) Convergència. Les funcions $e^z, \sin z, \cos z$ són funcions enteres. Com $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ té radi de convergència R, és holomorfa a $D_R(0)$. Així, $E(z), C(z), S(z)$ són funcions holomorfes, com a mínim, a $D_R(0)$ amb R el radi de convergència de f.

Veurem més endavant que la sèrie de potències centrada a l'origen d'una funció holomorfa en $D_R(0)$ té radi de convergència R.

Observació 1.5 *És cert que es pot veure la convergència d'aquestes sèries treballant amb les recurrències, però és feixuc i no és l'objectiu del problema.*

30. (i) Desenvolupeu la determinació principal del logaritme en $z = \mathrm{i}$.

(ii) Desenvolupeu la determinació principal de l'arrel quadrada en $z = 1$.

Resolució:

(i) Considerem la determinació principal de la funció logaritme, és a dir

$$f(z) = \log z = \log|z| + i\arg z, \qquad \arg z \in (-\pi, \pi)$$

de tal manera que si $z \in \mathbb{R}^+$ aleshores $\arg z = 0$ i per tant $\log z \in \mathbb{R}$.

Amb aquest conveni $\log i = \log 1 + i \arg i = i\frac{\pi}{2}$ i aquesta funció satisfà que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{i + z - i} = \frac{1}{i}\frac{1}{1 + \frac{z-i}{i}} = -i\frac{1}{1 - i(z-i)} = -i\sum_{n\geq 0}(i)^n(z-i)^n \\ &= -\sum_{n\geq 0}(i)^{n+1}(z-i)^n. \end{aligned}$$

Tenim doncs que, usant que $f(i) = i\frac{\pi}{2}$ i integrant formalment la sèrie:

$$f(z) = \log z = f_0 - \sum_{n\geq 0}(i)^{n+1}\frac{(z-i)^{n+1}}{n+1} = i\frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0}(i)^{n+1}\frac{(z-i)^{n+1}}{n+1}.$$

Aquesta sèrie té radi de convergència $R = 1$, resultat esperable ja que la determinació principal del logaritme té una singularitat en $z = 0$, que està a distància 1 del centre del disc de convergència que és a $z = i$.

(ii) Considerem la determinació principal de la funció arrel quadrada, és a dir

$$f(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\arg z}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z}{2}\right)\right),$$

on $\arg z \in (-\pi, \pi)$ de tal manera que si $z \in \mathbb{R}^+$ aleshores $\arg z = 0$ i per tant $\sqrt{z} \in \mathbb{R}^+$.

De fet recordem que, per definició,

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} &= \exp\left(\frac{1}{2}\log z\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\log|z| + i\arg z)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\log|z|\right)\exp\left(i\frac{1}{2}\arg z\right) \\ &= |z|^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\arg z}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Amb aquest conveni $\sqrt{1} = 1$ i aquesta funció és holomorfa en $z = 1$ i la podem desenvolupar formalment:

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}} = (1 + z - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Ara usarem el desenvolupament explicat al problema 21 de la funció

$$(1+\omega)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} \omega^n$$

amb el conveni de que $\binom{\alpha}{0} = 1$. Al nostre cas: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\omega = z-1$, per tant tenim:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (z-1)^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(z-1)^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-2n+3}{2}\right)}{n!}(z-1)^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1\ 3\ 5\cdots(2n-3)}{2^n\ n!}(z-1)^n. \end{aligned}$$

Calculem el radi de convergència d'aquesta sèrie fent el quocient de coeficients consecutius:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_n|}{|f_{n+1}|} = \frac{\dfrac{1\ 3\ 5\cdots(2n-3)}{2^n\ n!}}{\dfrac{1\ 3\ 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}\ (n+1)!}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = 1.$$

Aquesta sèrie té radi de convergència $R = 1$, resultat esperable ja que la determinació principal de la funció arrel quadrada té una singularitat en $z = 0$, que està a distància 1 del centre del disc de convergència que és a $z = 1$.

31. Calculeu el coeficient de z^7 en el desenvolupament de Taylor de $f(z) = \tan z$ en $z = 0$.

Resolució:

Una possibilitat per desenvolupar $f(z) = \tan z$ és usar que $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$ i usar que els desenvolupaments de les funcions $\sin z$ i $\cos z$ són coneguts. Aleshores escrivint:

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \mathcal{O}(z^9) \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \mathcal{O}(z^8) \end{aligned}$$

i dividint formalment aquestes expansions obtindrem el desenvolupament de $\tan z$ fins s grau z^7 (de fet fins al grau que vulguem).

Però una millor manera és usar que:

$$f'(z) = 1 + \tan^2(z) = 1 + f^2(z). \tag{1.21}$$

Aleshores, si escrivim $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$, tenim:

$$f'(z) = \sum_{n\geq 0} n f_n z^{n-1} = \sum_{k\geq 0} (k+1) f_{k+1} z^k$$

i

$$f^2(z) = \left(\sum_{n\geq 0} f_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} f_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k}\right) z^n.$$

És clar que $f(0) = 0$ és equivalent a $f_0 = 0$. Per tant a la suma anterior el terme d'ordre $\mathcal{O}(z^0)$ és $f_0^2 = 0$ i el terme $\mathcal{O}(z)$: $f_0 f_1 + f_1 f_0 = 0$. Així:

$$f^2(z) = \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k f_{n-k}\right) z^n.$$

Ara, substituïnt les sèries a l'igualtat (1.21):

$$\sum_{n\geq 0}(n+1) f_{n+1} z^n = 1 + \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k f_{n-k}\right) z^n.$$

Igualant els coeficients del mateix grau:

- grau zero: $f_1 = 1$
- grau 1: $2f_2 = 0$, per tant $f_2 = 0$.
- grau n:

$$f_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} f_k f_{n-k} \tag{1.22}$$

Observem que substituint es té que $f_3 = \frac{1}{3}$ i $f_4 = 0$, i és fàcil arribar amb aquesta fórmula recurrent a f_7.

Però tot sembla dir que els coeficients de grau parell seran 0 (ja sabem que la funció $\tan z$ és senar!). Anem a veure-ho per inducció. Suposem que ja hem vist que $f_0 = f_2 = \cdots = f_{2l} = 0$. Escrivim la recurrència pels dos coeficients següents. Si considerem $n = 2l$ a (1.22) i separem entre k parells i senars obtindrem:

$$\begin{aligned} f_{2l+1} &= \frac{1}{2l+1}\sum_{k=1}^{2l-1} f_k f_{2l-k} = \frac{1}{2l+1}\left(\sum_{j=1}^{l-1} f_{2j} f_{2l-2j} + \sum_{j=1}^{l} f_{2j-1} f_{2l-2j+1}\right) \\ &= \frac{1}{2l+1}\sum_{j=1}^{l} f_{2j-1} f_{2l-2j+1}. \end{aligned}$$

Per altra banda, per $n = 2l+1$ a (1.22), separant entre k parells i senars, tenim

$$\begin{aligned} f_{2l+2} &= \frac{1}{2l+2}\sum_{k=1}^{2l} f_k f_{2l+1-k} = \frac{1}{2l+2}\left(\sum_{j=1}^{l} f_{2j} f_{2l+1-2j} + \sum_{j=1}^{l} f_{2j-1} f_{2l-2j+2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Així hem demostrat que tots els coeficients parells són zero i els senars verifiquen: $f_1 = 1$ i

$$f_{2l+1} = \frac{1}{2l+1}\sum_{j=1}^{l} f_{2j-1} f_{2l-2j+1}.$$

Ara substituint en aquesta fórmula, és fàcil veure que $f_3 = \frac{1}{3}$, $f_5 = \frac{2}{15}$ i finalment, $f_7 = \frac{17}{315}$, de fet em vist que:

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \mathcal{O}(z^8).$$

32. Desenvolupeu $f(z) = \log\left(\frac{\sin z}{z}\right)$ fins el terme z^6 a l'origen. (Preneu log branca principal del logaritme.)

Resolució: Volem desenvolupar la funció $f(z) = \log\left(\frac{\sin z}{z}\right)$, prolongada amb $f(0) = 0$. Tenim

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \mathcal{O}(z^9)\right)\\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \mathcal{O}(z^8).\end{aligned}$$

Usant que $f(\omega) = \log(1+\omega)$ té derivada $f'(\omega) = \frac{1}{1+\omega} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\omega^n$ obtenim

$$\log(1+\omega) = \omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + \mathcal{O}(\omega^5).$$

Només desenvolupem el logaritme fins a grau 4 perquè quan composem les funcions, i per tant les sèries, tindrem

$$\omega = -\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \mathcal{O}(z^8).$$

Així doncs, composant formalment i observant que

$$\left(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \mathcal{O}(z^8)\right)^n = \mathcal{O}(z^{2n}),$$

tenim:

$$\begin{aligned}f(z) = &-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \mathcal{O}(z^8) - \frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \mathcal{O}(z^8)\right)^2\\ &+ \frac{1}{3}\left(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \mathcal{O}(z^8)\right)^3 + \mathcal{O}(z^8)\\ = &-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} - \frac{1}{2}\left(\frac{z^4}{(3!)^2} - 2\frac{z^6}{3!\,5!}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{z^6}{(3!)^3}\right) + \mathcal{O}(z^7).\end{aligned}$$

Observem que el coeficient de z^6 val:

$$-\frac{1}{7!} + \frac{1}{3!\,5!} - \frac{1}{3(3!)^3} = -\frac{1}{2835}.$$

33. Trobeu

(i) $\sin \mathrm{i}$, $\cos \mathrm{i}$, $\tan(1+\mathrm{i})$.

(ii) $\mathrm{Re}(\cos z)$ (useu les fórmules de la suma).

(iii) Si $\sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ i $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, trobeu com calcular sinh i cosh directament a partir de sin, cos i la multiplicació per i. Deduïu fórmules pel sinus i cosinus hiperbòlics de la suma de dos arguments.

Resolució: En aquest problema usem que, per $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Aquestes funcions verifiquen les regles usuals de la suma, producte, etc.

(i)
$$\sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i} = i\frac{e - e^{-1}}{2} = i \sinh 1, \qquad \cos i = \frac{e^{-1} + e}{2} = \cosh 1.$$

Anàlogament:

$$\tan(1+i) = \frac{\sin(1+i)}{\cos(1+i)} = \frac{\sin 1 \cos i + \cos 1 \sin i}{\cos 1 \cos i - \sin 1 \sin i} = \frac{\sin 1 \cosh 1 + \cos 1 \sinh 1}{\cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1}.$$

(ii) Si seguim la indicació, posant $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \left(\frac{e^{-y} + e^y}{2}\right) - \sin x \left(\frac{e^{-y} - e^y}{2i}\right) \\
&= \cos x \left(\frac{e^{-y} + e^y}{2}\right) + i \sin x \left(\frac{e^{-y} - e^y}{2}\right) \\
&= \cos x \left(\frac{e^{-y} + e^y}{2}\right) - i \sin x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) \\
&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y
\end{aligned}$$

per tant $\operatorname{Re}(\cos z) = \cos(\operatorname{Re} z)\cosh(\operatorname{Im} z)$.

(iii) De fet ja hem fet aquests càlculs a l'apartat anterior:

$$\begin{aligned}
\sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2i} = -i\frac{e^{-z} - e^z}{2i} = -i\frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = -i\sin(iz). \\
\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2} = \cos(iz).
\end{aligned}$$

34. Trobeu tots els possibles valors complexos per les expressions següents:

(i) $e^{-\pi \mathrm{i}/2}$.

(ii) $\log(-1)$.

(iii) $\log(\mathrm{i})$.

(iv) $\log(1+2\mathrm{i})$.

(v) i^{i}.

(vi) 2^{i}.

(vii) Part real i imaginària de z^z.

Resolució: En aquest problema usem que, donats dos nombres complexes $z, \omega \in \mathbb{C}$, es defineix

$$z^\omega = e^{\log z^\omega} = e^{\omega \log z}.$$

Denotarem per $k \in \mathbb{Z}$ qualsevol enter.

(a) Tenim:

$$e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -i.$$

(b)

$$\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(c)

$$\log(i) = \log 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

(d) Denotant $\alpha = \arctan 2$ i com $|1 + 2i| = \sqrt{5}$, tenim que:

$$\log(1 + 2i) = \log\sqrt{5} + i(\alpha + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

(e)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

(f)

$$2^i = e^{i \log 2} = e^{i(\log 2 + i(2k\pi))} = e^{i \log 2} e^{-2k\pi} = e^{-2k\pi}(\cos\log 2 + i \sin\log 2), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(g)

$$\begin{aligned} z^z &= e^{z \log z} = e^{z(\log|z| + i(\arg z + 2k\pi))} = e^{(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)(\log|z| + i(\arg z + 2k\pi))} \\ &= e^{(\operatorname{Re} z \log|z| - \operatorname{Im} z(\arg z + 2k\pi)) + i(\operatorname{Im} z \log|z| + \operatorname{Re} z(\arg z + 2k\pi))}. \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^z) &= e^{(\operatorname{Re} z \log|z| - \operatorname{Im} z(\arg z + 2k\pi))} \cos(\operatorname{Im} z \log|z| + \operatorname{Re} z(\arg z + 2k\pi)) \\ \operatorname{Im}(z^z) &= e^{(\operatorname{Re} z \log|z| - \operatorname{Im} z(\arg z + 2k\pi))} \sin(\operatorname{Im} z \log|z| + \operatorname{Re} z(\arg z + 2k\pi)). \end{aligned}$$

Observem que quan $z \in \mathbb{R}^+$, si prenem la determinació principal del log, és a dir, $\arg z = 0$ i $k = 0$, tenim la definició clàssica:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^z) &= e^{z \log z} \cos 0 = e^{z \log z} \\ \operatorname{Im}(z^z) &= e^{z \log z} \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

35. Resoleu les equacions següents.

(i) $\ln(\mathrm{i} - z) = 1$.

(ii) $e^{\mathrm{i}-z} = e$.

(iii) $e^{e^z} = 1$.

(iv) $z^3 = 2 + \mathrm{i}2\sqrt{3}$.

(v) $\sin z = 2$.

(vi) $\tan z = 2\mathrm{i}$.

(vii) $\cosh z = -1$.

Resolució: Com sempre denotem per k qualsevol enter $k \in \mathbb{Z}$.

(i) Per definició del log com alguna de les inverses de la exponencial, tenim que si $\log(i-z) = 1$ aleshores : $i - z = e$ per tant $z = i - e$.
Clarament $\log(i-z) = \log e = 1$.

(ii)
$$e^{i-z} = e \implies e^{-\operatorname{Re} z + i(1-\operatorname{Im} z)} = e = e^{1+2k\pi i}.$$
Igualant mòduls i arguments
$$e^{-\operatorname{Re} z} = e \implies -\operatorname{Re} z = 1$$
$$1 - \operatorname{Im} z = 2k\pi \implies \operatorname{Im} z = 1 - 2k\pi.$$
Per tant $z = -1 + i(1-2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$. Clarament $e^{i-z} = e^{1+2\pi k i} = e$.

(iii) Per alleujar la notació, escrivim $z = x + yi$. Aleshores
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \implies e^{e^z} = e^{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^{e^x \cos y + i e^x \sin y} = e^{e^x \cos y} e^{i e^x \sin y}.$$
Per tant, si prenem l'equació $e^{e^z} = 1$ i igualem mòdul i argument:
$$e^{e^x \cos y} = 1 \implies e^x \cos y = 0$$
$$e^x \sin y = 2\pi k.$$
Com $x \in \mathbb{R}$, sabem que $e^x > 0$, així la solució de la primera equació és:
$$\cos y = 0 \implies y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
Aleshores $\sin y_n = (-1)^n$ i la segona equació quedaria:
$$e^x(-1)^n = 2\pi k.$$
Usant una altra vegada que $e^x > 0$ tenim dues possibilitats:

- Si n, és parell o 0 l'equació:
$$e^x = 2\pi k$$
té solució amb $x \in \mathbb{R}$ si $k > 0$ i la solució és $x = \log(2\pi k)$.
- Si n és senar l'equació:
$$e^x = -2\pi k$$
té solució amb $x \in \mathbb{R}$ si $k < 0$ i la solució és $x = \log(-2\pi k)$.

Per tant les solucions es poden escriure com
$$z_{n,l} = \log(2\pi l) + i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l \in \mathbb{N}.$$
Observem que, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l \in \mathbb{N}$:
$$e^{z_{n,l}} = i2\pi l(-1)^n \implies e^{e^{z_{n,l}}} = \cos(2\pi l(-1)^n) + i\sin(2\pi l(-1)^n) = 1.$$

(iv)
$$z^3 = 2 + i2\sqrt{3} \implies z = (2 + i2\sqrt{3})^{1/3}.$$
Si escrivim els números en polars tenim $2 + i2\sqrt{3} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{3}+2\pi ik}$, $k \in \mathbb{Z}$ i podem fer l'arrel cúbica facilment:
$$z = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}}, \quad k = 0, 1, 2,$$
ja que els altres valor de k donarien un d'aquests tres números complexos.

(v)
$$\sin z = 2 \implies e^{iz} - e^{-iz} = 4i \implies e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$
Aquesta és una equació de segon grau en $u = e^{iz}$ amb solucions:
$$e^{iz} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = i(2 \pm \sqrt{3}).$$
Usant que $2 \pm \sqrt{3} \in \mathbb{R}^+$, obtenim
$$iz = \log(i(2 \pm \sqrt{3})) = \log(2 \pm \sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Així les solucions de l'equació són:
$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(vi)
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$
Per tant, l'equació $\tan z = 2i$ és equivalent a:
$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -2 \implies e^{iz} - e^{-iz} = -2e^{iz} - 2e^{-iz} \implies 3e^{iz} = -e^{-iz} \implies e^{2iz} = -\frac{1}{3}.$$
Tenim doncs que
$$2iz = \log\left(-\frac{1}{3}\right) = \log\frac{1}{3} + i(\pi + 2k\pi)$$
i per tant:
$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{i}{2}\log\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{i}{2}\log 3, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(vii)
$$\cosh z = -1 \implies e^z + e^{-z} = -2 \implies e^z + e^{-z} + 2 = 0.$$
Però $e^z + e^{-z} + 2 = (e^{z/2} + e^{-z/2})^2$, per tant:
$$e^{z/2} + e^{-z/2} = 0 \implies e^z + 1 = 0 \implies e^z = -1 \implies z = i(\pi + 2k\pi).$$

36. (i) Demostreu que per a cada $a \in \mathbb{C}$, $a \neq \pm\mathrm{i}$, l'equació $\tan(z) = a$ té infinites arrels. Per a $a = \pm\mathrm{i}$, $\tan(z) = a$ no té solució. Aquests valors reben el nom de $\arctan(a)$. (Indicació: Escriviu en termes del logaritme una fórmula per descriure les solucions de $\tan z = a$.)

(ii) Si tenim dues determinacions contínues de $\arctan(z)$ en un connex Ω, aquestes difereixen en un múltiple de π.

(iii) Doneu la determinació de $\arctan(z)$ que correspon a la principal del logaritme.

Resolució:

(i) Per fer aquest apartat anem a trobar una expressió de les possibles solucions de l'equació $\tan z = a$, tal com hem fet a l'apartat vi) del problema 35:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

i per tant, l'equació $\tan z = a$, és equivalent a:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = ia \implies e^{iz} - e^{-iz} = iae^{iz} + iae^{-iz} \implies (1 - ia)e^{iz} = (1 + ia)e^{-iz}.$$

Així doncs z ha de verificar:

$$(1 - ia)e^{2iz} = (1 + ia). \tag{1.23}$$

Llavors, si $(1 - ia) \neq 0$ i $(1 + ia) \neq 0$ (equivalentment $a \neq \pm i$):

$$2iz = \log\left(\frac{1 + ia}{1 - ia}\right) \implies z = -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1 + ia}{1 - ia}\right)$$

que té infinites solucions.

Si $a = i$ l'equació (1.23) no té solució ja que $2e^{2iz} = 0$, que no té solució.

Igualment, $a = -i$ l'equació (1.23) es trasforma en $0 = 2$, que és obviament falsa.

(ii) Tenim que cada branca de $\arctan a$

$$\arctan a = -\frac{i}{2}\log\frac{1 + ia}{1 - ia} = -\frac{i}{2}\log\left|\frac{1 + ia}{1 - ia}\right| + \frac{1}{2}\arg\left(\frac{1 + ia}{1 + ia}\right), \tag{1.24}$$

on haurem definit $\arg\omega$, per $\omega = \frac{1+ia}{1-ia}$ treient una semirecta de $\mathbb{C}$. Cada definició difereix de l'altra en un múltiple de 2π.

Sabem que dues branques del log contínues en un connex difereixen en un múltiple de $2\pi i$ una de l'altra. Anem a usar el mateix raonament en aquesta funció. Prenem dues branques contínues f i g de $\arctan a$ en un connex Ω. Considerem $h = \frac{f-g}{\pi}$. Per (1.24), h és una funció contínua i per cada $a \in \Omega$ $h(a) \in \mathbb{Z}$. Com Ω és connex i h és contínua existeix $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall a \in \Omega$, $h(a) = n$.

Per tant, a partir d'ara té sentit escriure:

$$\arctan a = -\frac{i}{2}\log\left|\frac{1 - ia}{1 + ia}\right| + \frac{1}{2}\arg\left(\frac{1 - ia}{1 + ia}\right) + \pi k, \quad z \in \mathbb{Z}$$

(iii) Si prenem la branca principal del $\log x$, cal que $\arg x \in (-\pi, \pi)$, per tant excloem la semirecta $x \in \mathbb{R}^-$. Cal doncs veure quins són els $a \in \mathbb{C}$ tals que : $\frac{1+ia}{1-ia} \in \mathbb{R}^-$. Per això resolem $\frac{1+ia}{1-ia} = x$ i obtenim $a = i\frac{1-x}{1+x}$. Ens interessa doncs veure la imatge de $x \leq 0$ per aquesta expressió. Es clar que a serà imaginari pur si $x \in \mathbb{R}^-$.

Si dibuixem la funció $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ és fàcil veure que:

- $x \in (-1,0]$ aleshores $f(x) \in [1,+\infty)$. Això vol dir que si $x \in (-1,0]$ aleshores $a \in i[1,+\infty)$
- $x \in (-\infty,-1)$ aleshores $f(x) \in (-\infty,-1)$. Això vol dir que si $x \in (-1,0]$ aleshores $a \in i(-\infty,-1)$

Així doncs la branca principal de la funció $\arctan a$ està definida a $\mathbb{C}$ menys les dues semirectes: $i[1,+\infty)$ i $i(-\infty,-1)$. A més, també en $\mathbb{C} \setminus (i[1,+\infty) \cup i(-\infty,-1))$, tenim la propietat que $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Observem que si $a \in \mathbb{R}$, aleshores $\overline{1+ia} = 1-ia$. Per tant $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$ que implica que $\log\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 0$, i a més, com $\arg(1+ia) = -\arg(1-ia)$, $\arg\left(\frac{1+ia}{1-ia}\right) = 2\arctan a$, per tant tenim la definició clàssica de $\arctan a$.

37. Proveu que existeix una determinació holomorfa per $\sqrt{1-z^2}$ en $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

Resolució:

Volem una determinació de l'arrel tal que $\sqrt{1-z^2}$ sigui holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

- Una primera idea seria usar que:

$$\sqrt{1-z^2} = e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)}$$

Si $f(z) = 1-z^2$, tenim que $f([-1,1]) = [0,1]$. Per tant ens caldria una determinació del logaritme que estigui definida i sigui holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [0,1]$, i això no és possible.

- Una possibilitat és usar que

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{z^2\left(\frac{1}{z^2}-1\right)} = \sqrt{z^2\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\frac{1}{z}+1\right)}$$

i aleshores definir

$$\sqrt{1-z^2} := z\sqrt{\frac{1}{z}-1}\sqrt{\frac{1}{z}+1}.$$

Però per donar sentit a aquesta fórmula cal definir bé els dominis de les funcions

$$f_1(z) = \sqrt{\frac{1}{z}-1}, \quad f_2(z) = \sqrt{\frac{1}{z}+1}.$$

Per la funció $f_1(z) = \sqrt{\frac{1}{z}-1}$ usem la determinació del log treient la semirecta $\mathbb{R}^+$ (i conseqüentment, $\arg\left(\frac{1}{z}-1\right) \in (0,2\pi)$). Per tant, $f_1(z)$ està definida si $\frac{1}{z}-1 \in \mathbb{C} \setminus [0,+\infty)$ és a dir, si $\frac{1}{z} \in \mathbb{C} \setminus [1,+\infty)$, o equivalentment, si $z \in \mathbb{C} \setminus (0,1]$.

Anàlogament, per la funció $f_2(z) = \sqrt{\frac{1}{z}+1}$ usarem la determinació del log treient la semirecta $\mathbb{R}^-$ (en altres paraules $\arg(\frac{1}{z}+1) \in (-\pi,\pi)$). En conseqüència, $f_2(z)$ està definida si $\frac{1}{z}+1 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$, és a dir si $\frac{1}{z} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,-1]$, o equivalentment si $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,0)$.

Triant aquestes determinacions, tenim una bona definició:

$$\sqrt{1-z^2} := z\sqrt{\frac{1}{z}-1}\sqrt{\frac{1}{z}+1},$$

per $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

- Una altra possibilitat seria prendre la definició següent:

$$\sqrt{1-z^2} := iz\sqrt{1-\frac{1}{z}}\sqrt{1+\frac{1}{z}}$$

  i prendre les dues arrels amb la determinació tal que $\sqrt{\omega}$, està definit a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, és a dir $\arg \omega \in (-\pi, \pi)$.

Resolucions de problemes, anàlisi complexa

21 d'abril de 2021

1 Teoria Local de Cauchy

1. Calculeu les següents integrals al llarg dels contorns γ que s'indiquen.

(i) $\int_\gamma |z|^2 dz$, on γ és la frontera del quadrat amb vèrtexs $0, 1, 1+i, i$, orientada en aquest ordre.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^2}$, on γ és l'arc de la circumferència unitat de i a 1 pel semiplà superior.

Resolució:

(i) Parametritzem $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$, essent

$$\gamma_j : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad j = 1,2,3,4,$$

definits per:

- $\gamma_1(t) = t$, que uneix $z_0 = 0$ amb $z_1 = 1$, verificant $\gamma_1'(t) = 1$.
- $\gamma_2(t) = 1 + it$, que uneix $z_1 = 1$ amb $z_2 = 1+i$, verificant $\gamma_2'(t) = i$.
- $\gamma_3(t) = 1 - t + i$, que uneix $z_2 = 1+i$ amb $z_3 = i$, verificant $\gamma_3'(t) = -1$.
- $\gamma_4(t) = (1-t)i$, que uneix $z_3 = i$ amb $z_0 = 0$, verificant $\gamma_4'(t) = -i$.

Aleshores tenim, usant la definició d'integral sobre camins i que, escrivint $z = x + iy$, $|z|^2 = x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma |z|^2 dz &= \int_0^1 t^2 dt + i\int_0^1 (1+t^2)dt - \int_0^1 ((1-t)^2+1)dt - i\int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (-2+2t)dt + i\int_0^1 2t dt = -1 + i.\end{aligned}$$

(ii) Per parametritzar aquest arc de circunferència podem usar:

$$\begin{aligned}&\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{C} \\ &t \to \gamma(t) = i\cos t + \sin t = i\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = e^{i(\frac{\pi}{2}-t)}.\end{aligned}$$

Aleshores

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^2} dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-ie^{i(\frac{\pi}{2}-t)}dt}{e^{-2i(\frac{\pi}{2}-t)}} = -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3i(\frac{\pi}{2}-t)}dt = \frac{-i}{-3i}\left[e^{3i(\frac{\pi}{2}-t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left[1 - e^{3i\frac{\pi}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{3}(1+i).\end{aligned}$$

2. Calculeu $\int_C (x^2 - iy^2)\, dz$, sent C:

(i) La paràbola $y = 3x^2 - 2x$ des de $(1,1)$ a $(2,8)$.

(ii) L'unió dels dos segments de $(1,1)$ a $(1,8)$ i de $(1,8)$ a $(2,8)$.

(iii) El segment de $(1,1)$ a $(2,8)$.

Resolució: Volem calcular $\int_C (x^2 - iy^2) dz$, on $z = x + iy$, en diferents camins C.

(i) Parametritzem la paràbola C amb la parametrització:

$$\gamma : [1,2] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = t + i(3t^2 - 2t).$$

Aleshores, usant que $\gamma'(t) = 1 + i(6t-2)$

$$\begin{aligned}\int_C x^2 - iy^2 dz &= \int_1^2 \left(t^2 - i(3t^2-2t)^2\right)(1+i(6t-2))dt \\ &= \int_1^2 (54t^5 - 90t^4 + 48t^3 - 7t^2)dt + i\int_1^2 (-9t^4 + 18t^3 - 6t^2)dt \\ &= \frac{518}{3} - i\frac{23}{10}.\end{aligned}$$

(ii) En aquest cas podem parametritzem el camí en dos troços, un pel segment vertical i l'altre per l'horitzontal, $C = \gamma_1 \vee \gamma_2$ amb:

- $\gamma_1 : [1,8] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = 1 + ti$, verificant $\gamma_1'(t) = i$.
- $\gamma_2 : [1,2] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = t + 8i$, verificant $\gamma_2'(t) = 1$.

Aleshores:

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - iy^2)dz &= \int_1^8 (1 - it^2)idt + \int_1^2 (t^2 - 64i)dt \\ &= i\left[t - i\frac{t^3}{3}\right]_1^8 + \left[\frac{t^3}{3} - 64it\right]_1^2 = \frac{518}{3} - 57i.\end{aligned}$$

(iii) Parametritzem pel segment que uneix els dos punts:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = 1 + i + t(1+7i) = (1+t) + i(1+7t), \qquad \text{verificant} \quad \gamma'(t) = (1+7i).$$

Aleshores:

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - iy^2)dz &= \int_0^1 \left((1+t)^2 - i(1+7t)^2\right)(1+7i)dt = (1+7i)\left[\frac{(1+t)^3}{3} - i\frac{(1+7t)^3}{21}\right]_0^1 \\ &= (1+7i)\left(\frac{7}{3} - \frac{511}{21}i\right) = \frac{518}{3} - 8i.\end{aligned}$$

3. Siguin a i b nombres reals amb $a > 0$. Avalueu les integrals

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)dx, \quad I_2 = \int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)dx$$

integrant la funció $e^{-z(a+ib)}$ al llarg del segment $[0,R]$. **Resolució:** Seguint les indicacions calculem $I_R = \int_{[0,R]} e^{-z(a+ib)}\, dz$, usant la parametrització:

$$\gamma : [0,R] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = t,$$

tenim:

$$I_R = \int_0^R e^{-t(a+ib)}\ dt = \int_0^R e^{-at}(\cos bt - i\sin bt)\ dt = \int_0^R e^{-at}\cos bt\ dt - i\int_0^R e^{-at}\sin bt\ dt.$$

Per altra banda, com la funció $e^{-z(a+ib)}$ és holomorfa:

$$I_R = \int_0^R e^{-z(a+ib)}\ dz = \frac{1}{-(a+bi)}\left[e^{-R(a+ib)} - 1\right] = \frac{1}{(a+bi)}\left[1 - e^{-R(a+ib)}\right].$$

Així, per a tot $R > 0$:

$$\int_0^R e^{-at}\cos bt\ dt - i\int_0^R e^{-at}\sin bt\ dt = \frac{1}{(a+bi)}\left[1 - e^{-R(a+ib)}\right].$$

Usem que $a > 0$ i prenem $R \to \infty$ a la igualtat anterior. Llavors

$$\int_0^\infty e^{-at}\cos bt\ dt - i\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\ dt = \frac{1}{(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

Es a dir

$$I_1 - iI_2 = \frac{a-bi}{a^2+b^2},$$

que és una identitat de números complexos. Igualant la part real i l'imaginària obtenim les integrals demanades:

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-at}\cos bt\ dt = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad I_2 = \int_0^\infty e^{-at}\sin bt\ dt = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

4. Sigui $P(z)$ un polinomi i γ la circumferència de centre z_0, radi R i orientació positiva. Demostreu que

$$\int_\gamma P(z)d\bar{z} = -2\pi i R^2 P'(z_0).$$

Resolució: Volem calcular $\int_\gamma P(z)\ d\bar{z}$, on γ és la circumferència de centre z_0 i radi R. recorreguda en sentit positiu.

Aclarim primer la definició de $\int_\gamma P(z)\ d\bar{z}$, on γ és un camí parametritzat per $\gamma(t)$, $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$:

$$\int_\gamma P(z)\ d\bar{z} = \int_a^b P(\gamma(t))\ \overline{\gamma'(t)}\ dt$$

Com $P(z)$ és un polinomi, anomanem n el seu grau i l'escrivim usant la fórmula de Taylor al voltant de z_0:

$$P(z) = P(z_0) + \frac{P'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{P''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 \ldots \frac{P^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

Per calcular la integral usarem la parametrització: $z = \gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Per tant, com $\overline{\gamma'(t)} = -iRe^{-it}$, tenim:

$$\int_\gamma P(z)\; d\bar{z} = -iR\int_0^{2\pi} P(z_0 + Re^{it})e^{-it}\; dt = -iR\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}R^k e^{ikt}e^{-it}\; dt$$
$$= -iR\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}R^k\int_0^{2\pi} e^{i(k-1)t}\; dt.$$

Ara observem que:

- Si $k \neq 1$, tenim que $\int_0^{2\pi} e^{i(k-1)t}\; dt = \int_0^{2\pi}\cos(k-1)t + i\sin(k-1)t\; dt = 0$. Per tant tots els termes del sumatori són zero excepte el que correspon a $k = 1$.
- Si $k = 1$, tenim que $\int_0^{2\pi} e^{i(k-1)t}\; dt = \int_0^{2\pi} 1\; dt = 2\pi$.

Llavors:

$$\int_\gamma P(z)\; d\bar{z} = -iRP'(z_0)R2\pi = -2\pi i R^2 P'(z_0).$$

5. Sigui f analítica en un $\overline{D}_1(0)$. Demostreu que

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{f(z)}{(1-\bar{z}\omega)^2}\, dS(z), \quad \forall \omega \in D_1(0).$$

Resolució: Volem calcular $\frac{1}{\pi}\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{f(z)}{(1-\bar{z}\omega)^2} dS(z)$, on $dS(z) = dx\; dy$ i $\overline{D}_1(0)$ és el disc tancat de radi 1 centrat al 0. Denotem per $C_1(0)$ la seva frontera, que és la circunferència de radi 1 centrada al 0.

De fet, el que provarem és que, anàlogament al que s'ha fet a teoria amb rectangles, si g és $\mathcal{C}^1(\overline{D}_1(0))$, aleshores:

$$\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g\; dS(z) = \int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g\; dx\; dy = \frac{1}{2i}\int_{C_1(0)} g(z)\; dz. \tag{1.1}$$

Efectivament, posant $g = u + iv$:

$$\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g\; dx\; dy = \frac{1}{2}\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{\partial}{\partial x}(u+iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)\; dx\; dy$$
$$= \frac{1}{2}\int\int_{\overline{D}_1(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\; dx\; dy.$$

Ara aplicarem el teorema de la divergència per camps $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$:

$$\int\int_{\overline{D}_1(0)} \mathrm{div} F dx\; dy = \int_{C_1(0)} F\cdot \mathbf{n}\; dz$$

on $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}y)$ és el vector normal exterior a la corba $C_1(0)$.

Usant aquest resultat per $F_1 = (u, -v)$ i $F_2 = (v, u)$ tenim:

$$\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g\; dx\; dy = \frac{1}{2}\int_{C_1(0)} (u\mathbf{n}_x - v\mathbf{n}_y) + i\,(v\mathbf{n}_x + u\mathbf{n}_y)\, dz = \frac{1}{2}\int_{C_1(0)} (u+iv)(\mathbf{n}_x + i\mathbf{n}_y) dz.$$

Si usem ara la parametrització de $C_1(0)$ donada per $\gamma(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, obervem que $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$, i $\mathbf{n}_x + i\mathbf{n}_y = \cos\theta + i\sin\theta = -i\gamma'(\theta)$. Per tant tenim:

$$\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g\ dx\ dy = \frac{1}{2}\int_{C_1(0)} (u+iv)(\mathbf{n}_x + i\mathbf{n}_y) = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} g\big(\gamma(\theta)\big)\gamma'(\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{2i}\int_{C_1(0)} g(z)dz.$$

Fixat $\omega \in \overline{D}_1(0)$, usem aquest resultat per la funció:

$$g(z) = \frac{f(z)}{1-\bar{z}\omega}.$$

Observem que, com $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, tenim que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\omega f(z)}{(1-\bar{z}\omega)^2}.$$

Aleshores usant (1.1) tenim:

$$\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{f(z)}{(1-\bar{z}\omega)^2}\ dx\ dy = \frac{1}{\omega}\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{\omega f(z)}{(1-\bar{z}\omega)^2}\ dx\ dy = \frac{1}{\omega}\int\int_{\overline{D}_1(0)} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\ dx\ dy$$
$$= \frac{1}{2i\omega}\int_{C_1(0)} g(z)dz = \frac{1}{2i\omega}\int_{C_1(0)} \frac{f(z)}{1-\bar{z}\omega}dz$$
$$= \frac{1}{2i\omega}\int_{C_1(0)} \frac{zf(z)}{z-|z|^2\omega}dz = \frac{1}{2i\omega}\int_{C_1(0)} \frac{zf(z)}{z-\omega}dz$$
$$= \frac{1}{2i\omega}2\pi i\omega f(\omega) = \pi f(\omega),$$

on hem usat que si $z \in C_1(0)$ llavors $|z| = 1$ i a la darrera igualtat hem utilitzat el teorema de Cauchy:

$$h(\omega) = \int_{C_1(0)} \frac{h(z)}{z-\omega}\ dz$$

per la funció $h(z) = zf(z)$ que és holomorfa a $\overline{D}_1(0)$ per hipòtesi. Per tant obtenim:

$$\frac{1}{\pi}\int\int_{\bar{D}_1(0)} \frac{f(z)}{(1-\bar{z}\omega)^2}\ dx\ dy = f(\omega).$$

6. Calculeu, parametritzant els cercles amb orientació directa,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}dz, \qquad \int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m}dz, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Resolució: Aquest problema es pot fer usant les fórmules de Cauchy en un disc D. Recordem que si tenim una funció contínua en $\overline{D}$ i holomorfa a D, aleshores, per $a \in D$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\ dz \qquad f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\ dz, \tag{1.2}$$

sempre prenent la parametrització de ∂D amb orientació positiva.

En el primer cas, tenim $f(z) = e^z$, $a = 0$, $k = n-1$ i D el disc de centre 0 i radi 1. Observeu que $a \in D$, f és holomorfa al disc i f és contínua a $\overline{D}$. Per tant és una aplicació directa de les fórmules de Cauchy:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{n-1}(0) = \frac{2\pi i}{(n-1)!},$$

on hem usat que si $f(z) = e^z$, aleshores $f^k(z) = e^z$, per a tot $k \geq 0$.

Si volem calcular aquesta integral parametritzant el disc sense usar les fórmules de Cauchy, podem fer-ho com a exercici, tot i que mai ho faríem. Fem-ho per "practicar". El que usarem és que e^z és una funció entera i per tant la seva sèrie de Taylor a l'origen,

$$e^z = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!},$$

té radi de convergència infinit. Com estem integrant al cercle unitat podrem desenvolupar e^z en sèrie, commutar la integral amb la sèrie (tenim convergència uniforme) i integrar terme a terme:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\, dz = \sum_{k\geq 0} \int_{|z|=1} \frac{z^{k-n}}{k!}\, dz = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \int_{|z|=1} z^{k-n}\, dz.$$

Parametritzem $\{|z| = 1\}$ per $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, amb $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$. Obtindrem:

$$\int_{|z|=1} z^{k-n}\, dz = i \int_0^{2\pi} e^{i(k-n+1)\theta}\, d\theta.$$

Observem que, si $k - n + 1 \neq 0$ aquesta integral val zero i que si $k - n + 1 = 0$ val 2π, per tant:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

La segona integral a l'enunciat també es fa usant les fórmules de Cauchy. Definim $f(z) = z^n$, $k = m-1$, $a = 1$ i D el disc de centre el 0 i radi 2. Tenim que $a \in D$, f és holomorfa al disc i f és contínua a $\overline{D}$ per tant:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m}\, dz = (-1)^m \int_{|z|=2} \frac{z^n}{(z-1)^m}\, dz = (-1)^m \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(1).$$

Ara observem que, com $f(z) = z^n$ és un polinomi de grau n, tenim:

- Si $m - 1 > n$, aleshores $f^{(m-1)}(z) = 0$ idènticament. Per tant en aquest cas:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m}\, dz = 0.$$

- Si $m - 1 \leq n$, tenim que $f^{(k)}(z) = n(n-1)\dots(n-k+1)z^{n-k}$, per a tot $0 \leq k \leq n$. Aleshores $f^{(m-1)}(1) = n(n-1)\dots(n-m+2)$ i per tant:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m}\, dz = (-1)^m \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{m-1}(1) = 2\pi i (-1)^m \frac{n(n-1)\dots(n-m+2)}{(m-1)!}.$$

Anem a calcular-la ara parametritzant amb $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, amb $\gamma'(\theta) = 2ie^{i\theta}$:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m}\, dz = 2^{n+1} i \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n+1)\theta}}{(1-2e^{i\theta})^m} d\theta = i(-1)^m 2^{n+1-m} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n+1-m)\theta}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\right)^m} d\theta.$$

Usem ara que, com $|\frac{1}{2}e^{-i\theta}| = \frac{1}{2}$, podem usar el desenvolupament en sèrie de la funció

$$g(z) = (1-z)^{-m} = \sum_{k\geq 0} \binom{-m}{k} z^k$$

que té radi de convergència $R = 1$. Per tant, com som dins el disc de convergència, podem commutar la integral i la sèrie obtenint:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^m}{(1-z)^n}\, dz = i(-1)^m 2^{n+1-m} \sum_{k\geq 0} \binom{-m}{k} \frac{(-1)^k}{2^k} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1-m-k)\theta} d\theta.$$

Fixem-nos que:

- Si $n+1-m < 0$, com $k \geq 0$ tenim que $n+1-m-k < 0$ no és mai zero i per tant totes les integrals s'anul·len donant que:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^n}\, dz = 0.$$

- Si $n+1-m \geq 0$, la única integral no nul·la correspon a $k = n+1-m$. Així

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^m}{(1-z)^m}\, dz &= i(-1)^m 2^{n+1-m} \sum_{k\geq 0} \binom{-m}{k} \frac{(-1)^k}{2^k} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1-m-k)\theta}\, d\theta \\ &= 2\pi i(-1)^{n+1} \binom{-m}{n+1-m}.\end{aligned}$$

  Ara només cal usar que:

$$\begin{aligned}\binom{-m}{n+1-m} &= \frac{(-m)(-m-1)\dots(-m-(n+1-m)+1)}{(n+1-m)!} = \frac{(-m)(-m-1)\dots(-n)}{(n+1-m)!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1-m} m(m+1)\dots(n)}{(n+1-m)!} = \frac{(-1)^{n+1-m} n\dots(m+1)m}{(n+1-m)!}\frac{(m-1)!}{(m-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1-m} n!}{(n+1-m)!(m-1)!} = \frac{(-1)^{n+1-m} n(n-1)\dots(n-m+2)}{(m-1)!}.\end{aligned}$$

  Substituint aquest valors a la fórmula obtinguda per la integral tenim:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^n}\, dz = 2\pi i(-1)^m \frac{n(n-1)\dots(n-m+2)}{(m-1)!}.$$

7. Proveu

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

usant $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ on γ és la corba amb parametrització $z(t) = a\cos t + ib\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Resolució: Observem que, si $a = b$, el resultat és obvi. Suposarem dons que $a \neq b$. Seguint la indicació calculem $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, on $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$, que és una el·lipse de semieixos a i b: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Usant la fórmula de Cauchy (1.2) amb $f(z) = 1$ i $a = 0$, tenim:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Observació 1.1 *A teoria us han provat que, si $w \in D$ amb D un disc, llavors,*

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z - w}$$

amb $\gamma = \partial D$ en sentit possitiu. La la demostració es pot adaptar fàcilment a una el·lipse. Si mireu la prova d'aquest resultat, el que fa és parametritzar la frontera del disc D com $z = w + \rho(\theta)e^{i\theta}$ i $\theta \in [0, 2\pi]$ amb $\rho(\theta)$ $\mathcal{C}^1$. La funció $\rho(\theta)$ varia amb θ ja que el punt w no té perquè ser el centre del disc.

En el nostre cas, la funció $\rho(\theta)$ és la que va donant els punts de l'el·lipse i per tant també depèn de θ. Per tant la prova és exactament igual. De fet la farem per a un punt w qualsevol. És a dir, podem parametritzar la frontera γ de l'el·lipse per $\gamma(\theta) = w + \rho(\theta)e^{i\theta}$, per $\theta \in I := [0, 2\pi]$ amb ρ funció $\mathcal{C}^1$, i $\rho(2\pi) = \rho(0)$. Llavors:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z - w}\, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho'(\theta)e^{i\theta} + i\rho(\theta)e^{i\theta}}{\rho(\theta)e^{i\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} + i\, d\theta \\ &= \left[\log\left(\rho(2\pi)\right) - \log\left(\rho(0)\right)\right] + i\int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi i,\end{aligned}$$

Per tant tenim, si γ és la vora de l'el·lipse (al nostre cas prenem $w = 0$):

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

Per altra banda, com $\gamma'(t) = -a\sin t + ib\cos t$,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin t + ib\cos t)(a\cos t - ib\sin t)}{(a\cos t + ib\sin t)(a\cos t - ib\sin t)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\sin t\cos t + abi(\cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt \\ &= (b^2 - a^2)\int_0^{2\pi} \frac{\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt + abi\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt.\end{aligned}$$

Com sabem que $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$ i $a \neq b$, tenim que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

De fet, la primera integral és zero perque la funció és periòdica i senar.

8. Calculeu, parametritzant els cercles amb orientació directa,

(i) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$.

(ii) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$.

(iii) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2-1}$.

Resolució: Per calcular aquestes integrals les descomposarem en fraccions simples i aleshores usarem la fórmula de Cauchy en un disc adequat:

(i) En aquesta integral usarem que la funció $\frac{1}{z+3}$ és holomorfa en el disc $D = D_2(0)$ de centre el 0 i radi 2, ja que $-3 \notin D_2(0)$. Per tant $\int_{|z|=2} \frac{1}{z+3}\, dz = 0$. Llavors:

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z+3)}\, dz = \frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\, dz - \frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{1}{z+3}\, dz = \frac{\pi i}{2}.$$

També podríem haver resolt aquest exercici usant la fórmula de Cauchy per la funció $f(z) = \frac{1}{z+3}$, sense descomposar en fraccions simples, i tindríem:

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z+3)}\, dz = \int_{|z|=2} \frac{\frac{1}{z+3}}{z-1}\, dz = \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-1}\, dz = 2\pi i f(1) = \frac{\pi i}{2}.$$

(ii) En aquest cas, $D = D_4(0)$ és el disc centrat a 0 i de radi 4. Per tant $1 \in D_4(0)$ i $-3 \in D_4(0)$:

$$\int_{|z|=4} \frac{1}{(z-1)(z+3)}\, dz = \frac{1}{4}\int_{|z|=4} \frac{1}{z-1}\, dz - \frac{1}{4}\int_{|z|=4} \frac{1}{z+3}\, dz = \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = 0.$$

(iii) En aquest cas, $D = D_3(0)$ és el disc centrat a 0 i de radi 3, per tant $1 \in D_3(0)$ i $-1 \in D_3(0)$:

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}\, dz = \frac{1}{2}\int_{|z|=3} \frac{1}{z-1}\, dz - \frac{1}{2}\int_{|z|=3} \frac{1}{z+1}\, dz = \pi i - \pi i = 0.$$

9. Sigui γ la frontera del quadrat amb vèrtexs ± 4, $\pm 4i$, parametritzada en sentit directe. Calculeu

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-\pi i)^4} dz$.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(2z)}{(z-\pi)^4} dz$.

(iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z \cos z}{(z-\pi)^3} dz$.

Resolució: Per calcular aquestes integrals usarem la fórmula de Cauchy en el rectangle R que té per frontera γ. A teoria us han provat aquesta fórmula per un cercle, però la demostració es pot adaptar fàcilment a un rectangle. És a dir, volem justificar que si R és un rectangle, f és una funció contínua a $\overline{R}$, holomorfa a R i $a \in R$, llavors

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a).$$

Per provar la fórmula de Cauchy a un disc D, s'usen dues coses:

- que la funció definida com:

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}, \quad \text{si } z \neq a, \qquad g(a) = f'(a)$$

  és holomorfa a $D \setminus \{a\}$ i contínua a D. Això també és veritat si substituïm D per R.

- que

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i.$$

  Si mireu la prova d'aquest resultat, el que fa és parametritzar la frontera del disc D com $z = a + \rho(\theta)e^{i\theta}$ i $\theta \in [0, 2\pi]$ amb $\rho(\theta)$ $\mathcal{C}^1$. En el nostre cas, la funció $\rho(\theta)$ només serà contínua i $\mathcal{C}^1$ a troços. És a dir, podem parametritzar la frontera del rectangle $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$ de forma contínua amb $\gamma_j(\theta) = a + \rho_j(\theta)e^{i\theta}$, per $\theta \in I_j := [\theta_j, \theta_{j+1}]$ amb ρ_j funcions $\mathcal{C}^1$, θ_1 tal que , per exemple: $4 - a = |4 - a|e^{i\theta_1}$, $\theta_5 = \theta_1 + 2\pi$. Llavors la prova funciona igual, tot i que hem de trencar la integral en quatre (una per cada vora del rectangle):

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz &= \sum_{j=1}^{4} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\rho_j'(\theta)e^{i\theta} + i\rho_j(\theta)e^{i\theta}}{\rho_j(\theta)e^{i\theta}}\, d\theta = \sum_{j=1}^{4} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\rho_j'(\theta)}{\rho_j(\theta)} + i\, d\theta \\ &= \sum_{j=1}^{4} \big[\log\big(\rho_j(\theta_{j+1})\big) - \log\big(\rho_j(\theta_j)\big) \big] + \int_{\theta_1}^{\theta_1 + 2\pi} d\theta = 2\pi i,\end{aligned}$$

  on hem fet servir que $\rho_j(\theta_{j+1}) = \rho_{j+1}(\theta_{j+1})$ i $\rho_1(\theta_1) = \rho_4(\theta_1 + 2\pi) = \rho_4(\theta_5)$.

Per tant tenim, si γ és la vora d'un rectangle R on f és homolorfa i contínua a $\overline{R}$:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a)$$

i derivant respecte a:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\, dz = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

Ara, usant aquestes fórmules, el problema és molt senzill:

(i) En aquesta integral usarem que la funció $f(z) = e^z$ és holomorfa a R (de fet holomorfa a $\mathbb{C}$) i que $\pi i \in R$:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z - i\pi)^4}\, dz = 2\pi i \frac{f^{(3)}(i\pi)}{3!} = \pi i \frac{e^{i\pi}}{3} = -\frac{i\pi}{3}.$$

(ii) En aquest cas, $f(z) = \sin 2z$ holomorfa a $\mathbb{C}$, per tant a R, i $\pi \in R$:

$$\int_\gamma \frac{\sin 2z}{(z-\pi)^4}\, dz = 2\pi i \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!} = -\frac{8\pi i}{3},$$

ja que $f^{(3)}(z) = -8\cos 2z$.

(iii) Per últim, la funció $f(z) = e^z \cos z$ és holomorfa a R (com abans, holomorfa a $\mathbb{C}$) i $\pi \in R$:

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z}{(z-\pi)^3}\, dz = 2\pi i \frac{f''(\pi)}{2!}\, dz = 0,$$

on hem usat que $f''(z) = -2e^z \sin z$.

10. Trobeu una primitiva holomorfa per la funció $f(z) = z \log z$ (log branca principal del logaritme) i useu-la per calcular $\int_\gamma z \log z\, dz$ per a γ definida pel segment de 0 a i.

Resolució: Recordem que si triem la determinació principal del log en resulta una funció holomorfa a $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on $\mathbb{R}^-$ és la semirecta negativa. Prenem doncs, aquesta determinació del logaritme ($-\pi < \arg(z) < \pi$) i considerem la funció $f(z) = z \log z$.

Busquem una primitiva com ho faríem als reals (integrant per parts $\int z \log z$) i tenim que

$$F(z) = \frac{z^2}{4}(2\log z - 1), \qquad \text{satisfà } F'(z) = z\log z,\ z \in \Omega$$

(observeu que hem comprovat que, efectivament, $F'(z) = z \log z$).

Per calcular la integral sobre el segment $\gamma = [0, i]$ que demana l'enunciat, ho podem fer de dues maneres:

- Usant la parametrització $z = it$ i observant que:

  $$\int_\gamma z \log z dz = i \int_0^1 it \log(it) dt = -\int_0^1 t\left(\log t + i\frac{\pi}{2}\right) dt = -\int_0^1 t \log t dt - i\frac{\pi}{4}$$

  La integral és una integral impròpia i per tant:

  $$\int_0^1 t \log t dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 t \log t dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{t^2}{4}(2\log t - 1)\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(-\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}(2\log\varepsilon - 1)\right)$$
  $$= -\frac{1}{4}.$$

  Usant aquest resultat tenim:

  $$\int_\gamma z \log z dz = -i\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1 - i\pi).$$

- Directament utilitzant F. Com ja hem vist que $F(z) = \frac{z^2}{4}(2\log z - 1)$ és una primitiva holomorfa a Ω i és contínua a $z = 0$, en el sentit que $F(0) := \lim_{z\to 0, z\in\Omega} F(z) = 0$, també la integral es pot calcular com:

  $$\int_\gamma z \log z dz = F(i) - F(0) = \frac{-1}{4}(2\log i - 1) = -\frac{1}{4}(i\pi - 1) = \frac{1}{4}(1 - i\pi).$$

11. Comproveu que $F(z) = \frac{i}{2}\log(z+i) - \frac{i}{2}\log(z-i)$ (log branca principal del logaritme) és una primitiva holomorfa de $\frac{1}{1+z^2}$ en $\mathcal{U} = \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. És $F(z) = \arctan z$?

Resolució: Tenim $F(z) = \frac{i}{2}\log(z+i) - \frac{i}{2}\log(z-i)$ i usem la determinació principal del log. És a dir, ens caldrà que

$$z+i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-, \qquad z+i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-.$$

Observeu que:

- $z+i \in \mathbb{R}^-$ si $\operatorname{Re} z < 0$ i $\operatorname{Im} z = -1$,
- $z-i \in \mathbb{R}^-$ si $\operatorname{Re} z < 0$ i $\operatorname{Im} z = 1$.

Per tant la funció $F(z)$ és holomorfa a

$$\Omega = \mathbb{C}\setminus(\{z,\ \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z = -i\} \cup \{z,\ \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z = -i\}).$$

En aquest domini tenim que

$$F'(z) = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z^2+1}.$$

Per veure si aquesta funció coincideix amb la funció arctan prenem un $x \in \mathbb{R}^+ \subset \Omega$. Aleshores:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{i}{2}\Big(\log(\sqrt{x^2+1}) + i\arg(x+i)\Big) - \frac{i}{2}\Big(\log(\sqrt{x^2+1}) + i\arg(x-i)\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On, quan escrivim arctan, ens referim a la funció real de variable real tal que $\arctan t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si ara anomanem $\beta = -\arctan(1/x)$, i $\alpha = \arctan x$, observem que $\tan(-\beta) = \frac{1}{x}$ i $\tan\alpha = x$, per tant $\tan(-\beta) = \frac{1}{\tan\alpha}$, és a dir $\cos(\alpha-\beta) = 0$. Com $0 < \alpha, -\beta < \frac{\pi}{2}$, obtenim $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ ($\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$ no pot ser). En particular $\arctan x = \alpha \neq \beta = -\arctan(1/x) = F(x)$.

Així, la funció obtinguda no és la funció arctan.

12. Demostreu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. Indicació: Integreu la funció $f(z) = \dfrac{e^{iz}-1}{z}$ sobre la corba tancada definida per la unió del segment $[-R, R]$ i el semicercle de centre 0 i radi R.

Resolució: Considerem la funció $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$. Veiem primer que aquesta funció, extesa amb $f(0) = 0$ és holomorfa a $\mathbb{C}$, és a dir, f és una funció entera. Clarament és holomorfa per $z \neq 0$. És clar que la funció $g(z) = e^{iz} - 1$ és entera i concideix amb el seu desenvolupament en sèrie a tot punt:

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} - 1 = \sum_{n\geq 1} \frac{(iz)^n}{n!} = iz\sum_{n\geq 1} \frac{(iz)^{n-1}}{n!}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Així

$$f(z) = \frac{g(z)}{z} = i\sum_{n\geq 1} \frac{(iz)^{n-1}}{n!}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

i per tant f és entera.

Com f és entera sabem que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ si γ és una corba tancada $\mathcal{C}^1$ a troços. En el nostre cas el camí que ens proposa la indicació el descomposem com $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ amb $\gamma_1(t) = t$, $t \in [-R, R]$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Llavors, com

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\gamma_2} f(z)\ dz = 0,$$

obtenim que:

$$0 = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}-1}{t}\ dt + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}-1}{Re^{it}} Rie^{it}\ dt,$$

que implica que:

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{it}-1}{t}\ dt = -i\int_0^{\pi} e^{iR(\cos t + i\sin t)} - 1\ dt = -i\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}(\cos(R\cos t) + i\sin(R\cos t)\ dt + i\pi.$$

Igualant part real i imaginària tenim:

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos t - 1}{t}\ dt = \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\sin(R\cos t)\ dt \tag{1.3}$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t}\ dt = -\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\ dt + \pi. \tag{1.4}$$

Ara observem que

$$\left|\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\sin(R\cos t)\ dt\right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\ dt$$
$$\left|\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\ dt\right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\ dt$$

i a més, usant que $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$, si $0 \leq t \leq \pi/2$ (exercici):

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\ dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\ dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\frac{2}{\pi}t}\ dt = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}).$$

Tenim per tant que

$$0 \leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\ dt \leq \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) = 0 \Longrightarrow \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\ dt = 0,$$

que implica que:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\sin(R\cos t)\ dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\ dt = 0.$$

Usant aquests fets a les equacions (1.3) and (1.4) tenim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t - 1}{t}\ dt = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt = \pi.$$

La primera integral és clarament zero, ja que la funció $\frac{\cos t - 1}{t}$ és senar. Així mateix, usant que $\frac{\sin t}{t}$ és parell tenim:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

13. Integreu $f(z) = e^{iz^2}$ sobre el sector circular format pel segment de 0 a $R > 0$, l'arc de circumfèrencia de centre 0 i radi R que va de R a $Re^{i\pi/4}$ i el segment de $Re^{i\pi/4}$ a 0. Useu el resultat per calcular les **Integrals de Fresnel**: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$. (Recordeu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.)

Resolució: Anomenem γ al camí tancat descrit a l'enunciat. La funció $f(z) = e^{iz^2}$ és una funció entera i per tant $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Llavors,

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\gamma_2} f(z)\ dz + \int_{\gamma_3} f(z)\ dz$$

on $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. A γ_1 parametritzem per $z = t$, $t \in [0, R]$, a γ_2 parametritzem per $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$, a γ_3 usem que $\int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_{\gamma_3^*} f(z)dz$, on γ_3^* és el mateix camí recorregut en sentit contrari, que podem parametritzar per $z = te^{i\pi/4}$, $t \in [0, R]$. Tenim dons que:

$$0 = \int_0^R e^{it^2}\ dt + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{i2t}} Rie^{it}\ dt - \int_0^R e^{it^2e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}\ dt. \tag{1.5}$$

Quan $R \to \infty$ observem que a γ_1:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{it^2}\ dt = \int_0^\infty \cos(t^2)\ dt + i \int_0^\infty \sin(t^2)\ dt. \tag{1.6}$$

A γ_2 tenim:

$$\left| \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{i2t}} Rie^{it}\ dt \right| \le \int_0^{\pi/4} \left| e^{iR^2(\cos 2t + i \sin 2t)} \right| R\ dt = \int_0^{\pi/4} \left| e^{-R^2 \sin 2t} \right| R\ dt$$
$$\le R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \frac{4}{\pi} t}\ dt = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) \to 0, \quad \text{quan } R \to \infty.$$

Aquí hem usat que $\sin 2t \ge \frac{4}{\pi}t$, si $0 \le t \le \pi/4$. Llavors:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{i2t}} Rie^{it}\ dt = 0. \tag{1.7}$$

A γ_3 tenim que, com $e^{i\pi/2} = i$, i usant que $\int_0^\infty e^{-t^2}\ dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{it^2e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}\ dt = \int_0^\infty e^{-t^2} e^{i\pi/4}\ dt = e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i). \tag{1.8}$$

Prenent a (1.5) $R \to \infty$ i utilitzant els resultats a (1.6), (1.7) i (1.8) per les integrals sobre γ_j, tenim que:

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\ dt + i \int_0^\infty \sin(t^2)\ dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$$

i, igualant part real i imaginària:

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\ dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\ dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

14. Integreu $f(z) = e^{-z^2}$ sobre la vora del rectangle de vèrtexs $R, R + i/2, -R + i/2$ i $-R$. Useu el resultat per calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx$. (Recordeu de nou que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)

Resolució: Sigui γ el camí tancat que descriu la vora del rectangle a l'enunciat. Com la funció $f(z) = e^{-z^2}$ és entera, $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Posem $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ i integrem:

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\gamma_2} f(z)\ dz + \int_{\gamma_3} f(z)\ dz + \int_{\gamma_4} f(z)\ dz.$$

A γ_1 parametritzem per $z = t$, $t \in [-R, R]$, a γ_2 parametritzem per $z = R + it$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$, a γ_3 i γ_4 usem que $\int_{\gamma_i} f(z)dz = -\int_{\gamma_i^*} f(z)dz$, on γ_i^* és el mateix camí recorregut en sentit contrari. Així, a a γ_3^* parametritzem per $z = t + i\frac{1}{2}$, $t \in [-R, R]$, a γ_4^* parametritzem per $z = -R + it$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Aleshores tenim que per a tot $R > 0$:

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-t^2}\ dt + i\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(R+it)^2}\ dt - \int_{-R}^{R} e^{-(t+i\frac{1}{2})^2}\ dt - i\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(-R+it)^2}\ dt.$$

Per tant

$$\begin{aligned} 0 = &\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-t^2}\ dt + \lim_{R\to\infty} i\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(R+it)^2}\ dt - \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-(t+i\frac{1}{2})^2}\ dt \\ &- \lim_{R\to\infty} i\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(-R+it)^2}\ dt \\ =:& I_1 + I_2 - I_3 - I_4. \end{aligned}$$

Observem que

$$I_1 = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-t^2}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Respecte I_2:

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(R+it)^2}\ dt\right| \le \int_0^{\frac{1}{2}} \left|e^{-R^2+t^2-i2tR}\right|\ dt = e^{-R^2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{t^2}\ dt \to 0, \quad \text{quan } R \to \infty.$$

On hem usat que $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{t^2}\ dt$ és un número independent de R. Per tant $I_2 = 0$.

Igualment $I_4 = 0$, ja que:

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(-R+it)^2}\ dt\right| \le \int_0^{\frac{1}{2}} \left|e^{-R^2+t^2+i2tR}\right|\ dt = e^{-R^2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{t^2}\ dt \to 0, \quad \text{quan } R \to \infty.$$

Per últim

$$I_3 = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-(t+i\frac{1}{2})^2}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+\frac{1}{4}-ti}\ dt = e^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}(\cos t - i\sin t)\ dt.$$

Com $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$, fent servir els càlculs previs obtenim que:

$$\sqrt{\pi} - e^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos t\ dt + ie^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\sin t\ dt = 0$$

i per tant, igualant part real i imaginària:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos t \; dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sin t \; dt = 0.$$

Observem que la segona integral és zero dons la funció que integrem és senar.

15. Siguin f i g funcions holomorfes en un obert connex Ω que no s'anul·len en cap punt. Suposeu que existeix una successió $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, amb tots els termes diferents i que convergeix a $z_0 \in \Omega$, tal que $\dfrac{f'(z_n)}{f(z_n)} = \dfrac{g'(z_n)}{g(z_n)}$. Demostreu que existeix $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cg(z)$.

Resolució: Tenim f i g holomorfes a Ω, obert connex i $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$, per tant les funcions:

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad m(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

son holomorfes a Ω.

Per hipòtesi, $h(z)$ i $m(z)$ coincideixen al conjunt $\{z_n, \; n \in \mathbb{N}\}$ que té el punt d'acumul·lació z_0. Per tant $h(z) = m(z)$ per a tot $z \in \Omega$, és a dir:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Però manipulant aquesta igualtat obtenim:

$$0 = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{f(z)g(z)} \Longrightarrow g(z)f'(z) - f(z)g'(z) = 0.$$

Llavors, $\forall z \in \Omega$:

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} = 0,$$

que implica que existeix $c \in \mathbb{C}$ tal que $\frac{f(z)}{g(z)} = c$ és a dir $f(z) = cg(z)$.

16. Sigui f una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$ i tal que per a tot $z_0 \in \mathbb{C}$ almenys un dels coeficients de l'expansió $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ és igual a zero. Demostreu que f és un polinomi. (Indicació: Recordeu que $c_n n! = f^{(n)}(z_0)$ i useu un argument d'enumerabilitat.)

Resolució: Prenem $\overline{D}$ disc de radi 1 i centre l'origen i per cada $n \in \mathbb{N}$ considerem el conjunt:

$$E_n = \{\omega \in \overline{D}, \; f^{(n)}(\omega) = 0\} = (f^{(n)})^{-1}(\{0\}).$$

E_n és un conjunt tancat perquè les derivades d'una funció holomorfa son holomorfes i, per tant, contínues. Com $E_n \subset \overline{D}$, són compactes. Per altra banda $\overline{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Fixem ara un $n_0 \in \mathbb{N}$ qualsevol. Si $f^{(n_0)}$ no és una funció idènticament nul·la, els seus zeros formen un conjunt discret. Per tant cada punt $a \in E_{n_0}$ és aïllat i en conseqüència, sempre existeix un $r = r_a > 0$ tal que $B_{r_a}(a) \cap E_{n_0} = \{a\}$.

Tenim també que $E_{n_0} \subset \bigcup_{a\in E_{n_0}} B_{r_a}(a)$. Per tant les boles obertes $B_{r_a}(a)$ formen un recobriment de E_{n_0}. Com E_{n_0} és compacte sempre hi ha un recobriment finit, és a dir, existeixen $a_1, \cdots, a_k$ tals que: $E_{n_0} \subset B_{r_{a_1}}(a_1) \cup \cdots \cup B_{r_{a_k}}(a_k)$. Així,

$$E_{n_0} \subset \left(B_{r_{a_1}}(a_1) \cap E_{n_0}\right) \cup \cdots \cup \left(B_{r_{a_k}}(a_k) \cap E_{n_0}\right) = \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_k\}.$$

Hem provat doncs que E_{n_0} és finit. Fixem-nos que hem usat com hipòtesi que la derivada $f^{(n_0)}$ no és una funció idènticament nul·la.

Tenim doncs que si cap derivada de f és una funció idènticament nul·la, tots els conjunts E_n són finits, i per tant, $\overline{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ és numerable. Però el disc tancat no és numerable, i així arribem a una contradicció.

Concluïm doncs que ha d'existir un $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n^*)}(z) \equiv 0$ i per tant f és un polinomi de grau menor que n^* (és una conseqüencia inmediata de la fórmula de Taylor).

17. Demostreu que la funció definida per $f(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt}\,dt$ és holomorfa al semiplà $\mathrm{Re}(z) > 0$. Trobeu la seva prolongació analítica al pla puntejat $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. (Indicació: Integreu per parts per obtenir la prolongació de f.)

Resolució: $f(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-t\,z}\,dt$. Observem que f es pot escriure com una suma de dues integrals impropies reals:

$$f(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-t\,\mathrm{Re}z}\cos(t\mathrm{Im}z)\,dt - i\int_0^\infty t^3 e^{-t\,\mathrm{Re}z}\sin(t\mathrm{Im}z)\,dt.$$

Per tant, tot i que mantindrem la notació complexa, estem parlant d'integrals reals que farem per parts.

Observem primer que

$$|f(z)| \le \int_0^\infty t^3 e^{-t\,\mathrm{Re}z}\,dt$$

i aquesta integral existeix si $\mathrm{Re}z > 0$. Així anem a calcular-la integrant per parts:

$$f(z) = \left[t^3\frac{e^{-t\,z}}{-z}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 3t^2\frac{e^{-t\,z}}{-z}\,dt = \frac{3}{z}\int_0^\infty t^2 e^{-t\,z}\,dt.$$

Integrem dos cops més per parts i arribem a l'expressió:

$$f(z) = \frac{6}{z^3}\int_0^\infty e^{-t\,z}\,dt = \frac{6}{z^4}.$$

Així tenim dues funcions: $f(z)$ i $\frac{6}{z^4}$, que coincidexen a $\mathrm{Re}z > 0$. La segona és holomorfa a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, per tant deduïum que $f(z)$ és holomorfa a $\mathrm{Re}z > 0$ (perquè coincideix amb $\frac{6}{z^4}$) i $\frac{6}{z^4}$ és la seva continuació analítica a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

18. Sigui f una funció holomorfa en $D(0,1)$. Definim el *diàmetre de* f com

$$d = \sup_{z,w\in D(0,1)}|f(z) - f(w)|\,.$$

Demostreu que $2|f'(0)| \le d$. Doneu una funció f diferent de la identitat per a la que se satisfaci la igualtat. (Indicació: Vegeu que podeu combinar la fórmula de Cauchy per $f'(0)$ amb $f'(0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(|z|=r)^+}\frac{f(-z)}{z^2}\,dz$, per $0 < r < 1$.)

Resolució: Comencem aplicant la fórmula de Cauchy en $\omega = 0$ a f en un disc de radi $r < 1$, ja que f és holomorfa a $D(0,1)$:

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

Considerem ara la funció $g(z) = -f(-z)$, que és holomorfa també a $D(0,1)$ ja que $z \in D(0,1)$ si, i només si $-z \in D(0,1)$. Tenim a més que, usant la regla de la cadena, $g'(z) = f'(-z)$, per tant $g'(0) = f'(0)$. Ara usem la fórmula de Cauchy per g:

$$f'(0) = g'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z^2}\, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(-z)}{z^2}\, dz.$$

Sumant ambdues fórmules per $f'(0)$ tenim:

$$\begin{aligned} 2f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(-z)}{z^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta}) - f(-re^{i\theta})}{r^2 e^{2i\theta}} ire^{i\theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

Com $z = re^{i\theta}, -z = -re^{i\theta} \in D(0,1)$ tenim que $|f(z) - f(-z)| \leq \sup_{z,\omega \in D(0,1)} |f(z) - f(\omega)| = d$. Així:

$$|2f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta}) - f(-re^{i\theta})|}{r^2} r\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{r}\, dt \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{d}{r} = \frac{d}{r}.$$

Tenim doncs que per qualsevol $0 < r < 1$ es verifica $|f'(0)| \leq \frac{d}{2r}$.

Veiem que aquest fet implica que $|f'(0)| \leq \frac{d}{2}$. En efecte, si $|f'(0)| > \frac{d}{2}$, sempre existiria δ suficientment petit i

$$|f'(0)| > \frac{d + \delta}{2} = \frac{d}{2}(1 + \frac{\delta}{d}) = \frac{\frac{d}{2}}{(1 + \frac{\delta}{d})^{-1}} = \frac{d}{2(1 + \frac{\delta}{d})^{-1}}$$

però $r = (1 + \frac{\delta}{d})^{-1} < 1$ i això entra en contradiccció amb el que hem provat.

Així doncs podem concloure que

$$|f'(0)| \leq \frac{d}{2}.$$

Per trobar un exemple de funció on es verifiqui $2|f'(0)| = d = \sup_{z,\omega \in D(0,1)} |f(z) - f(\omega)|$, caldrà que el màxim s'asoleixi ls punts antipodals $f(z) - f(-z)$, per exemple si provem $f(z) = az + b$, tenim:

$$d = \sup_{z,\omega \in D(0,1)} |f(z) - f(\omega)| = \sup_{z,\omega \in D(0,1)} |a||z - \omega| = \sup_{z \in D(0,1)} 2|a||z| = |2|a| = 2|f'(0)|.$$

19. Trobeu el màxim de $|f(z)|$ en cada cas.

(i) $f(z) = z^2 - 3z + 2$ en $|z| \leq 1$.

(ii) $f(z) = z^2 + z$ en el triangle de vèrtex $(0,0)$, $(-1,0)$ i $(0,-2)$.

Resolució: Per resoldre aquest problema usarem el principi del màxim: si $f(z)$ és una funció holomorfa en un domini acotat Ω i contínua a $\overline{\Omega}$, el suprem de $|f(z)|$ sempre s'assoleix a la frontera del domini.

(a) La funció $f(z) = z^2 - 3z + 2$ és entera, en particular, és holomorfa a $D(0,1)$ i contínua a la seva frontera. Com volem trobar el màxim de la funció a $|z| = 1$, aquest màxim s'assolirà per algun $z = e^{i\theta}$ amb $\theta \in [0, 2\pi]$. Tenim que:

$$f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} - 3e^{i\theta} + 2 = \cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 + i\,(\sin 2\theta - 3\sin\theta)$$

i per tant:

$$g(\theta) = |f(e^{i\theta})|^2 = (\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2)^2 + (\sin 2\theta - 3\sin\theta)^2$$

Com el màxim de $|f|$ i el de $|f|^2$ s'asoleixen al mateix punt treballararem amb el quadrat que és més còmode. Uns quants càlculs donen:

$$g(\theta) = 14 - 18\cos\theta + 4\cos 2\theta,\ \ \theta \in [0, 2\pi]$$

Els extrems d'aquesta funció poden ser a $\theta = 0$ o bé a $(0, 2\pi)$ i llavors han de ser extrems rel·latius. Cal doncs calcucar els zeros de g':

$$g'(\theta) = 18\sin\theta - 8\sin 2\theta = 18\sin\theta - 16\sin\theta\cos\theta.$$

Llavors $g'(\theta) = 0$ si i només si $\sin\theta = 0$, ja que $18 - 16\cos\theta = 0$ no té solucions reals. Així doncs tenim un nou candidat (a més de $\theta = 0$) que és $\theta = \pi$. Avaluant g tenim:

$$g(0) = 0, \quad g(\pi) = 36.$$

Per tant el màxim de g és 36 i el de $|f| = \sqrt{g} = 6$. S'assoleix a $z = e^{i\pi} = -1$.
Alternativament haguèssim pogut deduir el resultat perquè $|f(z)| \le |z|^2 + 3|z| + 2 = 6$ i $f(-1) = 6$.

(b) En aquest cas $f(z) = z^2 + z$, que és entera i el domini D té una frontera que partim en tres parts:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z = x + iy,\ -1 \le x \le 0,\ y = 0\}, \\ C_2 &= \{z = x + iy,\ x = 0,\ -2 \le y \le 0\}, \\ C_3 &= \{z = x + iy,\ -1 \le x \le 0,\ y = -2 - 2x\}. \end{aligned}$$

Ara trobem el màxim de $|f(z)|$ a cada segment.

- A C_1, $z = x$ per tant $f(z) = x^2 + x = x(x+1)$, aquesta funció és negativa a tot l'interval $[-1, 0]$. Per tant $g(x) = |f(z)| = -x^2 - x$. Els candidats a extrems són $x = -1, 0$ i l'extrem relatiu que és $x = -\frac{1}{2}$. Avaluant tenim $g(0) = g(-1) = 0$ i $g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, que és el màxim, per tant:
$$\max_{z \in C_1} |f(z)| = \frac{1}{4}$$
- A C_2, $z = iy$ i $f(z) = -y^2 + iy$, $y \in [-2, 0]$. Per tant $g(y) = |f(iy)| = \sqrt{y^4 + y^2}$ i els candidats a extrems són $y = -2, 0$. No hi ha extrem relatiu ja que $g'(y) = \frac{4y^3 + 2y}{\sqrt{y^4 + y^2}} \neq 0$. Avaluant tenim $g(0) = 0$ i $g(-2) = 2\sqrt{5}$. Per tant:
$$\max_{z \in C_2} |f(z)| = 2\sqrt{5}.$$

- A C_3, $z = x + i(-2-2x)$, $x \in [-1, 0]$ per tant:

$$f(z) = (x + i(-2-2x))^2 + x + i(-2-2x) = -3x^2 - 7x - 4 + i(-4x^2 - 6x - 2)$$

Calculem $g(x) = |f(z)|^2$:

$$g(x) = (-3x^2 - 7x - 4)^2 + (-4x^2 - 6x - 2)^2 = 5(5t^4 + 18t^3 + 25t^2 + 16t + 4)$$

i per tant $g'(x) = 10\left(10x^3 + 27x^2 + 25x + 8\right)$. És clar que $g'(-1) = 0$ i dividint $g'(x) = 10(x+1)(10x^2 + 17x + 8)$. Així, $g'(x)$ no té més solucions reals.
Els candidats a extrems absoluts són dons $x = -1, 0$. Avaluant tenim $g(0) = 0$, $g(-1) = 20$ i per tant:

$$\max_{z \in C_3} |f(z)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Concluïm que si D és el domini de frontera $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$:

$$\max_{z \in D} |f(z)| = \max_{z \in C} |f(z)| = 2\sqrt{5}.$$

20. Sigui Ω un obert connex fitat i f una funció holomorfa en Ω, contínua en $\overline{\Omega}$ i que no s'anul·la en $\overline{\Omega}$. Demostreu que si $|f|$ és constant en $\partial\Omega$, aleshores f és constant.

Resolució: Per resoldre aquest problema usarem el principi del màxim: si $f(z)$ és una funció holomorfa en un domini acotat Ω i contínua a $\overline{\Omega}$, el suprem de $|f(z)|$ sempre s'asoleix a la frontera del domini, $\partial\Omega$.

A més, com $f(z) \neq 0$ a Ω, també podem usar el principi del mínim, que ens diu que l'ínfim també s'asoleix a la frontera, és a dir:

$$\inf_{\partial\Omega} |f(z)| \leq |f(z)| \leq \sup_{\partial\Omega} |f(z)| \qquad \forall z \in \Omega.$$

Ara bé, per hipòtesi, $|f(z)| = M$ per tots els $z \in \partial\Omega$. Així:

$$M = \inf_{\partial\Omega} |f(z)| \leq |f(z)| \leq \sup_{\partial\Omega} |f(z)| = M \ \forall z \in \Omega$$

i per tant deduim que $|f(z)| = M$, $\forall z \in \Omega$.

Ara bé, si una funció holomorfa en un obert connex té mòdul constant, aleshores és constant (problema 11 del tema 2).

Concluïm que $f(z)$ és constant.

21. Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa (es diu que f és entera). Demostreu que si f no és constant llavors $f(\mathbb{C})$ és un conjunt dens en $\mathbb{C}$. Doneu un exemple de f entera no constant tal que $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

Resolució: Volem veure que $f(\mathbb{C})$ és dens a $\mathbb{C}$, és a dir que:

$$\forall \omega \in \mathbb{C},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |f(z) - \omega| \leq \varepsilon$$

Suposem el contrari, és a dir, que existeixen $\omega_0 \in \mathbb{C}$ i $\varepsilon_0 > 0$ satisfent que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z) - \omega_0| > \varepsilon_0$.
Considerem ara la funció $g(z) = \frac{1}{f(z) - \omega_0}$.

- Com $f(z) - \omega_0 \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, la funció g és entera, ja que f ho és.
- $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-\omega_0|} \leq \frac{1}{\varepsilon_o}$

Tenim doncs una funció entera acotada a tot $\mathbb{C}$ i sabem que això implica que g és constant, és a dir, existeix $a \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = a$, i per tant:

$$f(z) = \frac{1}{a} + \omega_0.$$

Hem demostrat doncs que f és constant, suposant que $f(\mathbb{C})$ no és dens a $\mathbb{C}$. Deduïm doncs que si f no és constant $f(\mathbb{C})$ és dens a $\mathbb{C}$.

Com exemple de funció f entera no constant tal que $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$ tenim, per exemple $f(z) = e^z$ que és entera però no existeix cap $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z = 0$.

22. Sigui f una funció entera. Suposeu que existeixen r, M, λ nombres reals positius tals que per $|z| > r$ es té $|f(z)| \leq M|z|^\lambda$. Demostreu que f és un polinomi de grau $\leq \lambda$.

Resolució: Sabem que f és entera i que si $|z| > r$ es verifica que $|f(z)| \leq M|z|^\lambda$. Volem veure que f és un polinomi.

Com f és entera coincideix amb el valor de la seva sèrie de Taylor a qualsevol punt. Usem doncs el desenvolupament de Taylor a l'origen:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ara usem la fórmula de Cauchy per calcular els coeficients:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} iRe^{i\theta} \, d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^n e^{in\theta}} i \, d\theta$$

i recordem que aquesta fórmula és valida per a tot $R > 0$. Prenem ara $R > r$ per calcular aquests coeficients, que són independents de R i els fitem:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(Re^{i\theta})|}{R^n} \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{MR^\lambda}{R^n} \, d\theta \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^{\lambda-n} dz = MR^{\lambda-n}$$

Si ara prenem $n > \lambda$ i fem $R \to \infty$ tenim:

$$0 \leq |c_n| \leq 0 \qquad \text{per tant } c_n = 0.$$

Arribem a la conclusió que si $n > \lambda$, el coeficient $c_n = 0$, per tant, anomenant N a la part entera de λ tenim:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=N} c_n z^n, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

i per tant f és un polinomi de grau, com a molt, N.

23. Sigui f una funció entera tal que $\text{Re}(f(z)) \leq M$, per alguna constant M. Demostreu que f és constant. (Indicació: considereu la funció $e^{f(z)}$.)

Resolució: Sabem que f és entera i que $\text{Re}(f(z))| \leq M$. Seguint la indicació, considerem la funció $g(z) = e^{f(z)}$.

Com f és entera, g també ho és i a més:

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\text{Re}(f(z))} \leq e^M, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tenim doncs que g és una funció entera i acotada, per tant ha de ser constant. Sigui $A \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$, tal que $g(z) = A$. Aleshores $f(z) = \log A$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (que està ben definit ja que $A \neq 0$).

24. Demostreu que no hi ha cap funció f entera no constant tal que $f(z+1) = f(z)$ i $f(z+i) = f(z)$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. (Indicació: Proveu que f és una funció acotada en $\mathbb{C}$.)

Resolució: El que veurem és que si:

- f és entera,
- $f(z+1) = f(z)$,
- $f(z+i) = f(z)$

aleshores és constant.

Per tant si no és constant, no pot complir les tres propietats a la vegada.

Considerem el rectangle:

$$R = \{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq \text{Re}z \leq 1;\ 0 \leq \text{Im}z \leq 1\}$$

Com f és entera i R és compacte, $|f|$ té màxim a R. Sigui $M = \max_{z \in R} |f(z)|$.

Veiem ara que per a qualsevol $z \in \mathbb{C}$ es verifica $|f(z)| \leq M$, aleshores com f és entera i acotada tindrem que f és constant.

Sigui $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Observem que sempre existeixen dos números enters $n, m \in \mathbb{Z}$ tals que

$$n \leq x < n+1, \quad m \leq y < m+1.$$

Llavors $x = \hat{x} + n$, $y = \hat{y} + m$ amb $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y} \in R$. Així, $z = \hat{z} + n + im$ i per tant

$$|f(z)| = |f(\hat{z} + n + im)| = |f(\hat{z} + im)| = |f(\hat{z})| \leq M.$$

Tenim doncs que la funció f és entera i acotada, per tant ha de ser constant.

25. Demostreu que f holomorfa i injectiva ha de complir $f'(z) \neq 0$ per a tot z del domini. És cert el recíproc?

Resolució: El que veurem és que si f és holomorfa i en algun $a \in \mathbb{C}$ tenim que $f'(a) = 0$, aleshores existeix un entorn $\mathcal{U}$ de a on f no és injectiva.

Com $f(z) - f(a)$ s'anul·la en $z = a$ hem vist a teoria que existeix una funció ϕ holomorfa de un entorn $\mathcal{U}$ de a a una bola $B_r(0)$ i un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(z) = f(a) + (\phi(z))^m.$$

A més $\phi(a) = 0$ i $\phi'(a) \neq 0$.

Fixem-nos que $f'(a) = m(\phi(a))^{m-1}\phi'(a)$. Com sabem que $f'(a) = 0$ tenim que $m \geq 2$ ja que si $m = 1$ tindríem $f'(a) = \phi'(a) \neq 0$.

Com $\phi : \mathcal{U} \to B_r(0)$ és bijectiva pels nombres complexos $\omega_k = \frac{r}{2}e^{i\frac{2\pi k}{m}} \in B_r(0)$, $k = 0, 1, \ldots m-1$, existiran $z_k \in \mathcal{U}$ tals que $\phi(z_k) = \omega_k$. Aleshores

$$\begin{aligned} f(z_k) &= f(a) + (\phi(z_k))^m = f(a) + (\omega_k)^m = f(a) + \left(\frac{r}{2}e^{i\frac{2\pi k}{m}}\right)^m = f(a) + \left(\frac{r}{2}\right)^m e^{i2\pi k} \\ &= f(a) + \left(\frac{r}{2}\right)^m. \end{aligned}$$

Hem trobat doncs $m \geq 2$ punts del pla complex $z_0, \ldots z_{m-1} \in \mathcal{U}$, tals que tots tenen la mateixa imatge, per tant f no és injectiva a $\mathcal{U}$.

Una funció on no es verifica el recíproc és la funció entera $f(z) = e^z$ ja que $f'(z) = e^z \neq 0$ però sabem que és periòdica de periode $2\pi i$.

26. Determineu el disc més gran centrat en l'origen tal que $f(z) = z^2 + z$ és injectiva.

Resolució: La funció si $f(z) = z^2 + z$ és entera i $f'(z) = 2z + 1$ que s'anul·la a $z = -\frac{1}{2}$. Pel problema 25) el candidat "natural" a domini on f pugui ser injectiva és doncs $\Omega = D_{\frac{1}{2}}(0)$.

Veiem si, efectivament, f és injectiva a Ω. Prenem $z, \omega \in \Omega$ tals que $f(z) = f(\omega)$. Aleshores:

$$z^2 - \omega^2 = \omega - z \implies (z - \omega)(z + \omega) = -(z - \omega)$$

i per tant tenim dues possibilitats:

- o bé, $z = \omega$ i per tant f injectiva;
- o bé $z + \omega = -1 \iff \omega = -z - 1$. Però si $z \in \Omega$, $-z \in \Omega$ i per tant $\omega = -z - 1 \in D_{\frac{1}{2}}(-1)$. Llavors $\omega \in \Omega \cap D_{\frac{1}{2}}(0) = \emptyset$ (de fet les boles tancades intersequen a $-\frac{1}{2}$), que no pot ser.

Concluïm que $f(z) = z^2 + z$ és injectiva a $\Omega = D_{\frac{1}{2}}(0)$.

27. Determineu el disc més gran centrat en l'origen tal que $f(z) = e^z$ és injectiva.

Resolució: La funció $f(z) = e^z$ és entera i $f'(z) = e^z \neq 0$ per tant no tenim cap domini "natural" en que f pugui no ser injectiva fora d'ell.

Per tant comprovem on f és injectiva directament. Prenem $z, \omega \in \mathbb{C}$ tals que $f(z) = f(\omega)$. Aleshores tenim:

$$e^z = e^\omega - z \implies e^{z-\omega} = 1 \implies z - \omega = 2\pi i k,$$

per algun $k \in \mathbb{Z}$, ja que e^z és $2\pi i$-periòdica.

Observem llavors que, prenent quasevol número $a \in \mathbb{R}$, e^z és injectiva al conjunt (banda complexa):

$$\{z \in \mathbb{C},\ a \leq \mathrm{Im} z < a + 2\pi\}$$

per exemple podem prendre $-\pi \leq \mathrm{Im} z < \pi$ i llavors el disc centrat a l'origen de radi màxim on f és holomorfa és $D_\pi(0)$.

28. Sigui f holomorfa en un entorn del 0 amb $f'(0) \neq 0$. Donat $n \in \mathbb{N}$, proveu que existeix una funció holomorfa g tal que $f(z^n) = f(0) + [g(z)]^n$ localment en un entorn del zero.

Resolució: La funció f es pot desenvolupar en sèrie de potències en un entorn de $z = 0$. És a dir, $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_c z^n$ per z de mòdul petit. A més, $c_0 = f(0)$ i $c_1 = f'(0) \neq 0$. Per tant:

$$f(z) = f(0) + z\tilde{f}(z), \text{ amb } \tilde{f}(0) \neq 0.$$

Considerem la funció:

$$h(z) = f(z^n) - f(0) = z^n \tilde{f}(z^n).$$

Com $\tilde{f}(0) \neq 0$, sempre existeix ϕ holomorfa a un entorn de 0 tal que $\tilde{f}(z^n) = (\phi(z))^n$, (només cal prendre $\phi(z) = e^{\frac{1}{n}r(z)}$, on $r(z) = \log \tilde{f}(z^n)$). Aleshores, anomenant $g(z) = z\phi(z)$:

$$f(z^n) = f(0) + (z\phi(z))^n = f(0) + (g(z))^n.$$

Resolucions de problemes, anàlisi complexa

12 de maig de 2022

1 Teoria Global de Cauchy

1. Sigui $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si γ és una corba simple amb $n(\gamma; 0) = 1$ i f és fitada en la component connexa no acotada determinada per γ, aleshores $\forall z \in \mathbb{C}$ tal que $n(\gamma; z) = 0$:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{zf(w)}{w(w-z)} dw.$$

Resolució: Sigui $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenim que f és holomorfa a Ω i γ és una corba tancada tal que $n(\gamma, 0) = 1$. Prenem un $z \in \mathbb{C}$ tal que $n(\gamma, z) = 0$, en particular $z \neq 0$.

Prenem un R qualsevol prou gran per tal de que $\gamma \subset D_R(0)$ i $|z| < R$.

Considerem el cicle $\Gamma = \gamma - \partial D_R(0) \subset \Omega$ i la funció $g(w) = \frac{zf(w)}{w}$, que és holomorfa a Ω.

Observem que $\Gamma \simeq 0$, ja que $n(\Gamma, 0) = n(\gamma, 0) - n(\partial D_R(0), 0) = 1 - 1 = 0$ i 0 és l'únic punt que pertany a $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Per tant, com $z \in \Omega \setminus \Gamma$, podem aplicar la fórmula de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(w)}{w-z} dw = n(\Gamma, z) g(z) = -g(z) = -\frac{zf(z)}{z} = -f(z),$$

on hem usat que $n(\Gamma, z) = 0 - 1 = -1$.

Així doncs, hem provat que per a qualsevol $R > 0$ prou gran:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(w)}{w-z} dw = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{zf(w)}{w(w-z)} dw \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{zf(w)}{w(w-z)} dw - \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{zf(w)}{w(w-z)} dw. \end{aligned}$$

Veiem ara que la segona integral és, de fet, zero. Noteu també que la igualtat no depèn de R, per tant podrem fer $R \to \infty$. Anem a fitar la segona integral. Per hipòtesi tenim que $|f(w)| \leq M$ si $|w| > R$. Per tant:

$$\begin{aligned} \left| \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{zf(w)}{w(w-z)} dw \right| &= \left| \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{zf(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}(Re^{i\theta} - z)} iRe^{i\theta} \, d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|z||f(Re^{i\theta})|}{|Re^{i\theta} - z|} \, d\theta \leq \frac{|z|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{|Re^{i\theta} - z|} \, d\theta \end{aligned}$$

Notem ara que, com $R > |z|$, tenim que $|z - Re^{i\theta}| \geq R - |z| > 0$, per tant:

$$\left| \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{zf(w)}{w(w-z)} dw \right| \leq \frac{|z|}{2\pi} \frac{2\pi M}{R - |z|} = \frac{M|z|}{R - |z|}.$$

Com aquesta fita és certa per a tot R prou gran, fent $R \to \infty$ tenim que:

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{zf(w)}{w(w-z)} dw = 0$$

i llavors:

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(w)}{w-z} dw = \frac{-1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{zf(w)}{w(w-z)} dw$$

com volíem demostrar.

2. Trobeu les multiplicitats dels zeros de

(i) $f(z) = e^z - 1$, en $z_0 = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) $f(z) = \sin z - \tan z$, en $z_0 = 0$.

(iii) $f(z) = \cos z - 1 + \frac{1}{2} \sin^2 z$, en $z_0 = 0$.

Resolució:

(i) $f(z) = e^z - 1$, $z_0 = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. Observem que $f'(z) = e^z$ i que:

$$f(2\pi k i) = e^{2\pi k i} - 1 = 0, \quad f'(2\pi k i) = e^{2\pi k i} = 1.$$

Per tant, per cada $k \in \mathbb{Z}$, $z_0 = 2\pi k i$ és un zero d'ordre 1.

(ii) $f(z) = \sin z - \tan z$, $z_0 = 0$. Notem que

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sin z - \tan z, \qquad f(0) = 0; \\
f'(z) &= \cos z - 1 - (\tan z)^2, \qquad f'(0) = 0; \\
f''(z) &= -\sin z - 2\tan z(1 + (\tan z)^2) = -\sin z - 2\tan z - 2(\tan z)^3, \qquad f''(0) = 0; \\
f'''(z) &= -\cos z - 2(1 + (\tan z)^2) - 6(\tan z)^2(1 + (\tan z)^2), \qquad f'''(0) = -3.
\end{aligned}$$

Per tant f té un zero de mutiplicitat 3 a $z_0 = 0$.

(iii) $f(z) = \cos z - 1 + \frac{1}{2}(\sin z)^2$ i $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \cos z - 1 + \frac{1}{2}(\sin z)^2, \qquad f(0) = 0; \\
f'(z) &= -\sin z + \sin z \cos z = -\sin z + \frac{1}{2}\sin(2z), \qquad f'(0) = 0; \\
f''(z) &= -\cos z + \cos(2z), \qquad f''(0) = 0; \\
f'''(z) &= \sin z - 2\sin(2z), \qquad f'''(0) = 0; \\
f^{iv}(z) &= \cos z - 4\cos(2z), \qquad f^{iv}(0) = -3.
\end{aligned}$$

També es pot fer usant les sèries de Taylor. Es millor usar una fórmula alternativa de $f(z)$. Com $(\sin z)^2 = \frac{1-\cos(2z)}{2}$:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \cos z - 1 + \frac{1}{4}(1-\cos 2z) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} - 1 + \frac{1}{4}\left(1 - \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n 2^{2n-2} z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n (1-2^{2n-2})}{(2n)!} z^{2n} \\
&= -\frac{3}{4!}z^4 + \mathcal{O}(z^6).
\end{aligned}
$$

Així $z_0 = 0$, és un zero de multiplicitat 4 de f i $f^{iv}(0) = -3$.

3. Trobeu els zeros i les seves multiplicitats de

(i) $f(z) = (1+z^2)^4$.

(ii) $f(z) = \sin^2 z$.

(iii) $f(z) = 1 + e^z$.

(iv) $f(z) = z^3 \cos z$.

Resolució:

(i) $f(z) = (1+z^2)^4 = (z-i)^4(z+i)^4$, per tant té zeros a $z = \pm i$ de multiplicitat 4.

(ii) $f(z) = \sin^2 z$. Busquem els zeros de $\sin z = 0$: $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0$ si i només si $e^{2iz} = 1$, és a dir $2iz = 2k\pi i$, per $k \in \mathbb{Z}$, és a dir $z = k\pi$. A més, com

$$\sin k\pi = 0, \qquad \cos k\pi = (-1)^k,$$

la funció $\sin z$ té un zero simple a $z = k\pi$ i, en conseqüència, $\sin^2 z$ té un zero doble a $k\pi$. De fet:

$$
\begin{aligned}
\sin z &= (-1)^k(z-k\pi) + \mathcal{O}(z-k\pi)^2 = (-1)^k(z-k\pi)(1+\mathcal{O}(z-k\pi)), \\
f(z) &= \sin^2 z = (z-k\pi)^2(1+\mathcal{O}(z-k\pi))^2 = (z-k\pi)^2(1+\mathcal{O}(z-k\pi)).
\end{aligned}
$$

Per tant f té un zero de mutiplicitat 2 a $z_0 = 0$.

(iii) $f(z) = 1 + e^z = 0$, $e^z = -1 = 1e^{i\pi}$, per tant, igualant mòduls i arguments:

$$
\begin{aligned}
&e^{\operatorname{Re} z} = 1 \implies \operatorname{Re} z = 0 \\
&\operatorname{Im} z = \pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Així, els zeros de $f(z)$ són $z = (2k+1)i\pi$. Com $f'(z) = e^z$, tenim que $f'((2k+1)i\pi) = -1$i per tant tots els zeros de $f(z)$ són simples.

(iv) $f(z) = z^3\cos z = 0$ si o bé $z = 0$, o bé $\cos z = 0$. Tenim que $\cos z = 0$ si $e^{iz} + e^{-iz} = 0$ o equivalentment si $e^{2iz} = -1$. Tal com hem vist a l'apartat anterior, cal que $2iz = (2k+1)i\pi$, és a dir $z = \frac{2k+1}{2}\pi$.
En $z_0 = 0$ clarament la multiplicitat és tres. En efecte, $f(z) = z^3\cos z$ i $\cos 0 = 1 \neq 0$, per tant té multiplicitat 3.
Considerem ara els zeros $z_0 = \frac{2k+1}{2}\pi$. En aquest cas la multiplicitat és 1 perquè: $f'(z_0) = -z_0^3 \sin z_0 + 3z_0^2\cos z_0 = z_0^3(-1)^{k+1} \neq 0$.

4. Classifiqueu la singularitat de les funcions següents en $z = 0$. Si és evitable, digueu quin valor l'evita. Si és un pol, trobeu la part principal de la funció en $z = 0$.

(i) $f(z) = \dfrac{1}{\tan z} - \dfrac{1}{\sin z}$.

(ii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

(iii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$.

(iv) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$.

(v) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$.

(vi) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$.

(vii) $f(z) = z\cos(1/z)$.

(viii) $f(z) = e^{1/z}$.

(ix) $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$.

Resolució:

(i) $f(z) = \frac{1}{\tan z} - \frac{1}{\sin z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{\sin z} = \frac{\cos z - 1}{\sin z}$, per tant té una singularitat a $z_0 = 0$, ja que $\sin 0 = 0$. Com $\cos 0 - 1 = 0$, és una possible singularitat evitable, per veure-ho usem les sèries de Taylor del numerador i el denominador:

$$\cos z - 1 = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = z^2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-2} = z^2 g_1(z), \tag{1.1}$$

amb $g_1(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$ i

$$\sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = z g_2(z), \tag{1.2}$$

amb $g_2(0) = 1 \neq 0$.

Usant aquests desenvolupaments per fer el límit (de fet, en aquest cas les funcions són enteres, per tant els desenvolupaments són iguals a les funcions a tot el pla complex):

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 g_1(z)}{z g_2(z)} = 0.$$

Per tant $f(z)$ té una singularitat evitable en $z_0 = 0$ i el valor que la fa holomorfa, de fet entera, és definir $f(0) = 0$.

Nota: observem que usar els desenvolupaments de Taylor per fer el límit és equivalent a usar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{-\sin z}{\cos z} = 0.$$

(ii) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Tal com hem fet a l'apartat anterior, usem la sèrie de Taylor de la funció $\sin z$, donada a (1.2):

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{z g_2(z)}{z} = 1.$$

Per tant la singularitat és evitable i el valor que fa la funció f holomorfa (entera) és $f(0) = 1$.

(iii) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$. Tal com hem fet a l'apartat anterior, usem la sèrie de Taylor de la funció $\sin z$, donada a (1.2):

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{z g_2(z)}{z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{g_2(z)}{z^3} \implies \lim_{z\to 0} |f(z)| = \infty$$

ja que $g_2(0) = 1$. Per veure que és un pol i calcular la seva part principal, usem un altre cop la sèrie de Taylor:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} z \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4)\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \mathcal{O}(z).$$

Deduïm per tant que $z = 0$ és un pol d'ordre 3 i la seva part principal és $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z}$.

(iv) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. Clarament, com $\cos 0 = 1$,

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} \frac{|\cos z|}{|z|} = \infty.$$

Per veure que $z = 0$ és un pol i calcular la seva part principal, usem la sèrie de Taylor de la funció $\cos z$, donada a (1.1) que defineix una funció entera:

$$f(z) = \frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \frac{1}{z}(1 + \mathcal{O}(z^2)) = \frac{1}{z} + \mathcal{O}(z).$$

Per tant $z = 0$ és un pol d'ordre 1 i la seva part principal és $\frac{1}{z}$.

(v) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$, per tant té una singularitat a $z_0 = 0$. Com $\cos 0 - 1 = 0$, és una possible singularitat evitable. Per veure-ho usem un altre cop la sèrie de Taylor del $\cos z$ donada a (1.1):

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 g_1(z)}{z} = 0.$$

Per tant $f(z)$ té una singularitat evitable en $z_0 = 0$ i el valor que la fa holomorfa, de fet entera, és definir $f(0) = 0$.

(vi) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$, per tant té una singularitat a $z_0 = 0$. Com $\cos 0 - 1 = 0$, és una possible singularitat evitable. Usant la sèrie de Taylor del $\cos z$ donada a (1.1):

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 g_1(z)}{z^2} = g_1(0) = -\frac{1}{2}$$

Per tant $f(z)$ té una singularitat evitable en $z_0 = 0$ i el valor que la fa holomorfa, de fet entera, és definir $f(0) = -\frac{1}{2}$.

(vii) La funció $f(z) = z\cos\frac{1}{z} = z\frac{e^{i\frac{1}{z}}+e^{-i\frac{1}{z}}}{2}$ té una singularitat a $z_0 = 0$. Per veure que és una singularitat essencial, veurem que el límit de $f(z)$ quan $z \to 0$, no existeix prenent dos camins diferents al pla complex. Per una banda, si $z = x + iy$, fem el límit quan $\operatorname{Re} z = x = 0$ i $\operatorname{Im} z = y < 0$:

$$\lim_{x=0,\, y<0,\, y\to 0} z\frac{e^{i\frac{1}{z}}+e^{-i\frac{1}{z}}}{2} = \lim_{y<0,\, y\to 0} iy\frac{e^{\frac{1}{y}}+e^{-\frac{1}{y}}}{2} = -i\infty.$$

Per altra banda, fem el límit quan $\operatorname{Re} z = x \to 0$ i $\operatorname{Im} z = y = 0$:

$$\lim_{y=0, x\to 0} z\frac{e^{i\frac{1}{z}}+e^{-i\frac{1}{z}}}{2} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Per tant el $\lim_{z\to 0} f(z)$ no existeix i tenim a $z_0 = 0$ una singularitat essencial.

(viii) Igual que a l'apartat anterior $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, tindrà una singularitat essencial a l'origen. Per comprovar-ho, veiem que el límit a l'origen no existeix prenent dos camins diferents al pla complex. Per una banda, si $z = x + iy$, fem el límit quan $\operatorname{Re} z = x > 0$ i $\operatorname{Im} z = y = 0$:

$$\lim_{x>0,\, y=0,\, x\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x>0,\, x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Si ara fem el límit quan $\operatorname{Re} z = x < 0$ i $\operatorname{Im} z = y = 0$:

$$\lim_{x<0,\, y=0,\, x\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x<0,\, x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

Per tant el $\lim_{z\to 0} f(z)$ no existeix i tenim a $z_0 = 0$ una singularitat essencial.

(ix) Clarament: $\lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} \frac{1}{|1-e^z|} = \infty$. Per veure que és un pol i calcular la seva part principal, usem la sèrie de Taylor de e^z:

$$1 - e^z = 1 - \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n!} = -z\sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{n!} = -z\left(1 + \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2)\right) = -zg(z).$$

Observem que $g(0) = 1 \neq 0$. Per tant $\frac{1}{g(z)}$ és holomorfa i $\frac{1}{g(z)} = 1 + \mathcal{O}(z)$. Amb això ja en tenim prou per trobar la part principal de la funció $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{1-e^z} = \frac{1}{-zg(z)} = \frac{-1}{z}\frac{1}{g(z)} = \frac{-1}{z}(1 + \mathcal{O}(z)) = -\frac{1}{z} + \mathcal{O}(1).$$

Així, $z = 0$ és un pol d'ordre 1 i la seva part principal és $\frac{-1}{z}$.

5. Trobeu les singularitats de les funcions següents i classifiqueu-les: digueu si són evitables, pols (i de quin ordre) o essencials.

(i) $f(z) = \dfrac{(\cos z - 1)^3 \sin(z^2)\sin(\pi z)}{(e^z - 1)(z^2+1)}$.

(ii) $f(z) = \dfrac{z(z-1)^3}{\sin^2(\pi z)}$.

Resolució:

(i) $f(z) = \frac{(\cos z - 1)^3 \sin z^2 \sin \pi z}{(e^z-1)(z^2+1)}$, com aquesta funció és el quocient de dues funcions enteres, les úniques singularitats són els zeros del denominador que són: $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ on s'anul·a $e^z - 1$, i $z = \pm i$ on s'anul·a z^2+1.

- $z_0 = 0$. Observem que el numerador també s'anul·la a $z_0 = 0$ per tant podria ser una singulartitat evitable. Ho comprovem usant les sèries de Taylor a l'origen de les funcions:

$$(\cos z - 1)^3 = \left(z^2 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-2} \right)^3 = z^6 (g_1(z))^3,$$

amb $g_1(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$.

$$\sin z^2 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z^2)^{2n+1} = z^2 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z^2)^{2n} = z^2 g_2(z^2),$$
$$\sin \pi z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi z)^{2n+1} = \pi z \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi z)^{2n} = \pi z g_2(\pi z),$$

amb $g_2(0) = 1 \neq 0$.

$$e^z - 1 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} z^n = z \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} z^{n-1} = z g_3(z),$$

amb $g_3(0) = 1 \neq 0$.
Usant aquests desenvolupaments per fer el límit (de fet, en aquest cas les funcions són enteres, per tant els desenvolupaments són iguals a les funcions a tot el pla complex):

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{(\cos z - 1)^3 \sin z^2 \sin \pi z}{(e^z-1)(z^2+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^6 (g_1(z))^3 z^2 g_2(z^2) \pi z g_2(\pi z)}{z g_3(z)(z^2+1)} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{z^8 (g_1(z))^3 g_2(z^2) \pi g_2(\pi z)}{g_3(z)(z^2+1)} = 0.\end{aligned}$$

Per tant $f(z)$ té una singularitat evitable en $z_0 = 0$ i el valor que la fa holomorfa és definir $f(0) = 0$.

- $z_0 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. En aquest cas denotem per $G(z) = \frac{(\cos z-1)^3 \sin z^2 \sin \pi z}{(z^2+1)}$ i observem que $G(z_0) \neq 0$, per tant, $G(z) = G(z_0) + \mathcal{O}(z - z_0)$. Per altra banda, com $e^{z_0} = 1$, i usant que la funció e^z és entera:

$$e^z - 1 = e^{z-z_0} - 1 = \sum_{n\geq 1} \frac{(z-z_0)^n}{n!} = (z - z_0) \sum_{n\geq 1} \frac{(z-z_0)^{n-1}}{n!} = (z-z_0) g_3(z-z_0),$$

amb $g_3(0)=1$ i per tant $\frac{1}{g_3(z-z_0)}=1+\mathcal{O}(z-z_0)$. Amb aquestes dades ja podem veure que z_0 és un pol d'ordre 1 i trobar la seva part principal:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{G(z)}{e^z-1} = \frac{1}{(z-z_0)}G(z)\frac{1}{g_3(z-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)}(G(z_0)+\mathcal{O}(z-z_0))(1+\mathcal{O}(z-z_0)) \\ &= \frac{1}{(z-z_0)}(G(z_0)+\mathcal{O}(z-z_0)) = \frac{G(z_0)}{(z-z_0)}+\mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Per tant z_0 és un pol d'ordre 1 i la seva part principal és $\frac{G(z_0)}{(z-z_0)}$.

- Per estudiar les singularitats $z_0=\pm i$, fem com a l'apartat anterior. Detallem el cas $z_0=i$, l'altre es fa exactament igual. Denotem per $\widehat{G}(z)=\frac{(\cos z-1)^3\sin z^2\sin\pi z}{(e^z-1)(z+i)}$ i observem que $\widehat{G}(i)\neq 0$. Llavors $\widehat{G}(z)=\widehat{G}(i)+\mathcal{O}(z-i)$. Amb aquestes dades ja podem veure que $z_0=i$ és un pol d'ordre 1 i trobar la seva part principal:

$$f(z)=\frac{\widehat{G}(z)}{z-i}=\frac{1}{z-i}(\widehat{G}(i)+\mathcal{O}(z-i))=\frac{\widehat{G}(i)}{(z-i)}+\mathcal{O}(1).$$

Així tenim que $z_0=i$ és un pol d'ordre 1 i la seva part principal és $\frac{\widehat{G}(i)}{(z-i)}$.

(ii) $f(z)=\frac{z(z-1)^3}{\sin^2\pi z}$. Les possibles singularitats son els zeros de $\sin\pi z$, que son les solucions de $e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}=0$, o , equivalentment les de $e^{2i\pi z}=1$. Aquestes venen donades per $2i\pi z=2\pi k i$, $k\in\mathbb{Z}$, és a dir: $z_k=k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Desenvolupant per Taylor $g(z)=\sin\pi z$ tenim:

$$\begin{aligned} g(k)=\sin\pi k=0,\ g'(\pi k)&=\pi\cos\pi k=\pi(-1)^k \\ \sin\pi z=\pi(-1)^k(z-k)+\mathcal{O}(z-k)^2&=\pi(-1)^k(z-k)(1+\mathcal{O}(z-k)) \\ \sin^2\pi z=\pi^2(z-k)^2(1+\mathcal{O}(z-k))^2&=\pi^2(z-k)^2(1+\mathcal{O}(z-k)) \end{aligned}$$

- $z_0=0$, observem que el numerador també s'anul·a $z_0=0$. Calculem el límit:

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z(z-1)^3}{\sin^2\pi z}=\lim_{z\to 0}\frac{z(z-1)^3}{\pi^2z^2(1+\mathcal{O}(z))}=\lim_{z\to 0}\frac{(z-1)^3}{\pi^2 z(1+\mathcal{O}(z))}.$$

Així $\lim_{z\to 0}|f(z)|=\infty$. Per tant $f(z)$ té un pol a $z_0=0$. Per calcular la seva part principal, usem el desenvolupament de Taylor un altre cop:

$$f(z)=\frac{z(z-1)^3}{\pi^2z^2(1+\mathcal{O}(z))}=\frac{(z-1)^3}{\pi^2z(1+\mathcal{O}(z))}=\frac{-1+\mathcal{O}(z)}{\pi^2z(1+\mathcal{O}(z))}=\frac{-1}{\pi^2}\frac{1}{z}+\mathcal{O}(1).$$

Per tant $f(z)$ té un pol d'ordre 1 a $z_0=0$ i la seva part principal és $\frac{-1}{\pi^2}\frac{1}{z}$.

- $z_1=1$, observem que el numerador també s'anul·la a $z_1=1$. Calculem el límit:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 1}f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)^3}{\sin^2\pi z}&=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)^3}{\pi^2(z-1)^2(1+\mathcal{O}(z-1))}=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)}{\pi^2(1+\mathcal{O}(z-1))} \\ &=0. \end{aligned}$$

Veiem per tant que $f(z)$ té una singularitat evitable a $z_1=1$ i el valor que hem de donar a $f(z)$ per tal que sigui holomorfa a $z_1=1$ és $f(1)=0$.

- $z_k = k$, $k \neq 0, 1$. El numerador no s'anul·la a z_k, per tant tindrem un pol d'ordre dos, com podrem veure usant el desenvolupament de Taylor. Per una banda:

$$z(z-1)^3 = a_0 + a_1(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2, \qquad a_0, a_1 \neq 0,$$

és fàcil obtenir fórmules pels coeficients a_0, a_1, però no ho fem aquí perque no és rellevant. D'altra banda:

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{z(z-1)^3}{\sin^2 \pi z} = \frac{a_0 + a_1(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2}{\pi^2(z-k)^2(1+\mathcal{O}(z-k))} \\ =& \frac{1}{(z-k)^2} \frac{a_0 + a_1(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2}{\pi^2(1+\mathcal{O}(z-k))}. \end{aligned}$$

Amb això ja veiem que f té un pol d'ordre dos a $z_k = k$. Si volguèssim calcular la part principal necessitaríem més dades sobre el desenvolupament del $\sin^2 \pi z$:

$$\sin^2 \pi z = \pi^2(z-k)^2(1 + b_1(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2)$$

on els número b_1 és fàcil de calcular:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi^2(z-k)^2} \frac{a_0 + a_1(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2}{1 + b_1(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2)} \\ &== \frac{1}{\pi^2(z-k)^2}(a_0 + a_1(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2)(1 - b_1(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2)) \\ &= \frac{1}{\pi^2(z-k)^2}(a_0 + (a_1 - a_0 b_1)(z-k) + \mathcal{O}(z-k)^2). \end{aligned}$$

Per tant la part principal vindria donada per:

$$\frac{a_0}{\pi^2(z-k)^2} + \frac{a_1 - a_0 b_1}{\pi^2(z-k)}.$$

6. Demostreu que si $f(z)$ és una funció entera i injectiva, aleshores $f(z) = az + b$ per certs $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. (Indicació: Useu els teoremes de Liouville, Casorati-Weierstrass i de l'aplicació oberta per veure que $z = 0$ ha de ser un pol de $g(z) = f(1/z)$.)

Resolució: Per una banda, sabem que f és entera. Per tant $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, per a tot $z \in \mathbb{C}$. Conseqüentment:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^n}, \qquad z \neq 0.$$

Això deixa clar que $g(z) = f(\frac{1}{z})$ té una singularitat en $z = 0$.

Veiem que no és una singularitat evitable. Si ho fos, caldria que $\lim_{z \to 0} g(z) = L < \infty$, però això implicaria, en particular, que existiria un $\varepsilon \ll 1$ i una constant $M > 0$, tals que:

$$\forall z \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}, \qquad |g(z)| \leq M.$$

Veiem que aquest fet implica que f és fitada a tot $\mathbb{C}$:

- Com f és continua existirà M_1 tal que si $|z| \leq \frac{1}{\varepsilon}$, aleshores $|f(z)| \leq M_1$.

- Si $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$ aleshores $\left|\frac{1}{z}\right| < \varepsilon$ i per tant $|f(z)| = \left|g\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq M$.

Prenent $\overline{M} = \max(M, M_1)$ tenim que f està fitada per $\overline{M}$, però com f és entera això implicaria, pel teorema de Liouville, que és constant i això contradiu la hipòtesi que f sigui injectiva. En conclusió g no pot tenir una singularitat evitable en $z = 0$.

Veiem ara que g no pot tenir una singularitat essencial en $z = 0$. En efecte, si la tingués, pel teorema de Cassoratti-Weirstrass, existiria $\varepsilon > 0$ i $g(B_\varepsilon(0) \setminus \{0\})$ seria dens a $\mathbb{C}$. Observem que, en aquest cas,

$$g(B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) = f(\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)}) \quad \text{és dens a } \mathbb{C}.$$

$$f\left(B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)\right) \text{ és obert pel Teorema de l' aplicació oberta.}$$

Llavors $f(\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)}) \cap f(B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)) \neq \emptyset$. Sigui $z \in f\left(\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)}\right) \cap f(B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0))$ i triem $w_1 \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)}$ i $w_2 \in B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$ (i per tant $w_1 \neq w_2$) tals que $z = f(w_1) = f(w_2)$. Aquest fet contradiu que f sigui injectiva.

Hem provat dons que 0 és un pol de $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ i per tant $\exists N \in \mathbb{N}$ $(N > 0)$ tal que

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots \frac{a_N}{z^N}, \qquad z \neq 0.$$

És a dir,

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + a_1 z + \dots a_N z^N, \quad z \neq 0$$

és un polinomi de grau N. Com f és injectiva, només pot tenir una arrel. Per tant o bé $N = 1$:

$$f(z) = a_0 + a_1 z.$$

o bé $f(z) = c(z - a)^N$ amb $N \geq 2$ i $c \neq 0$. En aquest darrer cas, existeixen z_1, z_2 satisfent $(z_1 - a)^N = (z_2 - a)^N = c$ i $z_1 \neq z_2$. Per tant f no és injectiva.

Concluim dient que $a_1 \neq 0$, ja que si $a_1 = 0$, f seria constant i per tant no seria injectiva.

7. Proveu que una singularitat aïllada és evitable si i només si $\mathrm{Re}(f(z))$ o $\mathrm{Im}(f(z))$ és acotada superiorment o inferiorment. (Indicació: Si $\mathrm{Re}(f(z))$ acotada superiorment considereu $h(z) = e^{f(z)}$. Penseu quines altres funcions heu de considerar en cada cas.)

Resolució: Sigui z_0 la singularitat de $f(z)$. Assumim primer que $\mathrm{Re}(f(z))$ o $\mathrm{Im}(f(z))$ és acotada superiorment o inferiorment per exemple, $\mathrm{Re}(f(z))$ acotada superiorment en un entorn U de z_0. Definim la funció (tal com ens diu la indicació) $h(z) = \exp(f(z))$. És clar que $|h(z)| = \exp(\mathrm{Re}(f(z))$ és acotada. Per tant z_0 és una singularitat evitable de $h(z)$. És a dir, es pot definir una funció holomorfa a U tal que $\hat{h}(z) = h(z)$ per a tot $z \neq z_0$ i $\hat{h}(z_0) = \lim_{z \to z_0} h(z)$ el qual sabem que existeix.

Sigui $z \in U \backslash \{z_0\}$. En aquest cas $h(z) \neq 0$ i per tant $f(z) = \log \hat{h}(z)$ amb la mateixa determinació del logaritme perquè en cas contrari $f(z)$ no seria analítica (de fet ni contínua) a $U \backslash \{z_0\}$. És a dir, prenem $\arg(\hat{h}(z)) \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ per $z \in U \backslash \{z_0\}$. Si $\hat{h}(z_0) = 0$, com $\hat{h}(U)$ és un entorn obert de $\hat{h}(z_0) = 0$, hi hauran valors de z tals que $\arg(\hat{h}(z)) = \theta_0 - \pi$ (o $\arg(\hat{h}(z)) = \theta_0 + \pi$) i per tant arribem a contradicció. Així $\hat{h}(z_0) \neq 0$ i per tant $\lim_{z \to z_0} f(z) = \log(\hat{h}(z_0))$. Llavors z_0 és una singularitat evitable.

Si $\mathrm{Re}(f(z))$ és acotada inferiorment, definim $h(z) = \exp(-f(z))$, si $\mathrm{Im}(f(z))$ és acotada superiorment, definim $h(z) = \exp(-if(z))$ i si $\mathrm{Im}(f(z))$ és acotada inferiorment, definim $h(z) = \exp(if(z))$. Llavors procedim de la mateixa manera que en el cas $\mathrm{Re}(f(z))$ acotada superiorment.

Suposem ara que z_0 és una singularitat evitable de $f(z)$. Llavors $|f(z)|$ és acotat en un entorn de z_0 és a dir,

$$\sqrt{|\mathrm{Re}(f(z))|^2 + |\mathrm{Im}(f(z))|^2} \leq M \Longrightarrow |\mathrm{Re}(f(z))|, |\mathrm{Im}(f(z))| \leq M.$$

Per tant $-M \leq \mathrm{Re}(f(z)) \leq M$ i $-M \leq \mathrm{Im}(f(z)) \leq M$.

Resolució 2:

Veiem ara una altra manera de demostrar que si $\mathrm{Re}(f(z))$ o $\mathrm{Im}(f(z))$ és acotada superiorment o inferiorment aleshores z_0 és singularitat evitable.

Si fos essencial sabem que $f(U\backslash\{z_0\})$ seria dens a $\mathbb{C}$.

Si existeix un $M \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(f(z)) \leq M$, aleshores prenent per exemple $w_1 = M + 3$ és clar que tots els punts verifiquen que $|f(z) - w_1| \geq 2$ per tant $f(\mathbb{C})$ no és dens a $\mathbb{C}$.

Anàlogament, si existeix un $N \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(f(z)) \geq N$, aleshores prenent per exemple $w_2 = N - 3$ és clar que tots els punts verifiquen que $|f(z) - w_2| \geq 2$ per tant $f(\mathbb{C})$ no és dens a $\mathbb{C}$.

Raonaments similars es poden fer amb la part imaginària de f.

Deduim doncs, que z_0 no pot ser una singularitat essencial. Només pot ser, doncs, un pol o una singularitat evitable.

Suposem que és un pol. Aleshores existeix $N > 0$ i una funció g holomorfa en un entorn U de z_0, $g(z_0) \neq 0$, i tenim:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^N} g(z), \quad \forall z \in U$$

Com $g(z_0) \neq 0$ sabem que o bé la seva part real o imaginària no són zero. Suposem que $\mathrm{Re}\, g(z_0) \neq 0$. Ara veurem que $\mathrm{Re}\, f(z)$ i $\mathrm{Im}\, f(z)$ no poden ser fitades ni superiorment ni inferiorment en U.

Farem el cas que $\mathrm{Re}\, g(z_0) > 0$, els altres es fan anàlogament.

Notem que:

$$\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{(z - z_0)^N} \mathrm{Re}(g(z)) - \mathrm{Im}(\frac{1}{(z - z_0)^N}) \mathrm{Im}(g(z))$$
$$\mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Re}(\frac{1}{(z - z_0)^N}) \mathrm{Im}(g(z)) + \mathrm{Im}(\frac{1}{(z - z_0)^N}) \mathrm{Re}(g(z))$$

La primera observació és que si $z \in U$ $\mathrm{Re}\, g(z) > 0$.

Prenem $z = z_0 + te^{i\pi/N}$, $t > 0$, aleshores $(z - z_0)^N = t^N e^{i\pi} = -t^N$ per tant:

$$\mathrm{Re}\, f(z) = -\frac{1}{t^N} \mathrm{Re}(g(z)) \to -\infty, \text{ si } t \to 0$$

per tant $\mathrm{Re}\, f$ no pot ser acotada inferiorment en U.

Prenem ara $z = z_0 + t$, $t > 0$, aleshores $(z - z_0)^N = t^N$ per tant:

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{t^N} \operatorname{Re}(g(z)) \to \infty, \text{ si } t \to 0$$

per tant $\operatorname{Re} f$ no pot ser acotada superiorment en U.

Prenem $z = z_0 + te^{i\pi/2N}$, $t > 0$, aleshores $(z - z_0)^N = t^N e^{i\pi/2} = it^N$ per tant:

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{t^N} \operatorname{Re}(g(z)) \to \infty, \text{ si } t \to 0$$

per tant $\operatorname{Im} f$ no pot ser acotada superiorment en U.

Per últim si prenem: $z = z_0 + te^{i3\pi/2N}$, $t > 0$, aleshores $(z - z_0)^N = t^N e^{i3\pi/2} = -it^N$ per tant:

$$\operatorname{Im} f(z) = -\frac{1}{t^N} \operatorname{Re}(g(z)) \to -\infty, \text{ si } t \to 0$$

per tant $\operatorname{Im} f$ no pot ser acotada inferiorment en U.

Hem vist que si f té un pol a z_0 aleshores $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ no poden ser fitades superiorment ni inferiorment.

8. Calculeu la sèrie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en les corones:

(i) $0 < |z| < 1$.

(ii) $1 < |z| < 2$.

(iii) $2 < |z| < \infty$.

Resolució: Fem descomposició en fraccions simples de la funció $f(z)$:

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} \Longrightarrow 1 = A(z-1)(z-2) + Bz(z-2) + Cz(z-1).$$

Llavors $A = 1/2$, $B = -1$ i $C = 1/2$. Calcularem les sèries de Laurent de $1/z, 1/(z-1)$ i $1/(z-2)$ en cadascuna de les corones i llavors utilitzant la descomposició en fraccions simples, calcularem la sèrie de Laurent per $f(z)$.

(i) Com $|z| < 1$:

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n \geq 0} z^n, \qquad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n}. \tag{1.3}$$

Per tant:

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2(z-2)} = \frac{1}{2z} + \sum_{n \geq 0} z^n - \frac{1}{4}\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{2z} + \sum_{n \geq 0} z^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right).$$

(ii) Com $|z| < 2$, tenim que el mateix que a (1.3) respecte $1/(z-2)$. Per calcular la sèrie de Laurent per $1/(z-1)$ per $1 < |z| < 2$ observem que

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

i com $|z|^{-1} < 1$, llavors

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{0} z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n.$$

Per tant

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} = -\frac{1}{2z} - \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n - \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+2}}.$$

(iii) El desenvolupament per $1/(z-1)$ és el mateix que en l'apartat anterior, ja que $|z|^{-1} < 1/2$. Per trobar la sèrie de Laurent de $1/(z-2)$, com $|z|^{-1} < 2$:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1} z^n.$$

Llavors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z} - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1} z^n = \frac{1}{2z} + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \left(2^{-n-2} - 1\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-3} z^n \left(2^{-n-2} - 1\right). \end{aligned}$$

9. Calculeu la sèrie de Laurent de $f(z) = \dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ en les corones:

(i) $|z| < 2$.

(ii) $2 < |z| < 3$.

(iii) $|z| > 3$.

Resolució: $f(z) = \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$, comencem per decomposar en fraccions simples, ja que això simplifica molt els càlculs posteriors:

$$f(z) = \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)} = 1 - \frac{5z+7}{(z+2)(z+3)} = 1 + \frac{3}{z+2} - \frac{8}{z+3}$$

(i) Si $|z| < 2$ tenim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{3(1+\frac{z}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n \\ f(z) &= 1 + \frac{3}{z+2} - \frac{8}{z+3} = 1 + \frac{3}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} - \frac{8}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^n} \\ &= -\frac{1}{6} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{8}{3^{n+1}}\right) z^n \end{aligned}$$

(ii) $2 < |z| < 3$. En aquest cas, com $|z|/2 > 1$ no podem usar el mateix desenvolupament per $\frac{1}{z+2}$ però com $|z|/3 < 1$ sí que podem usar el mateix desenvolupament per $\frac{1}{z+3}$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}2^{-n-1}z^n,$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{3}{z+2} - \frac{8}{z+3} = 1 + 3\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}2^{-n-1}z^n - \frac{8}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^n} \\ &= -\frac{5}{3} + 3\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}2^{-n-1}z^n - \frac{8}{3}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}. \end{aligned}$$

(iii) $3 < |z|$. En aquest cas, com $|z|/3 > 1$ farem el mateix desenvolupament de l'apartat anterior a $\frac{1}{z+3}$ i com $|z|/2 > 1$ farem el mateix per $\frac{1}{z+2}$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}2^{-n-1}z^n$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z(1+\frac{3}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}3^{-n-1}z^n$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{3}{z+2} - \frac{8}{z+3} = 1 + 3\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}2^{-n-1}z^n - 8\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}3^{-n-1}z^n \\ &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}z^n(3\cdot 2^{-n-1} - 8\cdot 3^{-n-1}). \end{aligned}$$

10. Trobeu la sèrie de Laurent de les següents funcions en el disc puntejat $D_{z_0}(R)\setminus\{z_0\}$ i digueu fins a quin radi R convergeixen.

(i) $f(z) = \dfrac{8-2z}{4z-z^3}$ en $z_0 = 0$.

(ii) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}$ en $z_0 = \pi$.

(iii) $f(z) = z\cos(1/z)$ en $z = 0$.

Resolució:

(i) Com estem treballant per $z \in D_0(R)\setminus\{0\}$, és a dir, per valors de z en un entorn de l'origen, escrivim

$$f(z) = \frac{8-2z}{4z}\frac{1}{1-\frac{z^2}{4}}.$$

Llavors, per $\left|\frac{z^2}{4}\right| < 1$, és a dir $|z| < 2$,

$$f(z) = \frac{8-2z}{4z}\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{2^{2n}} = \frac{2}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{2^{2n}} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{2^{2n}} = 2\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n-1}}{2^{2n}} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{2^{2n}}.$$

El radi de convergència és 2.

(ii) Com $\cos z = \cos(\pi + z - \pi) = -\cos(z - \pi)$ i volem el desenvolupament de Laurent en un entorn de $z_0 = \pi$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-\pi)^3} \cos z = -\frac{1}{(z-\pi)^3} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n-3}}{(2n)!}$$

que té radi de convergència $R = \infty$ ja que $\cos z$ és una funció entera.

(iii) En aquest cas, com $\cos(w)$ és una funció entera:

$$f(z) = z \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}}$$

que té radi de convergència $R = \infty$.

11. **Regla de l'Hôpital per a funcions holomorfes o meromorfes.** Siguin $f(z)$ i $g(z)$ dues funcions meromorfes en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(i) Proveu que si f i g són holomorfes en $z = z_0 \in \Omega$ i $f(z_0) = g(z_0) = 0$, aleshores $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

(ii) Proveu que si f i g tenen un pol a $z = z_0 \in \Omega$, aleshores $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

Resolució:

(i) Si $f(z), g(z)$ són holomorfes en z_0 i $f(z_0) = g(z_0) = 0$, llavors

$$f(z) = (z - z_0)^n \hat{f}(z), \qquad g(z) = (z - z_0)^m \hat{g}(z), \qquad \text{amb } \hat{f}(z_0), \hat{g}(z_0) \neq 0.$$

i també

$$f'(z) = (z - z_0)^{n-1}(n\hat{f}(z) + (z - z_0)\hat{f}'(z)), \qquad g'(z) = (z - z_0)^{m-1}(m\hat{g}(z) + (z - z_0)\hat{g}'(z)).$$

Llavors

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{\hat{f}(z)}{\hat{g}(z)}, \qquad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{n\hat{f}(z) + (z - z_0)\hat{f}'(z)}{m\hat{g}(z) + (z - z_0)\hat{g}'(z)}.$$

Així tenim que

- Si $n > m$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = 0.$$

- Si $n = m$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{\hat{f}(z_0)}{\hat{g}(z_0)}.$$

- Si $n < m$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \infty.$$

(ii) En el cas que $f(z), g(z)$ tinguin un pol a z_0, llavors

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}\widetilde{f}(z), \qquad g(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\widetilde{g}(z), \qquad \text{amb } \widetilde{f}(z_0), \widetilde{g}(z_0) \neq 0$$

i $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ holomoformes en un entorn de z_0. També

$$f'(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}(-n\widetilde{f}(z)+(z-z_0)\widetilde{f}'(z)), \qquad g'(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}(-m\widetilde{g}(z)+(z-z_0)\widetilde{g}'(z)).$$

Així

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{m-n}\frac{\widetilde{f}(z)}{\widetilde{g}(z)}, \qquad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z-z_0)^{m-n}\frac{-n\widetilde{f}(z)+(z-z_0)\widetilde{f}'(z)}{-m\widetilde{g}(z)+(z-z_0)\widetilde{g}'(z)}.$$

Per tant:

- Si $n < m$,
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)} = 0.$$
- Si $n = m$,
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{\widetilde{f}(z_0)}{\widetilde{g}(z_0)}.$$
- Si $n > m$,
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \infty.$$

12. Si $f(z)$ té un pol simple en $z = a$ i $g(z)$ és holomorfa en $z = a$ demostreu que

$$\text{Res}\,(f\cdot g, a) = g(a)\text{Res}\,(f, a).$$

Resolució: Recordeu que una manera senzilla de calcular el residu d'una funció en un pol $z = a$ és calcular la sèrie de Laurent

$$h(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n.$$

Llavors Res $(h, a) = c_{-1}$.

Per fer servir aquesta forma de calcular el residu, cal calcular les sèries de Laurent de f i g que, sota les nostres hipòtesis, són:

$$f(z) = \frac{c}{z-a}(1+\mathcal{O}(z-a)), \qquad g(z) = g(a) + \mathcal{O}(z-a)$$

amb $c \neq 0$. Tenim llavors que Res $(f, a) = c$ i, com

$$f(z)g(z) = \frac{c}{z-a}(1+\mathcal{O}(z-a))[g(a)+\mathcal{O}(z-a)] = \frac{cg(a)}{z-a}(1+\mathcal{O}(z-a)),$$

llavors Res $(f\cdot g, a) = cg(a) = g(a)$Res (f, a).

Alternativament, si el pol és d'ordre N,

$$\text{Res }(h,a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left((z-a)^N h(z)\right).$$

Llavors, en el nostre cas, com $N=1$ i g és holomorfa a $z=a$:

$$\text{Res }(f\cdot g, a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)g(z) = g(a)\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = g(a)\text{Res }(f,a).$$

13. Trobeu els pols, el seu ordre i residu de les funcions següents:

(i) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$.

(ii) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$.

(iii) $\dfrac{1}{\sin^2 z}$.

(iv) $\dfrac{1}{z^m(1-z)^n}$, $n,m\in\mathbb{N}$.

(v) $z\cot z$

(vi) $\dfrac{\sin z}{z^5}$.

(vii) $\dfrac{1}{1-e^z}$.

Resolució: Anomenarem $f(z)$ a cadascuna de les funcions en els diferents apartats.

(i) Com $z^2+5z+6=(z+2)(z+3)$, la funció té pols d'ordre 1 a $z=-2,-3$. A més

$$\lim_{z\to-2}(z+2)\frac{1}{z^2+5z+6} = \lim_{z\to-2}\frac{1}{z+3} = 1 \Longrightarrow \text{Res}\,(f,-2)=1,$$
$$\lim_{z\to-3}(z+3)\frac{1}{z^2+5z+6} = \lim_{z\to-3}\frac{1}{z+2} = -1 \Longrightarrow \text{Res}\,(f,-3)=-1.$$

(ii) En aquest cas $(z^2-1)^2=(z+1)^2(z-1)^2$. Per tant $z=1,-1$ són pols d'ordre 2. Llavors

$$\text{Res}\,(f,1) = \lim_{z\to1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)^2}{(z^2-1)^2}\right) = \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+1)^2} = \lim_{z\to1}\frac{-2}{(z+1)^3} = -\frac{1}{4}$$

i anàlogament

$$\text{Res}\,(f,-1) = \lim_{z\to-1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z+1)^2}{(z^2-1)^2}\right) = \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-1)^2} = \lim_{z\to-1}\frac{-2}{(z-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

(iii) La funció $\sin z$ s'anul·la per $z=k\pi$ amb $k\in\mathbb{Z}$. Tenim que

$$\sin z = \sin(k\pi+z-k\pi) = (-1)^k\sin(z-k\pi) = (-1)^k(z-k\pi)[1+\mathcal{O}(z-k\pi)^2]$$

i per tant, al voltant de cada singularitat $z_0=k\pi$, $\sin^2 z=(z-k\pi)^2(1+\mathcal{O}(z-k\pi)^2)$. Observeu que llavors deduïm que $f(z)=1/\sin^2 z$ té un pol d'ordre 2. A més:

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2(1+\mathcal{O}(z-k\pi)^2)} = \frac{1}{(z-k\pi)^2}(1+\mathcal{O}(z-k\pi)^2) = \frac{1}{(z-k\pi)^2}+\mathcal{O}(1).$$

Per tant $\text{Res}\,(f,k\pi)=0$.

(iv) La funció $f(z) = z^{-m}(1-z)^{-n}$ té un pol d'ordre m a $z=0$ i un d'ordre n a $z=1$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\frac{z^m}{z^m(1-z)^n}\right) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\frac{1}{(1-z)^n}\\
&= \frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!} = \left(\begin{array}{c} n+m-2 \\ m-1 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Noteu que, quan $m=1$, hi ha un problema notacional en la penúltima igualtat, que queda solucionat amb la darrera expressió ja que $\left(\begin{array}{c} k \\ 0 \end{array}\right) = 1$.

Respecte $\operatorname{Res}(f,1)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,1) &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{(z-1)^n}{z^m(1-z)^n}\right) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\lim_{z\to}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{z^m}\\
&= (-1)^n(-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-2)}{(n-1)!} = -\left(\begin{array}{c} m+n-2 \\ n-1 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Alternativament podem fer servir el desenvolupament de Taylor

$$(1+\omega)^\alpha = \sum_{k\geq 0}\left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array}\right).$$

Llavors si fem el desenvolupament de Laurent al voltant de $z=0$:

$$f(z) = \frac{1}{z^m}\frac{1}{(1-z)^n} = \frac{1}{z^m}\sum_{k\geq 0}(-1)^k\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)z^k$$

tenim que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= (-1)^{m-1}\left(\begin{array}{c} n \\ m-1 \end{array}\right) = (-1)^{m-1}\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-m+2)}{(m-1)!}\\
&= \frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!} = \left(\begin{array}{c} n+m-2 \\ m-1 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Anàlogament el desenvolupament de Laurent al voltant de $z=1$:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^n}\frac{1}{z^m} = \frac{(-1)^n}{(z-1)^n}\frac{1}{(1+(z-1))^m} = \frac{(-1)^n}{(z-1)^n}\sum_{k\geq 0}\left(\begin{array}{c} -m \\ k \end{array}\right)(z-1)^k$$

tenim que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,1) &= (-1)^n\left(\begin{array}{c} m \\ n-1 \end{array}\right) = (-1)^n\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+2)}{(n-1)!}\\
&= (-1)^n(-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-2)}{(n-1)!} = -\left(\begin{array}{c} m+n-2 \\ n-1 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

(v) Observeu que $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$, per tant $f(z) = z\cot z$ té singularitats a $z = k\pi$. Igual que fem abans (apartat (iii)), al voltant de $z=k\pi$, $\sin z = (-1)^k(z-k\pi)(1+\mathcal{O}(z-k\pi)^2)$ i a més

$$\cos z = \cos(k\pi + (z-\pi)) = (-1)^k\cos(z-k\pi) = (-1)^k(1+\mathcal{O}(z-k\pi)^2).$$

Llavors, distingint entre $k=0$ i $k\neq 0$, ja que el numerador $z\cos z$ s'anul·la a $z=0$, però no a $z=k\pi$:

- Quan $k=0$, és a dir, singularitat a $z=0$:

$$f(z) = z\cot z = z\frac{1+\mathcal{O}(z^2)}{z(1+\mathcal{O}(z^2)} = (1+\mathcal{O}(z^2)).$$

  És a dir $z=0$ és una singularitat evitable.
- Quan $k \neq 0$, singularitat $z = k\pi$:

$$\begin{aligned} f(z) = z\cot z &= (k\pi + (z-k\pi))\frac{(-1)^k(1+\mathcal{O}(z-k\pi)^2)}{(-1)^k(z-k\pi)(1+\mathcal{O}(z-k\pi)^2)} \\ &= \frac{1}{z-k\pi}[k\pi + \mathcal{O}(z-k\pi)]. \end{aligned}$$

  Per tant $k\pi$ és un pol d'ordre 1 i $\operatorname{Res}(f, k\pi) = k\pi$.

(vi) La funció $f(z) = z^{-5}\sin z$ només té una singularitat a $z=0$. Tenim que:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^5} = \frac{1}{z^5}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

Per tant $\operatorname{Res}(f,0) = 0$ ja que el coeficient que acompanya a z^4 del desenvolupament de Taylor de $\sin z$ és 0.

(vii) La funció $f(z) = (1-e^z)^{-1}$ té singularitats a $z = 2\pi ik$. És clar que

$$e^z - 1 = e^{z-2\pi ik} - 1 = (z-2\pi ik) + \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}(z-2\pi ik)^n = (z-2\pi ik)(1+\mathcal{O}(z-2\pi ik)).$$

Així, sabem que

$$f(z) = \frac{1}{1-e^z} = -\frac{1}{(z-2\pi ik)(1+\mathcal{O}(z-2\pi ik))} = -\frac{1}{z-2\pi ik}(1+\mathcal{O}(z-2\pi ik))$$

i per tant f té un pol simple a $z = 2\pi ik$. Llavors

$$\operatorname{Res}(f, 2\pi ik) = \lim_{z\to 2\pi ik}(z-2\pi ik)f(z) = -1.$$

14. Trobeu les singularitats aïllades i els residus en els seus pols de les funcions següents:

(i) $\dfrac{\sqrt{z}}{z^3-4z^2+4z}$. (Utilitzeu la determinació principal de l'arrel.)

(ii) $\dfrac{e^{2z}}{z^2-z+1}$.

(iii) $\dfrac{\cos(1/z)}{\sin z}$.

(iv) $\dfrac{1}{(\log(z/e)-1)^2}$. (Utilitzeu la determinació principal del logaritme.)

Resolució: Denotarem per $f(z)$ les funcions en els diferents apartats.

(i) La funció $f(z)$ està definida en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$. És clar que tenim que

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z-2)^2}.$$

Les singularitats són $z = 0, 2$, però $z = 0$ no és una singularitat aïllada. Per tant la única singularitat aïllada és $z = 2$. Com $\sqrt{z}$ és holomorfa en un entorn de $z = 2$, tindrem un pol d'ordre 2 a $z = 2$. Així

$$\operatorname{Res}(f, 2) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \left((z-2)^2 f(z) \right) = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2 \cdot 2^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

(ii) Les singularitats de f es donen en les arrels del polinomi $z^2 - z + 1$ que són

$$z_\pm = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

La funció e^{2z} és entera, per tant $z_\pm$ són pols d'ordre 1 de f i

$$\operatorname{Res}(f, z_\pm) = \lim_{z \to z_\pm} (z - z_\pm) f(z) \lim_{z \to z_\pm} (z - z_\pm) \frac{e^{2z}}{(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{e^{2z_\pm}}{z_\pm - z_\mp}.$$

Com $z_+ - z_- = i\sqrt{3}$ i $z_- - z_+ = -i\sqrt{3}$, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, z_\pm) = \mp i \frac{e}{\sqrt{3}} e^{\pm i\sqrt{3}}.$$

(iii) Com $\cos(1/z)$ té un singularitat essencial a $z = 0$ i $\sin z = z \sum_{m \geq 0} (-1)^m z^{2m} \frac{1}{(2m+1)!}$,

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{m \geq 0} a_{2m} z^{2m} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}(2n)!}$$

i per tant $f(z)$ té una singularitat essencial, aïllada, a $z = 0$. El residu seria

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}.$$

Les altres singularitats de $f(z)$ són $z = k\pi$, $k \neq 0$ que són els punts on $\sin(z)$ s'anul·la. Com $\cos(1/z)$ és holomorfa a $z = k\pi$, $k \neq 0$ i $\sin z = (-1)^k (z - k\pi)(1 + \mathcal{O}(z - k\pi)^2)$, les singularitats $z = k\pi$ són pols d'ordre 1. Llavors

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, k\pi) &= \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \frac{\cos(1/z)}{\sin z} = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \frac{\cos(1/z)}{(-1)^k (z - k\pi)(1 + \mathcal{O}(z - k\pi))} \\ &= (-1)^k \cos\left(\frac{1}{k\pi}\right). \end{aligned}$$

(iv) Com agafem la determinació principal del logaritme, la funció $f(z)$ està definida a

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Dividir z per un nombre possitiu no afecta al domini.
Abans per això observem que si $a>0$, llavors

$$\log az=\log|az|+i\arg(az)=\log|a|+\log|z|+i\arg(z)=\log z+\log a.$$

Recordeu que no sempre $\log(z_1/z_2)=\log z_1-\log z_2$. Per tant

$$f(z)=\frac{1}{(\log z-2)^2}.$$

És clar que el denominador només s'anul·la a $z=e^2$. Per tant aquest punt és la singularitat de $f(z)$ que, a més, és aïllada. Observeu que, fent l'Hôpital:

$$\lim_{z\to e^2}\frac{z-e^2}{\log\left(\frac{z}{e}\right)-1}=\lim_{z\to e^2}\frac{z-e^2}{\log z-2}=\lim_{z\to e^2}z=e^2,$$

per tant $(\log(z)-2)^{-1}$ té un pol d'ordre 1 a $z=e^2$ que implica que $f(z)$ té un pol d'ordre 2 a $z=e^2$. Per calcular el residu calculem la sèrie de Laurent de $f(z)$ al voltant de $z=e^2$. Fent servir el desenvolupament de Taylor

$$\log(1+\omega)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\omega^n}{n}$$

tenim que:

$$\begin{aligned}\log z&=\log\left(e^2\left(1+\frac{z-e^2}{e^2}\right)\right)=\log e^2+\log\left(1+\frac{z-e^2}{e^2}\right)\\&=2+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{z-e^2}{e^2}\right)^n=2+\frac{z-e^2}{e^2}-\frac{(z-e^2)^2}{2e^4}+\mathcal{O}(z-e^2)^3\\&=2+\frac{z-e^2}{e^2}\left[1-\frac{1}{2e^2}(z-e^2)+\mathcal{O}(z-e^2)^2\right].\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{1}{(\log z-2)^2}&=\frac{e^4}{(z-e^2)^2\left[1-\frac{1}{2}(z-e^2)+\mathcal{O}(z-e^2)^2\right]^2}\\&=\frac{e^4}{(z-e^2)^2\left[1-\frac{z-e^2}{e^2}+\mathcal{O}(z-e^2)^2\right]}\\&=\frac{e^4}{(z-e^2)^2}\left[1+\frac{z-e^2}{e^2}+\mathcal{O}(z-e^2)^2\right]\end{aligned}$$

i llavors obtenim $\operatorname{Res}(f,e^2)=e^2$.

15. Trobeu $\operatorname{Res}(f,z_0)$ per a:

(i) $f(z)=\dfrac{z-1}{z}e^{1/z}$, en $z_0=0$.

(ii) $f(z)=\dfrac{1}{\sin(z(e^z-1))}$, en $z_0=0$.

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{\sinh(2\log z)}$, en $z_0 = i$. (Utilitzeu la determinació principal del logaritme.)

(iv) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+i)^5}$, en $z_0 = -i$.

(v) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4}$, en $z_0 = 0$.

(vi) $f(z) = e^{z+1/z}$.

Resolució:

(i) $f(z) = \frac{z-1}{z} e^{\frac{1}{z}}$. Com la exponencial és entera tenim:

$$f(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! z^n} - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! z^{n+1}} = 1 + \sum_{j\leq -1} \frac{z^j}{(-j)!} - \sum_{j\leq -1} \frac{z^j}{(-j-1)!}$$

$$1 + \sum_{j\leq -1} \left(\frac{1}{(-j)!} - \frac{1}{(-j-1)!} \right) z^j.$$

El coeficient de grau z^{-1} és 0, per tant $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$.

(ii) $f(z) = \frac{1}{\sin(z(e^z-1))}$. Observem que el denominador s'anul·la a $z = 0$.

$$\begin{aligned}
e^z - 1 &= \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n!} = z + \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3) \\
z(e^z - 1) &= z \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n!} = z^2 + \frac{z^3}{2} + \mathcal{O}(z^4) \\
\sin w &= \sum_{n\geq 0} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} = w + \mathcal{O}(w^3) \\
\sin z(e^z - 1) &= z(e^z - 1) + \mathcal{O}((z(e^z-1))^3) \\
&= z^2 + \frac{z^3}{2} + \mathcal{O}(z^4) + \mathcal{O}(z^6) = z^2 \left(1 + \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2)\right) \\
\frac{1}{\sin z(e^z - 1)} &= \frac{1}{z^2(1 + \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2))} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2)} \\
&= \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2)\right)
\end{aligned}$$

Per tant $\mathrm{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}$.

(iii) $f(z) = \frac{1}{\sinh(2\log(z))}$. Com $\log i = i\frac{\pi}{2}$, i $\sinh(i\pi) = \frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2} = 0$, $f(z)$ té un pol a $z = i$ i és d'ordre 1 ja que $i\pi$ és un zero d'ordre 1 de $\sinh z$.

En aquest cas, podriem desenvolupar en sèrie però és més senzill usar la fórmula que dóna el residu:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, i) &= \lim_{z\to i} (z - i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z - i}{\sinh(2\log(z))} = \lim_{z\to i} \frac{1}{\frac{2}{z} \cosh(2\log(z))} \\
&= \frac{i}{2\cosh(i\pi)} = -\frac{i}{2}
\end{aligned}$$

(iv) $f(z) = \frac{\sin z}{(z+i)^5}$, que té un pol a $z = -i$ d'ordre 5 ja que $\sin(-i) = \frac{e-e^{-1}}{2i} = -i\sinh 1 \neq 0$. Desenvolupant per Taylor:

$$\sin z = \sin(-i) + \cos(-i)(z+i) - \frac{\sin(-i)}{2!}(z+i)^2 - \frac{\cos(-i)}{3!}(z+i)^3 + \frac{\sin(-i)}{4!}(z+i)^4 + \mathcal{O}((z+i)^5).$$

Per tant $\text{Res}(f,-i) = \frac{\sin(-i)}{4!} = -i\frac{\sinh 1}{4!}$

(v) $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$, té un pol a $z = 0$ d'ordre 4 i:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{z^{n-4}}{n!}.$$

Agafant $n = 3$ a la sèrie, tenim que el residu $\text{Res}(f,0) = \frac{1}{3!}$.

(vi) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$, té una singularitat essencial a $z = 0$ i

$$f(z) = e^z e^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!z^j}\right) = \sum_{n\geq 0, j\geq 0}\frac{1}{n!}\frac{1}{j!}z^{n-j}.$$

Si fem $n - j = -1$, tenim que, si $j = 0$ això no té solució per cap $n \geq 0$ i si $j \geq 1$, $n = j - 1 \geq 0$. Per tant el coeficient de grau -1 ve donat per:

$$\text{Res}(f,0) = \sum_{j\geq 1}\frac{1}{(j-1)!}\frac{1}{j!} = \sum_{j\geq 1}\frac{j}{(j!)^2}.$$

17. Calculeu, prenent els cercles amb orientació positiva:

(i) $\displaystyle\int z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz$ sobre $|z+1+i| = 4$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{\sin z - \sinh z}{z^8}dz$ sobre $|z| = 1$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{dz}{\log z - 1}dz$ sobre $|z - e| = 1$. (Utilitzeu la determinació principal del logaritme.)

Resolució: En aquest problema sempre utilitzarem el teorema dels residus per calcular les integrals.

(i) $\int z^3\cos\frac{1}{z}dz$ al cercle $|z+1+i| = 4$ (centrat al punt $z = -1-i$ i de radi 4). Aquest cercle conté el punt $z = 0$ que és la única singularitat de la funció $f(z) = z^3\cos\frac{1}{z}$. Així doncs

$$\int z^3\cos\frac{1}{z}dz = 2\pi i\text{Res}(f,0).$$

Per altra banda:

$$z^3\cos\frac{1}{z} = z^3\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}} = z^3\left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!z^4} + \mathcal{O}(z^6)\right)$$

Per tant $\text{Res}(f,0) = \frac{1}{4!}$ i llavors

$$\int z^3\cos\frac{1}{z}dz = 2\pi i\frac{1}{4!} = \frac{\pi i}{12}.$$

(ii) $\int \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz$ al cercle $|z| = 1$ (centrat al punt $z = 0$ i de radi 1). Aquest cercle conté el punt $z = 0$ que és la única singularitat de la funció $f(z) = \frac{\sin z - \sinh z}{z^8}$. Així doncs

$$\int \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 0).$$

Per altra banda:

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \mathcal{O}(z^9) \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \mathcal{O}(z^9) \\ \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} &= \frac{1}{z^8}\left(-2\frac{z^3}{3!} - 2\frac{z^7}{7!} + \mathcal{O}(z^9)\right). \end{aligned}$$

Per tant $\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{-2}{7!}$ i llavors

$$\int \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz = 2\pi i \frac{-2}{7!} = \frac{-4\pi i}{7!}.$$

(iii) $\int \frac{1}{\log z - 1} dz$ al cercle $|z - e| = 1$ (centrat al punt $z = e$ i de radi 1). Observem que aquest cercle no conté el punt $z = 0$ que és una singularitat no aillada del $\log z$, per tant la funció $\log z$ és holomorfa a l'interior del disc. Ara bé, el cercle $|z - e| = 1$, si que conté en el seu interior el punt $z = e$ i en aquest punt la funció $f(z) = \frac{1}{\log z - 1}$ té un pol ja que $\log e - 1 = 0$. Així doncs

$$\int \frac{1}{\log z - 1} dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, e).$$

Per altra banda:

$$\mathrm{Res}(f, e) = \lim_{z \to e} \frac{z - e}{\log z - 1} = \lim_{z \to e} \frac{1}{\frac{1}{z}} = e$$

i per tant

$$\int \frac{1}{\log z - 1} dz = 2\pi i e.$$

20. Calculeu les integrals racionals següents integrant sobre el camí tancat γ_R definit pel segment $[-R, R]$ i el semi-cercle de centre l'origen i radi R en el semi-pla superior.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx$. (Solució: $\pi/\sqrt{2}$.)

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^6} dx$. (Solució: $\pi/3$.)

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$. (Solució: $5\pi/12$.)

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$. (Solució: $\pi(2n - 1)!!/(2n)!!$.)

(v) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{ax^6 + b}$ $(a, b > 0)$. (Solució: $\frac{\pi}{3a}(a/b)^{5/6}$.)

Resolució: En aquest problema sempre utilitzarem el teorema dels residus per calcular les integrals en el recinte $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ que ens indiquen i aleshores:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)\ dt + \int_0^\pi f(Re^{i\theta})Re^{i\theta} i\ d\theta$$

Aleshores farem $R \to \infty$ i provarem que

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta})Re^{i\theta} i\ d\theta \right| = 0$$

i per tant tindrem que:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt.$$

(i) Volem calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$. Aquesta funció té singularitats a les arrels quartes de -1:

$$x^4 = -1, \implies x_k = e^{i(\pi+2k\pi)/4},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

És a dir, les singularitats de $1/(1+x^4)$ són:

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Si prenem R prou gran (de fet $R > 1$ és suficient)només x_0 i x_1 són a l'interior de γ. Llavors:

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^4}\ dz = 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f, x_0) + \mathrm{Res}\,(f, x_1)).$$

Ara bé:

$$\mathrm{Res}\,(f, x_i) = \lim_{z\to x_i} \frac{z - x_i}{1+z^4} = \lim_{z\to x_i} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4x_i^3} = \frac{x_i}{4x_i^4} = -\frac{x_i}{4}$$

per tant

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^4}\ dz = 2\pi i \left(-\frac{x_0 + x_1}{4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ara veiem que la integral a γ_2 tendeix a zero quan $R \to \infty$. En efecte:

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^4} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{1}{1+R^4 e^{4i\theta}} Re^{i\theta} i\ d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{1}{|1+R^4 e^{4i\theta}|} |Re^{i\theta} i|\ d\theta$$
$$\leq \pi R \frac{1}{R^4 - 1} \to 0 \qquad \text{quan} \quad R \to \infty.$$

On a la darrera desigualtat hem usat que $|1 + R^4 e^{4i\theta}| \geq R^4 - 1$. Concluïm doncs que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma \frac{1}{1+z^4}\ dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(ii) Aquest apartat és similar a l'anterior. Volem calcular $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^6} dx$, usant que la funció és parell tenim que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx.$$

Aquesta funció té com a singularitats les arrels sisenes de -1:

$$x^6 = -1 \implies x_k = e^{i(\pi+2k\pi)/6}, \; k = 0,1,2,3,4,5.$$

És a dir:

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \qquad x_1 = i, \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$
$$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, \qquad x_4 = -i, \qquad x_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Si prenem R prou gran ($R > 1$), només x_0, x_1 i x_2 són a l'interior de γ, per tant:

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^6}\, dz = 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f, x_0) + \mathrm{Res}\,(f, x_1) + \mathrm{Res}\,(f, x_2)).$$

Ara bé:

$$\mathrm{Res}\,(f, x_i) = \lim_{z\to x_i} \frac{z - x_i}{1+z^6} = \lim_{z\to x_i} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6x_i^5} = \frac{x_i}{6x_i^6} = -\frac{x_i}{6}$$

i per tant

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^6}\, dz = 2\pi i\left(-\frac{x_0+x_1+x_2}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Ara veiem que la integral a γ_2 tendeix a zero quan $R \to \infty$. En efecte:

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^6} dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{1}{1+R^6e^{6i\theta}} Re^{i\theta} i\, d\theta\right| \le \int_0^\pi \frac{1}{|1+R^6e^{6i\theta}|} |Re^{i\theta} i|\, d\theta$$
$$\le \pi R \frac{1}{R^6-1} \to 0 \qquad \text{quan } R \to \infty.$$

On hem usat que $|1 + R^6e^{6i\theta}| \ge R^6 - 1$ a la darrera desigualtat. Concluïm doncs que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{2\pi}{3}$$

i per tant

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{3}.$$

(iii) Volem calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$. Aquesta funció té com a singularitats les arrels del denominador que són:

$$x_1 = 3i, \qquad x_2 = -3i, \qquad x_3 = i, \qquad x_4 = -i.$$

Si prenem R prou gran, només x_1, x_3 són a l'interior de γ, per tant:

$$\int_\gamma \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}\, dz = 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f, x_1) + \mathrm{Res}\,(f, x_3)).$$

Ara bé:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, x_i) &= \lim_{z\to x_i} \frac{(z-x_i)(z^2-z+2)}{z^4+10z^2+9} = \lim_{z\to x_i} \frac{(z-x_i)(2z-1)+(z^2-z+2)}{4z^3+20z}\\ &= \frac{x_i^2-x_i+2}{4x_i^3+20x_i}.\end{aligned}$$

Usant aquest càlcul tenim que:

$$\operatorname{Res}(f, x_1) = \frac{3}{48} - \frac{7}{48}i, \qquad \operatorname{Res}(f, x_3) = -\frac{3}{48} - \frac{3}{48}i$$

i per tant

$$\int_\gamma \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}\ dz = 2\pi i\left(-\frac{10}{48}i\right) = \frac{5\pi}{12}.$$

Ara veiem que la integral sobre γ_2 tendeix a zero quan $R\to\infty$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}\ dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{R^2e^{2i\theta}-Re^{i\theta}+2}{R^4e^{4i\theta}+10R^2e^{2i\theta}+9}Re^{i\theta}i\ d\theta\right|\\ &\leq \pi R\frac{R^2+R+2}{R^4-(10R^2+9)} \to 0 \qquad \text{quan} \quad R\to\infty,\end{aligned}$$

on hem usat que $|R^4e^{4i\theta}+10R^2e^{2i\theta}+9| \geq R^4-|10R^2e^{2i\theta}+9| \geq R^4-(10R^2+9)$. Concluïm doncs que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx = \frac{5\pi}{12}.$$

(iv) Volem calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx$. Aquesta funció té singularitats als punts $x_1 = i,\ x_2 = -i$. Si prenem R prou gran, només $x_1 = i$ és a l'interior de γ. Per tant:

$$\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}\ dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Ara bé, com i és un pol d'ordre $n+1$ calculem el residu usant la fórmula:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, i) &= \frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\frac{(z-i)^{n+1}}{(1+z^2)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{n!}(-1)^n(n+1)(n+2)\dots(2n)\frac{1}{(2i)^{2n+1}} = -i\frac{1}{n!}(n+1)(n+2)\dots(2n)\frac{1}{2^{2n+1}}.\end{aligned}$$

Llavors

$$\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}\ dz = \pi\frac{1}{n!}(n+1)(n+2)\dots(2n)\frac{1}{2^{2n}} = \pi\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Ara veiem que la integral a γ_2 tendeix a zero quan $R\to\infty$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{1}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}}Re^{i\theta}i\ d\theta\right|\\ &\leq \pi R\frac{1}{(R^2-1)^{n+1}} \to 0 \qquad \text{quan} \quad R\to\infty,\end{aligned}$$

on hem usat que $|(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}| \geq (R^2-1)^{n+1}$. Concluïm doncs que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

v) Aquest apartat és similar al i) i ii). Volem calcular $\int_0^\infty \frac{1}{ax^6+b}dx$. Usant que la funció és parell tenim que

$$\int_0^\infty \frac{1}{ax^6+b}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ax^6+b}dx.$$

Aquesta funció té com a singularitats les arrels sisenes de $-\frac{b}{a}$:

$$x^6 = -\frac{b}{a}, \implies x_k = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6} e^{i(\pi+2k\pi)/6}, \; k = 0,1,2,3,4,5.$$

És a dir:

$$x_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right), \qquad x_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6} i, \qquad x_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right),$$
$$x_3 = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right), \qquad x_4 = -\left(\frac{b}{a}\right)^{1/6} i, \qquad x_5 = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right),$$

Si prenem R prou gran, només x_0, x_1 i x_2 són a l'interior de γ i llavors:

$$\int_\gamma \frac{1}{az^6+b}\, dz = 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f,x_0)+\mathrm{Res}\,(f,x_1)+\mathrm{Res}\,(f,x_2)).$$

Ara bé:

$$\mathrm{Res}\,(f,x_i) = \lim_{z\to x_i}\frac{z-x_i}{az^6+b} = \lim_{z\to x_i}\frac{1}{6az^5} = \frac{1}{6ax_i^5} = \frac{x_i}{6ax_i^6} = -\frac{x_i}{6b}.$$

Per tant

$$\int_\gamma \frac{1}{az^6+b}\, dz = 2\pi i\left(-\frac{x_0+x_1+x_2}{6b}\right) = \frac{2\pi}{3b}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/6} = \frac{2\pi}{3a}\left(\frac{a}{b}\right)^{5/6}.$$

Ara veiem que la integral a γ_2 tendeix a zero quan $R\to\infty$:

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{1}{az^6+b}dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{1}{aR^6e^{6i\theta}+b}Re^{i\theta}i\; d\theta\right|$$
$$\leq \pi R\frac{1}{aR^6-b} \to 0 \qquad \text{quan} \quad R\to\infty,$$

on hem usat la desigualtat $|aR^6e^{6i\theta}+b| \geq aR^6-b$, ja que $a,b>0$. Concluïm doncs que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ax^6+b}dx = \frac{2\pi}{3a}\left(\frac{a}{b}\right)^{5/6}$$

i per tant

$$\int_0^\infty \frac{1}{ax^6+b}dx = \frac{\pi}{3a}\left(\frac{a}{b}\right)^{5/6}.$$

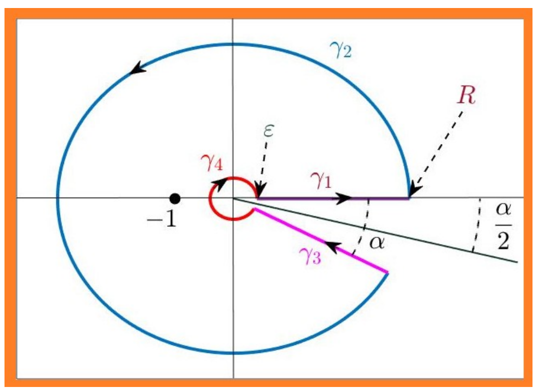
21. Proveu que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ si $a \in (0,1)$. Useu-ho per calcular les següents integrals sense fer servir variable complexa. [Indicació: Integreu sobre el camí tancat $\gamma_{\varepsilon,\alpha,R}$ ($R \gg 1$ i $0 < \varepsilon, \alpha \ll 1$) definit per la unió de dos segments, de ε a R i de $\varepsilon e^{-i\alpha}$ a $Re^{-i\alpha}$, amb dos arcs de circumferència, de radis R i ε, donats per $Re^{i\theta}$ i $\varepsilon e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi - \alpha]$.]

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$. (Solució: $\pi/\sqrt{2}$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^q}{\alpha + \beta x^p}dx$, per $\alpha, \beta > 0$ i $p > q+1 > 0$. (Solució: $(\frac{\alpha}{\beta})^a \frac{\pi}{\alpha p \sin(\pi a)}$, on $a = (q+1)/p$.)

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}}$, per $0 < \alpha < 2$. (Indicació: Integreu per parts. Solució: $\pi/\sin(a\pi/2)$.)

Resolució: Per calcular la integral $\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt$, farem la integral al camí $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ que ens indiquen.



Per tal de definir el domini Ω on la funció $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ és holomorfa, hem de treure de $\mathbb{C}$ una semirecta, per tal que el camí indicat estigui contingut a Ω. Més concretament, treiem qualsevol semirecta $z = re^{i\beta}$, $r \geq 0$ amb $-\alpha < \beta < 0$, per exemple $z = re^{-i\frac{\alpha}{2}}$ i definim $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{re^{-i\frac{\alpha}{2}}\}_{r\geq 0}$. Aleshores, per $z \in \Omega$: $-\frac{\alpha}{2} < \arg z < 2\pi - \frac{\alpha}{2}$. Amb aquesta definició

$$(-1)^{a-1} = e^{(a-1)\log(-1)} = e^{(a-1)i\pi} = -e^{ia\pi}.$$

Llavors la funció $f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$ té un pol simple a $z = -1$ de residu $\operatorname{Res}(f, -1) = -e^{ia\pi}$. Fem ara la integral al recinte indicat i tenim:

$$-2\pi i e^{ia\pi} = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z) + dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz.$$

- A γ_1 usarem la parametrització $\gamma_1(t) = t$, $t \in [\varepsilon, R]$:

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = \int_\varepsilon^R \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt.$$

- A γ_2 usarem la parametrització $\gamma_2(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi - \alpha]$:

$$\int_{\gamma_2} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = \int_0^{2\pi-\alpha} \frac{(Re^{i\theta})^{a-1}}{1+Re^{i\theta}} Re^{i\theta} i\, d\theta = \int_0^{2\pi-\alpha} \frac{R^a e^{ia\theta}}{1+Re^{i\theta}} i\, d\theta.$$

- A γ_3 usarem la parametrització $\gamma_3(t) = te^{i(2\pi-\alpha)}$, $t \in \overline{R, \varepsilon}$:

$$\int_{\gamma_3} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = -\int_\varepsilon^R \frac{(te^{i(2\pi-\alpha)})^{a-1}}{1+te^{i(2\pi-\alpha)}} e^{i(2\pi-\alpha)}\, dt = -\int_\varepsilon^R \frac{t^{a-1}}{1+te^{i(2\pi-\alpha)}} e^{ia(2\pi-\alpha)}\, dt$$
$$= -e^{ia(2\pi-\alpha)} \int_\varepsilon^R \frac{t^{a-1}}{1+te^{-\alpha i}}\, dt.$$

- A γ_4 usarem la parametrització $\gamma_4(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in \overline{2\pi - \alpha, 0}$:

$$\int_{\gamma_4} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = -\int_0^{2\pi-\alpha} \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{a-1}}{1+\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon e^{i\theta} i\, d\theta = -\int_0^{2\pi-\alpha} \frac{\varepsilon^a e^{ia\theta}}{1+\varepsilon e^{i\theta}} i\, d\theta.$$

Aleshores farem $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$ i observem que:

- Per la integral a γ_1:
$$\int_{\gamma_1} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz \to \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt.$$

- Per la integral a γ_2 (independent de ε), com $0 < a < 1$, tenim

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz \right| \leq (2\pi - \alpha) \frac{R^a}{R-1} = \frac{2\pi - \alpha}{R^{1-a} - R^{-a}} \to 0 \qquad \text{quan } R \to \infty.$$

- Per la integral a γ_3:

$$\int_{\gamma_3} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz \to -e^{ia(2\pi-\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+te^{-\alpha i}}\, dt.$$

- Per la integral a γ_4, com $0 < a < 1$, tenim

$$\left| \int_{\gamma_4} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz \right| \leq (2\pi - \alpha) \frac{\varepsilon^a}{1-\varepsilon} \to 0, \qquad \text{quan } \ \varepsilon \to 0.$$

Utilitzant aquestes propietats, tindrem que, per a qualsevol $a \in (0,1)$ i α prou petit:

$$-2\pi i e^{ia\pi} = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt - e^{ia(2\pi-\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+te^{-\alpha i}}\, dt.$$

Com dos dels tres termes d'aquesta igualtat són independents de α, l'altre també i podem substituir prendre $\alpha \to 0$. Tindrem:

$$-2\pi i e^{ia\pi} = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt - e^{ia2\pi} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt = (1 - e^{ia2\pi}) \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt.$$

Per tant:
$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt = \frac{-2\pi i e^{ia\pi}}{1 - e^{ia2\pi}} = \frac{-2\pi i}{e^{-ia\pi} - e^{ia2\pi}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

(i) Usem la paritat i fem el canvi $x = t^{\frac{1}{4}}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t} dt.$$

Tenim $a = \frac{3}{4}$, per tant:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(ii) Fem el canvi $x = (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p}}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^q}{\alpha+\beta x^p} dx = \frac{1}{\alpha p}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{q+1}{p}} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{q+1}{p}-1}}{1+t} dt.$$

Llavos, per $a = \frac{q+1}{p}$, apliquem el resultat obtingut:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^q}{\alpha+\beta x^p} dx = \frac{1}{\alpha p}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{q+1}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{(q+1)\pi}{p}}.$$

(iii) Fent integració per parts tenim:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}}\ dx = \left[-\frac{\log(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha}}\right]_0^{\infty} + \frac{2}{\alpha}\int_0^{\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2} dx.$$

Observem que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\mathcal{O}(x^4)}{x^{\alpha}} = 0, \qquad \text{perquè}\ \ \alpha < 2$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to \infty} \frac{2}{x^{\alpha-2}+x^{\alpha}} = 0, \qquad \text{perquè}\ \ 0 < \alpha.$$

Usant l'apartat anterior (on $\alpha = \beta = 1$, $p = 2$ i $q = 1-\alpha$) obtenim

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}}\ dx = \frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi(2-\alpha)}{2}} = \frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}.$$

22. Calculeu les integrals següents a partir d'integrals de funcions T-periòdiques en un interval de longitud T, tot fent el canvi $z = e^{2\pi i u/T}$.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2}$ $(a > 1)$. (Solució: $2\pi a/(a^2-1)^{3/2}$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$ $(a > 0)$. (Solució: $\pi/(2\sqrt{a^2+a}$.)

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3x)dx}{5-4\cos(2x)}$. (Observeu que la funció integrada és π-períodica. Solució: $3\pi/8$.)

Resolució:

(i)
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2}$$
Fent el canvi $z = e^{ix}$ veiem que
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos x)^2}\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{ix}\left(a+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2} e^{ix} i\,dx = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(a+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(2az+z^2+1)^2}.$$
La funció $f(z) = \frac{z}{(2az+z^2+1)^2}$ té singularitats aïllades als zeros del denominador, $z_\pm = -a \pm \sqrt{a^2-1}$, que, de fet, són pols de ordre 2.
Observem que $z_+ \cdot z_- = 1$ i que com $a > 1$ totes dues són reals i negatives. De fet tenim que $z_- = -a-\sqrt{a^2-1} < -1$. Per tant $-1 < z_+ < 0$ pertany al cercle unitat i llavors:
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos x)^2}\,dx = \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(2az+z^2+1)^2} = \frac{4}{i}2\pi i \mathrm{Res}(f, z_+)$$
$$= 8\pi \lim_{z\to z_+} \frac{d}{dz}\big((z-z_+)^2 f(z)\big) = 8\pi \lim_{z\to z_+} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-z_-)^2}\right)$$
$$= \frac{8\pi a}{4(a^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

(ii) Observem que:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}}$$
$$= -2\int_0^{\pi} \frac{dx}{-4a+e^{2ix}+e^{-2ix}-2}.$$
Fent el canvi $z = e^{2ix}$ veiem que (observeu que $dz = e^{2ix}2i$)
$$-2\int_0^{\pi} \frac{dx}{-4a+e^{2ix}+e^{-2ix}-2} = -\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(-4a+z+\frac{1}{z}-2)}$$
$$= -\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{-(4a+2)z+z^2+1}.$$
La funció $f(z) = \frac{1}{-(4a+2)z+z^2+1}$ té singularitats aïllades als zeros del denominador, $z_\pm = 2a+1 \pm \sqrt{(2a+1)^2-1}$, que, de fet, són pols de ordre 1.
Observem que $z_+ \cdot z_- = 1$ i que com $a > 0$ totes dues són reals i positives. De fet tenim que $z_+ = 2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1} > 1$, per tant $0 < z_- < 1$ és dins el cercle unitat. Llavors:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{-(4a+2)z+z^2+1} = -\frac{1}{i}2\pi i \mathrm{Res}(f, z_-)$$
$$= -2\pi \lim_{z\to z_-}(z-z_-)f(z) = -2\pi \frac{1}{z_- - z_+}$$
$$= \frac{2\pi}{2\sqrt{(2a+1)^2-1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}.$$

(iii) Observem que:

$$f(x+\pi) = \frac{\cos^2(3x+3\pi)}{5-4\cos(2x+2\pi)} = \frac{(-\cos 3x)^2}{5-4\cos 2x} = \frac{\cos^2 3x}{5-4\cos 2x} = f(x).$$

És a dir f és $\pi-$periòdica i per tant:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-4\cos 2x}\, dx = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-4\cos 2x}\, dx.$$

Fent el canvi $z = e^{2ix}$ veiem que (observeu que $dz = e^{2ix}2i$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-4\cos 2x}\, dx = 2\int_0^{\pi} \frac{\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}+2}{4}}{5-2e^{2ix}-2e^{-2ix}}\, dx = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{\frac{z^3+z^{-3}+2}{4}}{z(5-2z-2z^{-1})}\, dz$$
$$= \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z^6+2z^3+1}{z^3(-2z^2+5z-2)}\, dz.$$

La funció $f(z) = \frac{z^6+2z^3+1}{z^3(-2z^2+5z-2)}$ té singularitats aillades als zeros del denominador, $z=0$, $z=2$, $z=\frac{1}{2}$, que, de fet, són pols. En concret $z=0$ és un pol d'ordre 3 i els altres dos són d'ordre 1. Només $z=0$ i $z=\frac{1}{2}$ contribuiran a la integral perquè $z=2$ no és a l'interior del cercle unitat.
Per calcular el residu a $z=0$, fem la sèrie de Laurent:

$$\frac{1}{-2z^2+5z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{5}{2}z+z^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{5}{2}z-z^2)}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{5}{2}z-z^2\right)+\left(\frac{5}{2}z-z^2\right)^2+\mathcal{O}(z^3)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2}z+\frac{21}{4}z^2+\mathcal{O}(z^3)\right).$$

Per tant:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2}z+\frac{21}{4}z^2+\mathcal{O}(z^3)\right)\left(1+2z^3+z^6\right)\frac{1}{z^3}$$

i podem calcular el residu com el coeficient de z^{-1} que és $\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{21}{8}$.
Per altra banda, com $\frac{1}{2}$ és un pol simple:

$$\operatorname{Res}\left(f,\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)f(z) = \frac{1+2(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^6}{(\frac{1}{2})^3(-2)(\frac{1}{2}-2)} = \frac{27}{8}.$$

Ara ja podem calcular la integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-4\cos 2x}\, dx = \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z^6+2z^3+1}{z^3(-2z^2+5z-2}\, dz$$
$$= \frac{1}{4i}2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}\left(f,\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{21}{8}+\frac{27}{8}\right)$$
$$= \frac{3\pi}{8}.$$

23. Calculeu les integrals següents integrant sobre el camí tancat $\gamma_{\varepsilon,R}$ ($0 < \varepsilon \ll 1$ i $R \gg 1$) definit per la unió dels dos segments $[\varepsilon, R]$ i $[-R, -\varepsilon]$ amb les mitjes circumferències de centre l'origen i radis ε i R contingudes en el semi-plà superior.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx$ $(a > 0)$. (Solució $(\pi/2a)\log(a)$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2+1}dx$. (Solució $\pi^3/8$.)

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}dx$. (Solució $-\pi/4$.)

Resolució:

(i) Integrem, tal com ens indiquen:

$$\int_\gamma \frac{\log z}{z^2+a^2}\ dz.$$

Per tal que la funció $f(z) = \frac{\log z}{z^2+a^2}$ sigui holomorfa (excepte singularitats aïllades) en l'interior del camí triat, prenem la determinació del logaritme treient, per exemple, la semirecta $r = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z < 0,\ \operatorname{Re} z = 0\}$, és a dir prenem els arguments de z satisfent $-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{3\pi}{2}$. Així al domini $\Omega = \mathbb{C} \setminus r$ i f té una singularitat aïllada a Ω als punt $z = ai$, que és un pol simple i pertany a l'interior de γ si ε és prou petit i R és prou gran. Per tant, per una banda:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\log z}{z^2+a^2}\ dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, ai) = 2\pi i \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{\log z}{z^2+a^2} = 2\pi i \lim_{z\to ai}\frac{\log z}{z+ai}\\ &= 2\pi i\frac{\log ai}{2ai} = \pi\frac{\log a + i\frac{\pi}{2}}{a} = \frac{\pi}{a}\log a + i\frac{\pi^2}{2a}\end{aligned}$$

Per altra banda, com $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, descomposem la integral sobre γ de la forma:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz.$$

Tindrem que:

- A γ_1 parametritzem per $z = t$ i llavors:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log t}{t^2+a^2}\ dt.$$

- A γ_2 parametritzant per $z = Re^{i\theta}$:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{\log(Re^{i\theta})}{R^2e^{2i\theta}+a^2}Re^{i\theta}i\ d\theta = \int_0^\pi \frac{\log R + i\theta}{R^2e^{2i\theta}+a^2}Re^{i\theta}i\ d\theta.$$

- A γ_3 parametritzant per $z = te^{i\pi}$:

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_\varepsilon^R \frac{\log(te^{i\pi})}{t^2e^{2i\pi}+a^2}e^{i\pi}\ dt = \int_\varepsilon^R \frac{\log t + i\pi}{t^2+a^2}\ dt.$$

- A γ_4 parametritzant per $z = \varepsilon e^{i\theta}$:

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = -\int_0^\pi \frac{\log(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon^2 e^{2i\theta}+a^2}\varepsilon e^{i\theta} i\; d\theta = -\int_0^\pi \frac{\log\varepsilon + i\theta}{\varepsilon^2 e^{2i\theta}+a^2}\varepsilon e^{i\theta} i\; d\theta.$$

El següent pas és prendre els límits $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$. Observem que:

- A γ_1, prenent $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz \to \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}\; dt.$$

- A γ_2, usant que, si R és prou gran: $\pi \leq \log R$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{\sqrt{(\log R)^2+\theta^2}}{R^2-a^2}R\; d\theta \leq \int_0^\pi \frac{\sqrt{(\log R)^2+\pi^2}}{R^2-a^2}R\; d\theta$$
$$\leq \sqrt{2}\pi\frac{\log R}{R^2-a^2}R\; d\theta \to 0, \qquad R\to\infty.$$

- A γ_3, prenent $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$:

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz \to \int_0^\infty \frac{\log t + i\pi}{t^2+a^2}\; dt = \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}\; dt + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{t^2+a^2}\; dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}\; dt + i\frac{\pi^2}{2a},$$

  on hem usat que $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}[\arctan\frac{t}{a}]_0^\infty = \frac{\pi}{2a}$.
- A γ_4, usat que, si ε és prou petit, $\pi \leq |\log\varepsilon|$:

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{\sqrt{(\log\varepsilon)^2+\theta^2}}{a^2-\varepsilon^2}\varepsilon\; d\theta \leq \pi\frac{\sqrt{(\log\varepsilon)^2+\pi^2}}{a^2-\varepsilon^2}\varepsilon$$
$$\leq \sqrt{2}\pi\frac{\log\varepsilon}{a^2-\varepsilon^2}\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon\to 0.$$

Tenim doncs:

$$\frac{\pi}{a}\log a + i\frac{\pi^2}{2a} = \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}\; dt + \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}\; dt + i\frac{\pi^2}{2a}$$

i concluïm que:

$$\int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}\; dt = \frac{\pi}{2a}\log a.$$

(ii) Integrem, tal com ens indiquen:

$$\int_\gamma \frac{\log^2 z}{z^2+1}\; dz.$$

Per tal que la funció $f(z) = \frac{\log^2 z}{z^2+1}$ sigui holomorfa (excepte un nombre finit de singularitats aïllades) en l'interior del camí triat, prenem la determinació del logaritme treient, per exemple, la semirecta $r = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z < 0,\ \operatorname{Re} z = 0\}$, és a dir els arguments satisfant:

$-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{3\pi}{2}$. Així al domini $\Omega = \mathbb{C} \setminus r$ i f té una singularitat aillada a Ω al punt $z = i$, que és un pol simple i pertany a l'interior de γ si ε és prou petit i R és prou gran. Per tant, per una banda:

$$\int_\gamma \frac{\log^2 z}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\log^2 z}{z^2+1} = 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{\log^2 z}{z+i}$$
$$= 2\pi i \frac{\log^2 i}{2i} = \pi\left(\log 1 + i\frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{\pi^3}{4}.$$

Per altra banda, com $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, descomposem la integral sobre el camí γ com:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz.$$

Llavors

- A γ_1 parametritzant per $z = t$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log^2 t}{t^2+1}\, dt.$$

- A γ_2 parametritzant per $z = Re^{i\theta}$:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{\log^2(Re^{i\theta})}{R^2e^{2i\theta}+1} Re^{i\theta} i\, d\theta = \int_0^\pi \frac{(\log R + i\theta)^2}{R^2e^{2i\theta}+1} Re^{i\theta} i\, d\theta.$$

- A γ_3 parametritzant per $z = te^{i\pi}$:

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_\varepsilon^R \frac{\log^2(te^{i\pi})}{t^2e^{2i\pi}+1} e^{i\pi}\, dt = \int_\varepsilon^R \frac{(\log t + i\pi)^2}{t^2+1}\, dt$$
$$= \int_\varepsilon^R \frac{\log^2 t}{t^2+1}\, dt - \pi^2 \int_\varepsilon^R \frac{1}{t^2+1}\, dt + 2i\pi \int_\varepsilon^R \frac{\log t}{t^2+1}\, dt.$$

- A γ_4 parametritzant per $z = \varepsilon e^{i\theta}$:

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = -\int_0^\pi \frac{\log^2(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon^2 e^{2i\theta}+1}\varepsilon e^{i\theta} i\, d\theta = -\int_0^\pi \frac{(\log\varepsilon + i\theta)^2}{\varepsilon^2e^{2i\theta}+1}\varepsilon e^{i\theta} i\, d\theta.$$

El següent pas és prendre els límits $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$. Observem que:

- A γ_1, quan $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz \to \int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+1}\, dt.$$

- A γ_2, utilitzant que si R és prou gran, $\pi \le \log R$:

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \frac{(\log R)^2 + \theta^2}{R^2-1} R\, d\theta \le \int_0^\pi \frac{(\log R)^2+\pi^2}{R^2-1} R\, d\theta$$
$$\le 2\pi \frac{\log^2 R}{R^2-1} R\, d\theta \to 0, \qquad R \to \infty.$$

- A γ_3, prenent $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$:

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz \to \int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+1}\ dt - \pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\ dt + 2i\pi \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+1}\ dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+1}\ dt - \frac{\pi^3}{2} + 2\pi i \frac{\pi}{2}\log 1 = \int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+1}\ dt - \frac{\pi^3}{2},$$

on hem usat que $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$ i el resultat de l'apartat i) per calcular la tercera integral amb $a = 1$.

- A γ_4, utilitzant que si ε és prou petit, llavors $\pi \leq |\log \varepsilon|$:

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{(\log \varepsilon)^2 + \theta^2}{1-\varepsilon^2}\varepsilon\ d\theta \leq \pi \frac{(\log\varepsilon)^2 + \pi^2}{1-\varepsilon^2}\varepsilon$$
$$\leq 2\pi \frac{\log^2 \varepsilon}{1-\varepsilon^2}\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Tenim doncs:

$$-\frac{\pi^3}{4} = \int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+1}\ dt + \int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+1}\ dt - \frac{\pi^3}{2}$$

i per tant

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+1}\ dt = \frac{\pi^3}{8}.$$

(iii) Integrem, tal com ens indiquen:

$$\int_\gamma \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\ dz.$$

Per tal que la funció $f(z) = \frac{\log z}{(z^2+1)^2}$ sigui holomorfa (excepte en un nombre finit de singularitats aïllades) en l'interior del camí triat, prenem la determinació del logaritme treient, per exemple, la semirecta $r = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z < 0,\ \operatorname{Re} z = 0\}$, és a dir prenem els arguments $-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{3\pi}{2}$. Així al domini $\Omega = \mathbb{C} \setminus r$ i f té singularitat aïllada a Ω al punt $z = i$, que és un pol doble i pertany a l'interior de γ si ε és prou petit i R és prou gran. Per tant, per una banda:

$$\int_\gamma \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\ dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\right) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{\log z}{(z+i)^2}$$
$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(z+i)\frac{1}{z} - 2\log z}{(z+i)^3} = 2\pi i \frac{2 - 2\log i}{(2i)^3} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i.$$

Ara descomposem la integral sobre γ utilitzant que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz.$$

Tindrem:

- A γ_1 parametritzant $z = t$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\ dt.$$

- A γ_2 parametritzant $z = Re^{i\theta}$:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{\log(Re^{i\theta})}{(R^2e^{2i\theta}+1)^2} Re^{i\theta} i\ d\theta = \int_0^\pi \frac{\log R + i\theta}{(R^2e^{2i\theta}+1)^2} Re^{i\theta} i\ d\theta.$$

- A γ_3 parametritzant $z = te^{i\pi}$:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} f(z)dz &= -\int_\varepsilon^R \frac{\log(te^{i\pi})}{(t^2e^{2i\pi}+1)^2} e^{i\pi}\ dt = \int_\varepsilon^R \frac{(\log t + i\pi)}{(t^2+1)^2}\ dt \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\ dt + i\pi \int_\varepsilon^R \frac{1}{(t^2+1)^2}\ dt.\end{aligned}$$

- A γ_4 parametritzant $z = \varepsilon e^{i\theta}$:

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = -\int_0^\pi \frac{\log(\varepsilon e^{i\theta})}{(\varepsilon^2 e^{2i\theta}+1)^2} \varepsilon e^{i\theta} i\ d\theta = -\int_0^\pi \frac{(\log\varepsilon + i\theta)}{(\varepsilon^2e^{2i\theta}+1)^2} \varepsilon e^{i\theta} i\ d\theta.$$

El següent pas és prendre els límits $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$. Observem que:

- A γ_1, prenent $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz \to \int_0^\infty \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\ dt.$$

- A γ_2, usant que, si R és prou gran, $\pi \le \log R$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| &\le \int_0^\pi \frac{\sqrt{(\log R)^2+\theta^2}}{(R^2-1)^2} R\ d\theta \le \int_0^\pi \frac{\sqrt{(\log R)^2+\pi^2}}{(R^2-1)^2} R\ d\theta \\ &\le \sqrt{2}\pi \frac{\log R}{(R^2-1)^2} R\ d\theta \to 0 \qquad R \to \infty.\end{aligned}$$

- A γ_3, prenent $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} f(z)dz \to \int_0^\infty \frac{\log t + i\pi}{(t^2+1)^2}\ dt &= \int_0^\infty \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\ dt + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{(t^2+1)^2}\ dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\ dt + i\frac{\pi^2}{4},\end{aligned}$$

  on hem usat que $\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}[\arctan t + \frac{t}{1+t^2}]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$.

- A γ_4, usant que si ε és prou petit, $\pi \le |\log\varepsilon|$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| &\le \int_0^\pi \frac{\sqrt{(\log\varepsilon)^2+\theta^2}}{(1-\varepsilon^2)^2} \varepsilon\ d\theta \le \pi \frac{\sqrt{(\log\varepsilon)^2+\pi^2}}{(1-\varepsilon^2)^2} \varepsilon \\ &\le \sqrt{2}\pi \frac{\log\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \varepsilon \to 0 \qquad \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

Tenim doncs:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i = \int_0^\infty \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\ dt + \int_0^\infty \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\ dt + i\frac{\pi^2}{4}$$

i per tant:

$$\int_0^\infty \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\ dt = -\frac{\pi}{4}.$$

24. Calculeu les integrals següents integrant la funció $f(z)$ sobre el camí γ_R definit pel segment $[-R, R]$ i la semi-circumferència de centre l'origen i radi R en el semi-plà superior.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$ $(a>0)$ fent $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+a^2}$. (Solució: $\pi e^{-a}/(2a)$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$ $(a>0)$ fent $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$. (Solució: $\pi e^{-a}/2$.)

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\,dx$ $(a>0)$ fent $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{z(z^2+a^2)}$. (Solució: $\pi(1-e^{-a})/(2a^2)$.)

(iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}\,dx$ combinant els dos apartats anteriors. (Solució: $-\pi/2+\pi e^{-a}$.)

Resolució:

(iii) Integrem, tal com ens indiquen:

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}-1}{z(z^2+a^2)}\,dz.$$

La funció $f(z)=\frac{e^{iz}-1}{z(z^2+a^2)}$ té singularitats aïllades als punts $z=0$ i $z=\pm ai$ i és holomorfa, excepte $z=0,\pm ai$, a l'interior del camí triat. La singularitat $z=0$ és evitable ja que:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}-1}{z(z^2+a^2)}=\lim_{z\to 0}\frac{ie^{iz}}{3z^2+a^2}=\frac{i}{a^2}.$$

Les singularitats $z=\pm ia$ són pols simples i només ai pertany a linterior de γ si R és prou gran. Per tant:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^{iz}-1}{z(z^2+a^2)}\,dz &= 2\pi i\operatorname{Res}(f,ai)=2\pi i\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}-1}{z(z^2+a^2)}=2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}-1}{z(z+ai)}\\ &=2\pi i\frac{e^{-a}-1}{-2a^2}.\end{aligned}$$

Ara descomposem la integral utilitzant que $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$. És a dir:

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Tindrem:

- A γ_1 parametritzant $z=t$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_{-R}^R \frac{e^{it}-1}{t(t^2+a^2)}\,dt=\int_{-R}^R\frac{\cos t-1}{t(t^2+a^2)}\,dt+i\int_{-R}^R\frac{\sin t}{t(t^2+a^2)}\,dt.$$

- A γ_2 parametritzant $z=Re^{i\theta}$:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz=\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}-1}{Re^{i\theta}(R^2e^{2i\theta}+a^2)}Re^{i\theta}i\,d\theta=\int_0^\pi\frac{e^{iR\cos\theta-R\sin\theta}-1}{R^2e^{2i\theta}+a^2}i\,d\theta.$$

El següent pas és prendre el límit $R\to\infty$. Observem que:

- Per la integral sobre γ_1, quan $R \to \infty$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t - 1}{t(t^2+a^2)}\, dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t^2+a^2)}\, dt.$$

- Per la integral sobre γ_2, com $\sin\theta \geq 0$ per $\theta \in [0, \pi]$:

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin\theta}+1}{R^2-a^2}\, d\theta \leq \int_0^{\pi} \frac{2R}{R^2-a^2}\, d\theta$$
$$\leq \pi \frac{2}{R^2-a^2} \to 0, \qquad R \to \infty.$$

Tenim doncs:

$$2\pi i \frac{e^{-a}-1}{-2a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t - 1}{t(t^2+a^2)}\, dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t^2+a^2)}\, dt$$

i per tant:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t - 1}{t(t^2+a^2)}\, dt = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t^2+a^2)}\, dt = 2\pi \frac{e^{-a}-1}{-2a^2}.$$

Observem que la funció $\frac{\cos t - 1}{t(t^2+a^2)}$ és senar, per tant el resultat sobre la seva integral és coherent. D'altra banda, com la funció $\frac{\sin t}{t(t^2+a^2)}$ és parell, tenim que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t(t^2+a^2)}\, dt = \pi \frac{e^{-a}-1}{-2a^2} = \pi \frac{1-e^{-a}}{2a^2}.$$

26. Sigui $g(x)$ una funció holomorfa a tot el pla complex menys en un conjunt finit de pols $F = \{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ és un conjunt finit de pols, i complint que $\lim_{|z| \to +\infty} |zg(z)| = 0$. Proveu que:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) &= -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(g(z)\cot(\pi z); z_j), \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n g(n) &= -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(g(z)\operatorname{cosec}(\pi z); z_j). \end{aligned}$$

(Indicació: Considereu la funció $f(z) = g(z)\cot(\pi z)$ i $f(z) = g(z)\operatorname{cosec}(\pi z)$, segons el cas, i integreu-la en el camí tancat γ_N definit pel quadrat de vèrtexs $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$, $N \in \mathbb{N}$.

Resolució: Considerem la funció $f(z) = g(z)\cot\pi z = g(z)\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$. Observem que aquesta funció té infinits pols:

- Als zeros del $\sin \pi z$, és a dir a $z_n^* = n,\ n \in \mathbb{Z}$.
- Als pols de $g(z)$, és a dir a $z_1, \ldots z_m$.

Com $z_1, \cdots, z_m \notin \mathbb{Z}$, la fórmula té sentit. Aleshores quan integrem al camí indicat, si N és prou gran, podem suposar que els pols $z_1, \ldots z_m$ són a l'interior de γ_N. Per altra banda z_n^* per $|n| \leq N$ tambe hi seràn i podem aplicar el teorema dels residus a la funció $f(z)$ ja que les seves singularitats són aïllades i és holomorfa a l'interior del camí (excepte les singularitats). Obtindrem:

$$\int_{\gamma_N} f(z)\ dz = \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{Res}(f,n) + \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f,z_j).$$

Calculem els residus $\operatorname{Res}(f,n)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,n) &= \lim_{z\to n}(z-n)f(z) = \lim_{z\to n}(z-n)g(z)\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z} = \lim_{z\to n} g(z) \lim_{z\to n}(z-n)\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z} \\ &= g(n)\lim_{z\to n}\frac{-\pi(z-n)\sin\pi z + \cos\pi z}{\pi\cos\pi z} = \frac{g(n)}{\pi}.\end{aligned}$$

Ara, prenent $N\to\infty$, veurem que

$$\int_{\gamma_N} f(z)\ dz \to 0, \qquad N\to\infty, \tag{1.4}$$

aleshores tindrem:

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}(f,n) + \sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}(f,z_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{g(n)}{\pi} + \sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}(f,z_j)$$

que és el resultat que voliem provar.

Per demostrar (1.4) observem que la funció $\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}$ està acotada al nostre camí. En efecte:

$$\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right| = \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\right| \le \frac{e^{-\operatorname{Im} z}+e^{\operatorname{Im} z}}{\left|e^{-\operatorname{Im} z}-e^{\operatorname{Im} z}\right|}.$$

Aleshores

- Si $\operatorname{Im} z \ge 1$ tenim

$$\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right| \le \frac{2e^{\operatorname{Im} z}}{e^{\operatorname{Im} z}-e^{-\operatorname{Im} z}} \le \frac{2e^{\operatorname{Im} z}}{e^{\operatorname{Im} z}(1-e^{-2\operatorname{Im} z})} \le \frac{2}{(1-e^{-2})} \le 4.$$

- Anàlogament, quan $\operatorname{Im} z \le -1$ tenim

$$\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right| \le \frac{2e^{-\operatorname{Im} z}}{e^{-\operatorname{Im} z}-e^{\operatorname{Im} z}} \le \frac{2e^{-\operatorname{Im} z}}{e^{-\operatorname{Im} z}(1-e^{2\operatorname{Im} z})} \le \frac{2}{(1-e^{-2})} \le 4$$

Per tant podem afirmar que, a les fronteres horitzontals de γ_N:

$$\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right| \le 4.$$

A les fronteres verticals, $z = (N+\frac{1}{2})(\pm 1 + it)$, $t\in[-1,1]$. Utilitzant que $h(z) = \frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}$ és $1-$periòdica, tindrem que:

$$\begin{aligned}\left|h\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)(\pm1+it)\right)\right| &= \left|h\left(\pm\frac{1}{2} + i\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\right| = \left|\frac{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}+i\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}+i\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}\right| \\ &= \left|\frac{\sin\left(i\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\cos\left(i\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}\right| = \left|\frac{\sinh\left(\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\cosh\left(\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}\right| \le 1\end{aligned}$$

ja que la funció $\sinh x < \cosh x$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant hem vist que a tots els camins es verifica que $|h(z)| \leq 4$.

Amb aquest resultat veiem ara que $\int_{\gamma_N} f(z)dz \to 0$ si $N \to \infty$. Prenem un $\varepsilon > 0$ i provarem que $\exists N_0$ tal que per a tot $N \geq N_0$, aleshores

$$\left| \int_{\gamma_N} f(z)dz \right| \leq \varepsilon.$$

Com per hipòtesi, $\lim_{|z|\to\infty} |zg(z)| = 0$, prenem $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{32}$ i sabem que existeix $K > 0$ tal que si $|z| \geq K$ aleshores $|zg(z)| \leq \varepsilon'$. Com per a tot $z \in \gamma_N$ tenim que $(N + \frac{1}{2}) \leq |z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(N + \frac{1}{2})$, prenem $N \geq N_0$ per tal que $(N + \frac{1}{2}) > K$ i podem assegurar que $|g(z)| \leq \varepsilon' \frac{1}{|z|}$. Llavors a γ_N^1:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_N^1} g(z)h(z)\ dz \right| &= \left| \int_{-1}^{1} g\left(\left(N + \frac{1}{2} \right)(t-i) \right) h\left(\left(N + \frac{1}{2} \right)(t-i) \right) \left(N + \frac{1}{2} \right)\ dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} \varepsilon' \frac{1}{(N+\frac{1}{2})} 4 \left(N + \frac{1}{2} \right)\ dt \leq 8\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

De forma anàloga provem que la integral sobre la resta de les fronteres també és $\leq \varepsilon/4$ i per tant

$$\left| \int_{\gamma_N} f(z)dz \right| \leq \varepsilon.$$

27. Utilitzeu el problema anterior per provar les identitats següents:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi a)^2}$ $(a \notin \mathbb{Z})$.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = -\frac{\pi}{a} \cot(\pi a)$ $(a \notin \mathbb{Z})$.

Resolució:

(i) Per calcular aquesta sèrie sembla natural considerar $g(z) = \frac{1}{z^2}$ i aplicar la primera igualtat del problema anterior, però la funció $g(z)$ té un pol a $z = 0$ i en aquest cas la prova no és vàlida, així que la tornarem a fer. Denotem per $\gamma_N = \gamma_N^1 \cup \gamma_N^2 \cup \gamma_N^3 \cup \gamma_N^4$, el mateix camí del problema 26 i tornem a tenir

$$\int_{\gamma_N} f(z)\ dz \to 0,$$

ja que a la demostració d'aquest fet només hem utilitzat que $\lim_{|z|\to\infty} |zg(z)| = 0$. Considerem la funció $f(z) = g(z)\text{cot}\pi z = g(z)\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$. Observem que aquesta funció té infinits pols:

- Als zeros del $\sin \pi z$, és a dir a $z_n^* = n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, són pols simples.
- Al $z = 0$, que ara tenim un pol triple.

Igual que al problema 26 tindrem que:

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\ n\neq 0} \text{Res}(f, n) + \text{Res}(f, 0)$$

El càlcul del residu als pols $z = n$, $n \neq 0$ es fa exactament igual que al problema 26:

$$\begin{aligned} \text{Res}\,(f, n) &= \lim_{z\to n} (z-n) f(z) = \lim_{z\to n} (z-n) \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} = \frac{1}{n^2} \lim_{z\to n} (z-n) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\ &= \frac{1}{n^2} \lim_{z\to n} \frac{-\pi(z-n)\sin \pi z + \cos \pi z}{\pi \cos \pi z} = \frac{1}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

El residu a $z = 0$ l'hem de calcular a part ja que és un pol triple. Calcularem el residu usant la sèrie de Laurent:

$$\begin{aligned} \cos \pi z &= 1 - \frac{(\pi z)^2}{2} + \mathcal{O}\left(z^4\right) = 1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + \mathcal{O}\left(z^4\right), \\ \sin \pi z &= \pi z - \frac{(\pi z)^3}{6} + \mathcal{O}\left(z^4\right) = \pi z \left(1 - \frac{\pi^2}{6} z^2 + \mathcal{O}\left(z^3\right)\right) \\ \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} &= \frac{1}{\pi z^3} \left(1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + \mathcal{O}\left(z^4\right)\right) \left(1 - \frac{\pi^2}{6} z^2 + \mathcal{O}\left(z^3\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\pi z^3} \left(1 + \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2}\right) z^2 + \mathcal{O}\left(z^3\right)\right). \end{aligned}$$

Per tant $\text{Res}\ (f, 0) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$. Llavors

$$0 = \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} - \frac{\pi}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Finalment

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(ii) En aquest cas considerem $g(z) = \frac{1}{(2z+1)^2}$ que té un pol doble a $z = -\frac{1}{2}$ i per tant verifica les hipòtesis del problema 26. Utilitzant la primera propietat amb $f(z) = \frac{1}{(2z+1)^2}\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2} &= -\pi \mathrm{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) = -\pi \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{(2z+1)^2}\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\ &= -\frac{\pi}{4}\lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = -\frac{\pi}{4}\lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{-\pi}{\sin^2 \pi z} = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

Aleshores deduïm que:

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{4} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n\leq -1} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{j\geq 0} \frac{1}{(-2n-1)^2} \\ &= 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

Per tant:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(iii) Aquesta suma la podem deduir dels dos apartats anteriors. Sabem, per l'apartat i) i ii), que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Llavors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}.$$

De fet, els apartats ii) i iii) es poden deduïr directament del i). Primer sumem els parells:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

i ara els senars:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(iv) En aquest cas considerem $g(z) = \frac{1}{(2z+1)^3}$ que té un pol triple a $z = -\frac{1}{2}$, per tant verifica les hipòtesis del problema 26 i podem aplicar-ne la segona conclusió. Prenent la funció $f(z) = g(z)\frac{1}{\sin \pi z}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} &= -\pi \mathrm{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) = -\pi \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dz^2}\left(z+\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{(2z+1)^3}\frac{1}{\sin \pi z} \\ &= -\frac{\pi}{8}\lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{\pi^3}{16}\lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 \pi z + 2\cos^2 \pi z}{\sin^3 \pi z} = \frac{\pi^3}{16}.\end{aligned}$$

Aleshores deduïm que:

$$\frac{\pi^3}{16} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + \sum_{n\leq -1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^{-j-1}}{(-2j-1)^3}$$
$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} = 2\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Per tant:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^3}{32}.$$

(v) En aquest cas considerem $g(z) = \frac{1}{(z+a)^2}$ que té un pol doble a $z = -a \notin \mathbb{Z}$, per tant verifica les hipòtesis del problema 26 i podem aplicar-ne la primera conclusió definint la funció $f(z) = \frac{1}{(z+a)^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+a)^2} = -\pi \operatorname{Res}(f, -a) = -\pi \lim_{z\to -a} \frac{d}{dz} (z+a)^2 \frac{1}{(z+a)^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$
$$= -\pi \lim_{z\to -a} \frac{d}{dz} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = -\pi \lim_{z\to -a} \frac{-\pi}{\sin^2 \pi z} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}.$$

Per tant:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$$

(vi) En aquest cas considerem $g(z) = \frac{1}{z^2-a^2}$ que té pols simples a $z = \pm a \notin \mathbb{Z}$, per tant verifica les hipòtesis del problema 26 i podem aplicar-ne la primera conclusió definint la funció $f(z) = \frac{1}{z^2-a^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2-a^2} &= -\pi \left(\operatorname{Res}(f, -a) + \operatorname{Res}(f, a)\right)\\
&= -\pi \left(\lim_{z\to -a} (z+a) \frac{1}{z^2-a^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} + \lim_{z\to a} (z-a) \frac{1}{z^2-a^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right)\\
&= -\pi \left(\lim_{z\to -a} \frac{1}{z-a} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} + \lim_{z\to a} \frac{1}{z+a} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right)\\
&= -\pi \left(\frac{-1}{2a} \cot(-\pi a) + \frac{1}{2a} \cot(\pi a) \right)\\
&= -\frac{\pi}{a} \cot(\pi a).\end{aligned}$$

Per tant:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2-a^2} = -\frac{\pi}{a} \cot(\pi a).$$

29. Sigui $f(z)$ una funció holomorfa en el disc unitat $D_1(0)$ i contínua en $\bar{D}_1(0)$ que compleix que $|z| = 1 \implies |f(z)| < 1$. Proveu que l'equació $f(z) = z$ té una única solució en $D_1(0)$.

Resolució: Anem a aplicar el teorema de Rouché a $h(z) = f(z) - z$ i $g(z) = -z$. Tenim que les dues són holomorfes a $D_1(0)$ i $\Gamma = \partial D_1(0) \sim 0$. Ens cal comprovar que $\forall z \in \Gamma$, i.e. $|z| = 1$, llavors $|h(z) - g(z)| < |g(z)|$. És clar que si $z \in \Gamma$ tenim que $|h(z) - g(z)| = |f(z)|$ i per tant

$$|h(z) - g(z)| < |g(z)| \iff |f(z)| < |z| \iff |f(z)| < 1$$

on hem usat que la darrera desigualtat és certa per hipòtesi.

El teorema de Rouché conclou que $h(z) = f(z) - z$ té els mateixos zeros a $D_1(0)$ que $g(z) = z$, és a dir 1. Per tant l'equació $f(z) = z$ té una única solució a $D_1(0)$.

30. Si $a > e$ proveu que l'equació $az^n = e^z$ té n solucions en el disc unitat $D_1(0)$.

Resolució: Volem trobar el nombre de solucions de $az^n = e^z$ a $D_1(0)$. Anem a aplicar el teorema de Rouché a $g(z) = az^n - e^z$ i $f(z) = az^n$. És clar que les dues funcions són holomorfes a $D_1(0)$ i $\Gamma = \partial D_1(0) \sim 0$. Ens cal comprovar que si $z \in \Gamma$, llavors $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Sigui $z = e^{i\theta}$:

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \iff |e^z| < |az^n| \iff e^{\cos\theta} < a \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Com $e^{\cos\theta} \leq e$ i $e < a$ per hipòtesi, la darrera desigualtat és certa i per tant el teorema de Rouché aplica. Deduïm llavors que $g(z)$ té els mateixos zeros a $D_1(0)$ que $f(z) = az^n$, és a dir n (comptant en multiplicitat). Així doncs hem provat que l'equació $az^n = e^z$ té n solucions a $D_1(0)$.

Observem a més que els zeros de $g(z) = az^n - e^z$ a $D_1(0)$ són simples ja que, si $g(z_*) = az_*^n - e^{z_*} = 0$ i $|z_*| \leq 1$, llavors $g'(z_*) = naz_*^{n-1}e^{z_*} = z_*^{n-1}(na - z_*)$. Clarament $z_* \neq 0$ i a més

$$|na - z_*| \geq |na| - |z_*| \geq a - 1 > e - 1 > 0.$$

Per tant $g'(z_*) \neq 0$ que vol dir que tots els zeros de $g(z)$ a $D_1(0)$ tenen multiplicitat 1.

31. Sigui $p(z) = 4z^4 + 2(i-1)z + 1$.

(i) Vegeu que els quatre zeros de $p(z)$ estan dins el disc unitat $D_1(0)$.

(ii) Vegeu que tres dels zeros del $p(z)$ estan en l'anell circular $A = \{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$.

Resolució:

(i) Volem veure que $p(z)$ té tots els zeros a $D_1(0)$. Anem a aplicar el teorema de Rouché sobre $D_1(0)$ a les funcions $p(z)$ i $f(z) = 4z^4$. És clar que les dues funcions són holomorfes a $D_1(0)$ i $\Gamma = \partial D_1(0) \sim 0$. Ens cal comprovar que si $z \in \Gamma$, $|p(z) - f(z)| < |f(z)|$. Sigui $z \in \Gamma$:

$$|p(z) - f(z)| < |f(z)| \iff |2(i-1)z + 1| < |4z^4| = 4.$$

Comprovem que la darrera desigualtat és certa. En efecte:

$$|2(i-1)z + 1| \leq 2\frac{\sqrt{2}}{2}|z| + 1 = \sqrt{2} + 1 < 2,42 < 4.$$

Per tant el teorema de Rouché conclou que $p(z)$ té els mateixos zeros a $D_1(0)$ que $f(z) = 4z^4$, és a dir 4. Així doncs hem provat que tots els zeros de $p(z)$ són a $D_1(0)$.

(ii) Per veure que $p(z)$ té 3 zeros a l'anell $A = \{z \in \mathbb{C},\ \frac{1}{2} < |z| < 1\}$ veurem que només en té un a $D_{\frac{1}{2}}(0)$. Per això, usarem el teorema de Rouché per comparar $p(z)$ amb la funció $h(z) = 2(i-1)z + 1$. Observeu que la funció $h(z)$ té una arrel a $z = -1/2(i-1)$ i com $|z| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $z \in D_{\frac{1}{2}}(0)$. Sigui $|z| = \frac{1}{2}$, llavors

$$|p(z) - h(z)| < |h(z)| \iff |4z^4| = \frac{1}{4} < |2(i-1)z + 1|.$$

Comprovem la darrera desigualtat. En efecte, si $|z| = \frac{1}{2}$,

$$|2(i-1)z+1| \geq \left|2\frac{\sqrt{2}}{2}|z| - 1\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Però

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{4} \iff \frac{3}{2} > \sqrt{2}$$

que és cert. Per tant el Teorema de Rouché ens diu que $p(z)$ té un zero a $D_{\frac{1}{2}}(0)$. Com sabem que en té 4 a $D_1(0)$ és clar que en té 3 a l'anell A.

32. Proveu que totes les arrels de $z^7 - 5z^3 + 12$ estan en l'anell circular $A = \{1 < |z| < 2\}$.

Resolució: Anomenem $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$. Farem aquest exercici en dues parts, similars a les del problema anterior.

- Veiem primer que $P(z)$ té tots els zeros a $D_2(0)$. Anem a aplicar el teorema de Rouché sobre $D_2(0)$ a les funcions $P(z)$ i $f(z) = z^7$. És clar que les dues funciones són holomorfes a $D_2(0)$ i $\Gamma = \partial D_2(0) \sim 0$. Sigui $|z| = 2$:

$$|P(z) - f(z)| < |f(z)| \iff |-5z^3 + 12| < |z^7| = 2^7.$$

Comprovem aquesta darrera desigualtat:

$$|-5z^3 + 12| \leq 5 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 < 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 = 2^3(5+2) = 2^3 7 < 2^3 2^3 = 2^6 < 2^7.$$

Per tant el teorema de Rouché diu que $P(z)$ té els mateixos zeros a $D_2(0)$ que $f(z) = z^7$, és a dir 7. Així doncs hem provat que tots els zeros de $P(z)$ són a $D_2(0)$.

- Per veure que $P(z)$ té tots els zeros a $A = \{z \in \mathbb{C},\ 1 < |z| < 2\}$ veurem que no en té cap al disc $D_1(0)$. Per això la compararem amb la funció $h(z) = 12$,que no té cap zero, usant el Teorema de Rouché. Cal comprovar que, si $|z| = 1$,

$$|P(z) - h(z)| < |h(z)| \iff |z^7 - 5z^3| < 12.$$

Comprovem-ho:

$$|z^7 - 5z^3| \leq |z|^7 + 5|z|^3 = 6 < 12.$$

Per tant el Teorema de Rouché ens diu que $P(z)$ no té cap zero a $D_1(0)$. Com sabem que en té 7 a $D_2(0)$ és clar que els té tots 7 a l'anell A.

33. Demostreu que la funció $2 + z^2 - e^{iz}$ només té un zero en el semiplà superior.

Resolució: Volem veure que la funció $g(z) = 2 + z^2 - e^{iz}$, només té un zero al semiplà superior $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$.

El que demostrarem serà que, si R és prou gran, la funció $g(z)$ només té un zero a l'interior del semicercle corresponent a la intersecció del cercle C_R centrat al 0 i de radi $R > 0$ amb el semiplà superior. La vora d'aquest semicercle $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ on

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C},\ z = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}, \qquad \Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z = 0,\ -R \leq \operatorname{Re} z \leq R\}.$$

Veurem que, si $R \gg 1$ (de fet demostrarem que cal $R > 2$), $g(z)$ té tots un únic zero a C_R aplicant el teorema de Rouché a les funcions $g(z)$ i $f(z) = 2 + z^2$ i sobre el camí Γ. Observeu que, si podem aplicar el teorema de Rouché, deduïm que $g(z)$ té els mateixos zeros a l'interior de C_R que $f(z) = 2 + z^2$, és a dir 1 (l'altre zero de f no és a l'interior C_R). Com això és cert $\forall R > 2$, g només té un zero a $\operatorname{Im} z \geq 0$ i haurem acabat.

Anem doncs a comprovar que les hipòtesis del teorema de Rouché es satisfan. És clar que les dues funcions són holomorfes a $\mathbb{C}$. Respecte al camí, clarament $\Gamma \sim 0$ i tot punt $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ satisfà que o bé $n(\Gamma, z)$ és 0 (si z pertany a l'interior de Γ) o 1 (en cas contrari). Només ens queda per demostrar que si $z \in \Gamma$, $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$. Com $|g(z) - f(z)| = |e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}$ ens cal veure que si $z \in \Gamma$

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)| \iff e^{-\operatorname{Im} z} < |2 + z^2|. \tag{1.5}$$

Observem que, si $z \in \Gamma$, llavors $\operatorname{Im} z \geq 0$ i per tant una condició suficient perquè (1.5) sigui certa és que

$$1 < |2 + z^2|. \tag{1.6}$$

Veiem (1.6) primer per $z \in \Gamma_1$. A Γ_1 tenim que $|z| = R$ i si $R > 2$:

$$|2 + z^2| \geq ||z|^2 - 2| = |R^2 - 2| = R^2 - 2 > 4 - 2 = 2 > 1.$$

Per tant (1.6) és cert a Γ_1. La condició (1.6) és certa trivialment per $z \in \Gamma_2$ ja que $z \in \mathbb{R}$ i llavors:

$$|2 + z^2| = 2 + z^2 \geq 2 > 1.$$

En conclusió, hem demostrat que per a tot $z \in \Gamma$ es verifica $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$, i per tant les hipòtesis del teorema de Rouché es satisfan.