Apunts de l'assignatura d'Equacions Diferencials

Inmaculada Baldomá Barraca
Departament de Matemàtiques,
Universitat Politècnica de Catalunya

Curs 2019-2020

1 Equacions diferencials lineals

En aquesta primera secció introduïrem les equacions diferencials lineals, les quals són les més senzilles que es poden considerar. Donarem les eines conegudes per estudiar les seves solucions, tant des d'un punt de vista quantitatiu com qualitatiu.

1.1 Context, definicions bàsiques i hipòtesis

Considerem equacions diferencials ordinàries (edos) de la forma

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad t \in I \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

amb

- I un interval, que pot ser infinit,
- $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$,
- $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$,
- $x = x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ la solució.

Per exemple,

- $\dot{x} = 2x$, $\dot{x} = x$,
- $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x$, $x = (x_1, x_2)$,
- $\dot{x} = t^3 x + 2\cos t$,....

D'altra banda,

Definició 1.1 *Mostrem una sèrie de definicions bàsiques.*

- *A vegades es fa servir també la notació:*

$$' = \frac{d}{dt}.$$

- *En notació no compacta, l'equació lineal* (1.1) *s'escriu:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

  Per això també s'anomenen sistemes lineals.

- *Edo lineal autònoma si A, b són constants, és a dir, no depenen de t. Altrament diem que l'edo és no autònoma.*
- *Si A és constant diem que l'edo és a coeficients constants.*
- *Diem que l'edo és homogènia si $b \equiv 0$. En cas contrari, diem que és no homogènia.*
- *Si tenim una solució $x : J \to \mathbb{R}^n$, anomenem òrbita al conjunt $\{x(t)\}_{t\in J} \subset \mathbb{R}^n$.*
- *Al conjunt de totes les òrbites se l'anomena retrat de fase.*
- *Al conjunt de totes les solucions, se l'anomena solució general.*

Les preguntes naturals a fer-se i que anirem resolent al llarg de la secció són:

1. Quines edos lineals es poden resoldre explícitament?
2. El Problema de Cauchy o Problema de Valors Inicials (PVI): Donat un $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ podem trobar una solució $x(t)$ de l'edo (1.1) tal que

   $$x(t_0) = x_0.$$

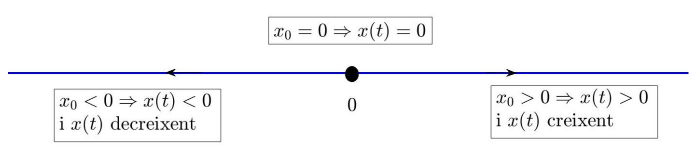
   On està definida x? a I?, hi ha només una solució?.

   A x_0 l'anomenem condició inicial per $t = t_0$.
3. En el cas que no podem donar una solució explícita de l'edo, què podem dir de l'estructura de l'espai de les solucions?
4. Quin és el comportament qualitatiu de les òrbites? és a dir, com és el retrat de fase? Per exemple,

   (a) Considereu

   $$x' = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

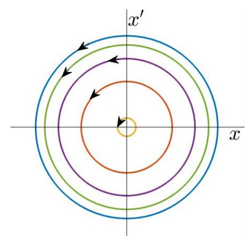
   Clarament totes les funcions $x(t) = e^t K$ amb $K \in \mathbb{R}$ són solució. Per tant, si només ens importa el que passa per $x \in \mathbb{R}$,



(b) $x'' = x$, $x \in \mathbb{R}$. Llavors,

$$x(t) = A\cos t + B\sin t, \qquad x'(t) = -A\sin t + B\cos t$$

i podem representar (x, x') al pla:



Qüestió: Penseu per què ens cal anar al pla per representar les òrbites si la nostra solució $x(t) \in \mathbb{R}$.

1.2 Edos lineals unidimensionals

En aquesta secció resoldrem les equacions

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \qquad x(t) \in \mathbb{R}$$

amb $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a mínim contínues, concretament $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$. Ho farem per parts, començant pels casos més senzills.

1. Cas $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$, $b \equiv 0$. És a dir, homogènia a coeficients constants:

$$\dot{x} = ax. \tag{1.2}$$

Proposició 1.2 *Totes les solucions de* (1.2) *són de la forma*

$$x(t) = e^{at}K,$$

amb $K \in \mathbb{R}$ una constant.

A més, per cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'única solució de (1.2) *tal que $x(t_0) = x_0$ és*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{a(t-t_0)}x_0.$$

A $\varphi(t; t_0, x_0)$ l'anomenem el flux de (1.2).

Demostració. És clar que $x(t) = e^{-at}K$ és solució. La pregunta és si totes les solucions tenen aquesta forma. Sigui $x(t)$ una solució, considerem

$$y(t) = e^{-at}x(t).$$

És clar que:

$$\dot{y}(t) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}\dot{x}(t) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}ax(t) = 0.$$

Així, x és solució de (1.2) si i només si, $y(t) = e^{-at}x(t)$ és constant. Per tant ja hem demostrat la primera part.

Per veure la segona part, només cal imposar que

$$x_0 = x(t_0) = e^{at_0}K \Rightarrow K = e^{-at_0}x_0$$

i reescriure la solució de la forma que dóna l'enunciat. ■

Observeu que

$$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \frac{d}{dt}\varphi(t; t_0, x_0) = a\varphi(t; t_0, x_0), \qquad \varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0. \quad (1.3)$$

2. Cas $b \equiv 0$. És a dir, homogènia:

$$\dot{x} = a(t)x, \qquad a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^r. \qquad (1.4)$$

Proposició 1.3 *Totes les solucions de* (1.4) *són de la forma*

$$x(t) = e^{\alpha(t)}K, \qquad K \in \mathbb{R}, \quad \alpha(t) = \int a(t)\,dt$$

amb K una constant i $\alpha(t)$ una primitiva qualsevol de $a(t)$.

A més per cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, la única solució de (1.4) *tal que $x(t_0) = x_0$ és*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\alpha(t)-\alpha(t_0)}x_0.$$

A $\varphi(t; t_0, x_0)$ l'anomenem el flux de (1.4). *És una funció $\mathcal{C}^r$.*

Demostració. Està clar que $x(t) = e^{\alpha(t)}K$ és solució de (1.4). A més, si $x(t)$ és una solució, considerant

$$y(t) = e^{-\alpha(t)}x(t)$$

tenim que:

$$\dot{y} = e^{-\alpha(t)}(-\dot{\alpha})x(t) + e^{-\alpha(t)}\dot{x}(t) = -e^{-\alpha(t)}a(t)x(t) + e^{-\alpha(t)}a(t)x(t) = 0$$

i per tant, el mateix raonament del cas anterior es pot aplicar ara: $x(t)$ és solució de (1.4) si i només si $y(t) = e^{-\alpha(t)}x(t)$ és constant.

Igual que abans deduïm que l'única solució tal que $x(t_0) = x_0$ és $\varphi(t; t_0, x_0)$. ■

Per exemple, considereu

$$x' = 2tx.$$

Tenim que $\alpha(t) = t^2$ i per tant:

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{t^2 - t_0^2}x_0.$$

Condicions similars a les donades en (1.3) es donen en el cas no constant també:

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}\varphi(t; t_0, x_0) = a(t)\varphi(t; t_0, x_0), \qquad \varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0. \tag{1.5}$$

Ara bé, en aquest darrer cas hi ha una diferència amb el cas a coeficients constants. En efecte, observeu que el flux pel cas a coeficients constants, de fet, només depèn de $t - t_0$, així el flux de (1.2) és

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{a(t-t_0)}x_0 \Rightarrow \varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0). \tag{1.6}$$

Per tant, el t_0 inicial no té molta importància per aquestes equacions, ja que sempre es pot relacionar amb el flux per $t_0 = 0$. No obstant, això no passa en el cas no autònom. En efecte, mireu l'exemple $x' = 2tx$ i és clar que aquesta propietat no es satisfà. El que sí que podem afirmar és que

$$\varphi(t; t_1, \varphi(t_1; t_0, x_0)) = \varphi(t; t_0, x_0) \tag{1.7}$$

Observació 1.4 *Demostreu la igualtat anterior.*

De fet, veurem més endavant que les propietats (1.6) *(cas autònom) i* (1.7) *(cas no autònom) no són exclusives de les equacions diferencials lineals.*

3. Cas general

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \qquad a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^r. \tag{1.8}$$

Proposició 1.5 *Totes les solucions de* (1.8) *són de la forma*

$$x(t) = e^{-\alpha(t)} \left[K + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \right],$$

amb $K \in \mathbb{R}$ *una constant i* $\alpha(t) = \int a(t)\, dt$ *una primitiva qualsevol de* $a(t)$.
A més per cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, *la única solució de* (1.8) *tal que* $x(t_0) = x_0$ *és*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\alpha(t) - \alpha(t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha(s) - \alpha(t_0))} b(s)\, ds \right].$$

A $\varphi(t; t_0, x_0)$ *l'anomenem el flux de* (1.8). *És una funció* $\mathcal{C}^r$.

Observació 1.6 *A vegades també escrivim*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\, dr} b(s)\, ds \right].$$

Demostració. Sigui $x(t)$ una solució de (1.8) i considerem

$$y(t) = e^{-\alpha(t)} x(t).$$

Tenim que

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= e^{-\alpha(t)}(-\dot{\alpha}(t))x(t) + e^{-\alpha(t)}\dot{x}(t) = -e^{-\alpha(t)}a(t)x(t) + e^{-\alpha(t)}\left[a(t)x(t) + b(t)\right] \\ &= e^{-\alpha(t)} b(t). \end{aligned}$$

Per tant $x(t)$ és solució de (1.8) si i només si $y(t) = e^{-\alpha(t)}x(t)$ és una primitiva de $e^{-\alpha(t)}b(t)$. És a dir, si i només si:

$$y(t) = K + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \Longleftrightarrow x(t) = e^{\alpha(t)} \left[K + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \right].$$

Per a provar la fòrmula del flux $\varphi(t; t_0, x_0)$, en la prova inicial triem

$$y(t) = K + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)} b(s)\, ds.$$

Això ho podem fer perquè el raonament és vàlid per qualsevol primitiva de $e^{-\alpha(t)}b(t)$. Llavors si imposem que $x(t_0) = x_0$, tenim que

$$x_0 = x(t_0) = e^{\alpha(t_0)} K \Longleftrightarrow K = e^{-\alpha(t_0)} x_0$$

i reescrivint la solució obtenim el resultat que volíem. ∎

1.2.1 El mètode de variació de les constants

La fórmula donada a la proposició 1.5 per trobar les solucions de l'edo (1.8) es pot deduir seguint el mètode de variació de les constants que consta de dos passos:

i) Solucionem l'equació homogènia

$$\dot{x} = a(t)x$$

associada. Obtenim

$$x_h(t) = e^{\alpha(t)}K = e^{\int a(t)\,dt}K.$$

ii) Considerem que K no és constant i busquem solucions de la forma

$$x(t) = e^{\alpha(t)}K(t).$$

Llavors, com

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)\\
&\dot{x} = e^{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t)K(t) + e^{\alpha(t)}\dot{K}(t) = e^{\alpha(t)}a(t)K(t) + e^{\alpha(t)}\dot{K}(t) = a(t)x(t) + e^{\alpha(t)}\dot{K}(t)
\end{aligned}$$

tenim que, igualant les dues expressions de $\dot{x}$:

$$a(t)x(t) + b(t) = a(t)x(t) + e^{\alpha(t)}\dot{K}(t) \Longleftrightarrow \dot{K}(t) = e^{-\alpha(t)}b(t).$$

Per tant

$$K(t) = C + \int e^{-\alpha(t)}b(t)\,dt, \qquad C \in \mathbb{R}$$

i així

$$x(t) = e^{\alpha(t)}K(t) = e^{\alpha(t)}\left[C + \int e^{-\alpha(t)}b(t)\,dt\right].$$

Anem a fer un exemple. Considerem l'equació

$$\dot{x} = 2tx + t^3. \tag{1.9}$$

i) Solucionem l'equació homogènia $\dot{x} = 2tx$ i obtenim

$$x_h(t) = e^{t^2}K$$

ii) Busquem solucions de la forma $x(t) = e^{t^2} K(t)$. D'una banda tenim que:

$$\dot{x} = 2te^{t^2} K(t) + e^{t^2} \dot{K}(t) = 2tx(t) + e^{t^2} \dot{K}(t)$$

i d'altra banda, com que satisfà (1.9), $\dot{x} = 2tx + t^3$. Per tant, igualant les dues expressions de $\dot{x}$:

$$t^3 = e^{t^2} \dot{K}(t) \Longleftrightarrow \dot{K}(t) = e^{-t^2} t^3$$

obtenim

$$K(t) = C + \int e^{-t^2} t^3 \, dt = C - \frac{1}{2} e^{-t^2} \big(t^2 + 1\big)$$

i per tant

$$x(t) = e^{t^2} \left[C + \int e^{-t^2} t^3 \, dt \right] = e^{t^2} \left[C - \frac{1}{2} e^{-t^2} \big(t^2 + 1\big) \right].$$

Ara bé, si intentem trobar les solucions de

$$\dot{x} = 2tx + t^2$$

no podrem fer-ho tan explícitament. En aquest cas

$$K(t) = C + \int e^{-t^2} t^2 \, dt$$

no té una expressió en funcions simples.

Observació 1.7 *Fixeu-vos que inclús en aquest tipus tant simple d'equacions, no és possible en general trobar les solucions en termes de funcions senzilles. Tot i així les podem expressar en termes d'integrals.*

1.3 Equacions lineals homogènies. Generalitats

Considerem sistemes lineals (o equacions lineals) homogènies:

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}),\ \mathcal{C}^r,\ r \geq 0. \tag{1.10}$$

Les equacions homogènies satisfan una propietat important:

Proposició 1.8 (Principi de superposició) *Si $\hat{x}, \tilde{x} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ són dues solucions de* (1.10)*, llavors per a qualssevol constants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\alpha \hat{x} + \beta \tilde{x}$$

és també solució.

Demostració. La prova d'aquest fet és trivial. ■

Ara introduïm el concepte de solució matricial i de matriu fonamental.

Definició 1.9 *Considerem l'equació lineal homogènia* (1.10).

1. *Diem que* $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és una solució matricial si cada columna és solució de l'equació diferencial* (1.10).

   És a dir,

$$X(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \qquad \dot{x}_i = A(t)x_i$$

   i $x_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. *Observeu que també tenim que:*

$$\dot{X} = A(t)X.$$

2. *Diem que* $M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és una solució fonamental si* M *és una solució matricial i és invertible per a tot* $t \in I$.

Exercici 1.10 *Siguin* $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$ *i* $B : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$ *dues funcions matricials. Considereu* $C(t) = A(t)B(t)$.

Demostreu que

$$\frac{d}{dt}C(t) = \left[\frac{d}{dt}A(t)\right] B(t) + A(t)\left[\frac{d}{dt}B(t)\right].$$

Usarem aquesta propietat sense mencionar-la al llarg d'aquests apunts.

La importància de les matrius fonamentals és que si en coneixem una, ja tenim totes les solucions d'una equació lineal homogènia (1.10). Concretament tenim el següent resultat:

Proposició 1.11 *Suposem que el sistema d'equacions lineals* (1.10) *té una (només ens cal una) matriu fonamental*

$$M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Llavors totes les solucions de (1.10) *són de la forma*

$$x(t) = M(t)K, \qquad K \in \mathbb{R}^n$$

essent K *un vector constant.*

A més per cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, *la única solució de* (1.10) *tal que* $x(t_0) = x_0$ *és*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)\big[M(t_0)\big]^{-1}x_0.$$

A $\varphi(t; t_0, x_0)$ *l'anomenem el flux de* (1.10). *És una funció* $\mathcal{C}^r$.

Demostració. La prova en realitat és molt semblant a les que hem fet previament pel cas unidimensional. Observem primer que, com

$$\dot{M} = A(t)M$$

és clar que $x(t) = M(t)K$ amb $K \in \mathbb{R}^n$ és solució de l'equació homogènia (1.10).

Sigui ara $x(t)$ una solució qualsevol. Considerem $y(t) = \big[M(t)\big]^{-1}x(t)$ o equivalent (ja que M és invertible) $x(t) = M(t)y(t)$. Llavors,

$$\dot{x} = \dot{M}(t)y(t) + M(t)\dot{y} = A(t)My(t) + M(t)\dot{y} = A(t)x(t) + M(t)\dot{y}.$$

Per tant, com que $\dot{x} = A(t)x$, igualant amb l'expressió de $\dot{x}$ anterior, tenim que:

$$M(t)\dot{y} = 0.$$

Com $M(t)$ és invertible, $\dot{y} = 0$ i per tant $y(t) = K$ és a dir, y és constant.

Fixem $t_0 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$, volem trobar la K corresponent. Per això imposem

$$x_0 = x(t_0) = M(t_0)K \Longleftrightarrow K = \big[M(t_0)\big]^{-1}x_0$$

i obtenim la fórmula que busquem. ■

Fent servir la proposició anterior podem demostrar la següent important propietat sobre les matrius fonamentals i les solucions matricials.

Corol·lari 1.12 *Suposem que el sistema d'equacions lineals* (1.10) *té una (només ens cal una) matriu fonamental*

$$M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Llavors tota solució matricial $X(t)$ és pot expressar com

$$X(t) = M(t)K, \qquad K \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

amb K una matriu constant.

A més, per cada $t_0 \in I$,

$$X(t) = M(t)\big[M(t_0)\big]^{-1}X(t_0).$$

Demostració. Evident per la proposició anterior, ja que les columnes d'una solució matricial satisfan l'equació diferencial. ■

Si apliquem el corol·lari anterior a matrius fonamentals, obtenim més informació.

Corol·lari 1.13 *Si*

$$M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

és una matriu fonamental de (1.10)*, llavors*

1. $M(t)C$*, amb* $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *invertible també és una matriu fonamental.*

2. *Si* $\hat{M} : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és una altra matriu fonamental, llavors, existeix* $\hat{C} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tal que*
$$\hat{M}(t) = M(t)\hat{C}.$$
De fet, per qualsevol $t_0 \in I$*,*
$$\hat{M}(t) = M(t)\big[M(t_0)\big]^{-1}\hat{M}(t_0).$$

3. *Si* $\hat{M} : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és una altra matriu fonamental i* $\hat{M}(t_*) = M(t_*)$ *per algun* $t_* \in I$*, llavors*
$$\hat{M}(t) = M(t).$$

Per acabar aquesta secció preliminar, observem la següent propietat dels sistemes lineals no homogenis:

Proposició 1.14 *Considerem el sistema lineal no homogeni* (1.1)*:*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad t \in I \subset \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Suposem que el sistema homogeni, $\dot{x} = A(t)x$*, té una (només ens cal una) matriu fonamental*

$$M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Llavors totes les solucions de (1.11) *són de la forma*

$$x(t) = M(t)\left(K + \int \big[M(t)\big]^{-1} b(t)\, dt\right),$$

essent K *un vector constant.*

A més, per cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$*, l'única solució de* (1.11) *tal que* $x(t_0) = x_0$ *és*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)\left(\big[M(t_0)\big]^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} \big[M(s)\big]^{-1} b(s)\, ds\right).$$

A $\varphi(t; t_0, x_0)$ *l'anomenem el flux de* (1.11)*. És una funció* $\mathcal{C}^r$*.*

Demostració. La demostració és molt semblant a la prova de la proposició 1.11. Sigui $x(t)$ una solució de (1.11). Considerem

$$y(t) = \big[M(t)\big]^{-1} x(t) \Longleftrightarrow x(t) = M(t)y(t).$$

Busquem l'equació diferencial que satisfà $y(t)$. D'una banda, com que M és solució matricial del sistema homogeni, $\dot{M} = A(t)M$, per tant:

$$\dot{x}(t) = \dot{M}(t)y(t) + M(t)\dot{y}(t) = A(t)M(t)y(t) + M(t)\dot{y}(t) = A(t)x(t) + M(t)\dot{y}(t).$$

D'altra banda, com que x és solució:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

Igualant les dues expressions de $\dot{x}(t)$, tenim que

$$M(t)\dot{y}(t) = b(t) \Longleftrightarrow \dot{y}(t) = \big[M(t)\big]^{-1} b(t) \Longleftrightarrow y(t) = K + \int \big[M(t)\big]^{-1} b(t)\, dt.$$

Com que $x(t) = M(t)y(t)$, ja estem.

Per demostrar la fórmula del flux, fixem $t_0 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$. És clar que

$$y(t_0) = \big[M(t_0\big]^{-1} x_0,$$

Per tant

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big[M(s)\big]^{-1} b(s)\, ds = \big[M(t_0\big]^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} \big[M(s)\big]^{-1} b(s)\, ds$$

i la fórmula es dedueix trivialment fent servir $x(t) = M(t)y(t)$. ∎

Per tant la idea principal que hem de tenir és que:

Observació 1.15 *Si coneixem una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$, podem escriure totes les solucions de $\dot{x} = A(t)x + b(t)$*

Així, a partir d'ara, l'objectiu serà trobar o bé, si no podem, demostrar l'existència de matrius fonamentals.

1.4 Equacions lineals homogenies a coeficients constants

Durant aquesta secció considerarem sistemes

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}). \tag{1.12}$$

És a dir, A és una matriu constant, que no depèn de t. El nostre objectiu és trobar una matriu fonamental d'aquest sistema.

Definició 1.16 (Exponencial d'una matriu) . *Prenem una matriu $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i considerem*

$$\mathrm{e}^B := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{B^k}{k!}.$$

El conveni és $B^0 = \mathrm{Id}$.

Lema 1.17 *La funció e^B està ben definida per tota matriu $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

Demostració. Sigui $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Recordem primer la noció de normal matricial induïda. Donada una norma qualsevol $\|\cdot\|$ a $\mathbb{R}^n$, considerem

$$\|B\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \inf\big\{C\ :\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|Bx\| \leq C\|x\|\big\}.$$

Recordem també que

$$\|Bx\| \leq \|B\|\|x\|, \qquad \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ i tota matriu $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A més si la norma és induïda, $\|\mathrm{Id}\| = 1$.

Ara demostrem el lema. El que és clar és que cada terme de la sèrie

$$\left\|\frac{B^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|B\|^k}{k!}.$$

De fet, cada coeficient de la matriu $\frac{B^k}{k!}$ satisfà aquesta desigualtat. Com que la sèrie

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\|B\|^k}{k!}$$

és convergent, la e^B és absolutament convergent. ∎

La següent proposició defineix una matriu fonamental del sistema (1.12) i en dóna propietats.

Proposició 1.18 *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriu. Considerem la funció:*

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathbb{R} &\to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{tA}. \end{aligned}$$

Llavors:

1. *La sèrie que defineix ϕ_A és absolutament convergent i uniformement convergent sobre compactes de $\mathbb{R}$.*

2. *ϕ_A és $\mathcal{C}^\infty$ i*

$$\frac{d}{dt}\phi_A(t) = \phi_A(t)A = A\phi_A(t) \iff \frac{d}{dt}\,\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At} A = A\,\mathrm{e}^{At}.$$

3. *Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Llavors*

$$AB = BA \Rightarrow \mathrm{e}^{(A+B)t} = \mathrm{e}^{At}\,\mathrm{e}^{Bt} = \mathrm{e}^{Bt}\,\mathrm{e}^{At}.$$

4. $\phi_A(0) = \mathrm{Id}$.

5. $\left[\phi_A(t)\right]^{-1} = \phi_A(-t) = \mathrm{e}^{-tA}$.

6. $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{sA}$.

Demostració. Fixem $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i considerem ϕ_A com a l'enunciat.

1. Que la sèrie és absolutament convergent, ho hem vist a la demostració del lema 1.17. És clar que, per a cada compacte $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$, existeix una constant positiva tal que $\kappa > 0$
$$\forall t \in \mathcal{K}, \qquad |t| \le \kappa.$$
Llavors
$$\left\| \frac{(At)^k}{k!} \right\| \le \frac{\|A\|^k |t|^k}{k!} \le \frac{\|A\|^k \kappa^k}{k!}.$$
Com que la darrera fita no depèn de t, el criteri M- de Weierstrass ens assegura que la sèrie és uniformement convergent, ja que
$$\sum_{k\ge 0} \frac{\|A\|^k \kappa^k}{k!}$$
és absolutament convergent.

2. Així la sèrie es pot derivar terme a terme i per tant
$$\frac{d}{dt}\phi_A(t) = \sum_{k\ge 0} \frac{kt^{k-1}A^k}{k!} = \sum_{k\ge 1} A\frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} = A\phi_A(t)$$
Òbviament és $\mathcal{C}^\infty$.

3. Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que commuten, provem per inducció que:

$$(A+B)^k = k! \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l}. \tag{1.13}$$

En efecte, és clar si $k=1$, però també si $k=2$:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Suposem-ho cert per $k-1$:

$$\begin{aligned}(A+B)^k = (A+B)^{k-1}(A+B) &= (k-1)! \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!(k-1-l)!} A^l B^{k-1-l}(A+B) \\ &= (k-1)! \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!(k-1-l)!} \left[A^{l+1}B^{k-1-l} + A^l B^{k-l}\right].\end{aligned}$$

Agrupem ara els elements de la suma per $A^m B^{k-m}$:

$$\begin{aligned}(A+B)^k &= B^k + (k-1)! \sum_{m=0}^{k-1} A^m B^{k-m} \left[\frac{1}{(m-1)!(k-m)!} + \frac{1}{m!(k-1-m)!}\right] + A^k \\ &= B^k + (k-1)! \sum_{m=0}^{k-1} A^m B^{k-m} \frac{k}{m!(k-m)!} + A^k\end{aligned}$$

i la prova de (1.13) està completa. Llavors,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} &= \left(\sum_{l\geq 0} \frac{t^l A^l}{l!}\right)\left(\sum_{m\geq 0} \frac{t^m B^m}{m!}\right) = \sum_{m,l\geq 0} t^{l+m} \frac{A^l B^m}{l!m!} \\ &= \sum_{k\geq 0} t^k \sum_{l=0}^{k} \frac{A^l B^{k-l}}{l!(k-l)!} = \sum_{k\geq 0} t^k \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{t(A+B)}.\end{aligned}$$

4. És evident.

5. Obvi utilitzant ítem 3 i 4:

$$\mathrm{Id} = \phi_A(0) = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{(t-t)A} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{-tA} = \mathrm{e}^{-tA}\,\mathrm{e}^{tA}$$

6. Obvi utilitzant ítem 3.

■

Corol·lari 1.19 *$\phi_A(t) = \mathrm{e}^{tA}$ és l'única matriu fonamental del sistema lineal homogeni a coeficients constants $\dot{x} = Ax$ tal que quan $t = 0$, val* Id.

A més, per cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_A(t - t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}$ és l'única matriu fonamental de $\dot{x} = Ax$ tal que per $t = t_0$ val Id.

Així, per cada $t_0 \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existeix una única solució de $\dot{x} = Ax$ tal que $x(t_0) = x_0$ i és

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} x_0.$$

Demostració. Pel que acabem de veure, és clar que $\phi_A(t) = \mathrm{e}^{tA}$ és una matriu fonamental. Llavors, per l'item (3) del corol·lari 1.13 és la única satisfent que a $t = 0$ val Id.

L'altra propietat és conseqüència directa de l'anterior. ■

Observació 1.20 *L'ítem 3 no és cert si $AB \neq BA$. En efecte, considerem*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no commuten. Tenim que

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{tB} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcular $\mathrm{e}^{(A+B)t}$, trobarem directament la matriu fonamental M del sistema $\dot{x} = (A+B)x$ que per $t = 0$ val Id. *Llavors, tal com hem fet notar en el corol·lari anterior, $M(t) = \mathrm{e}^{(A+B)t}$. Plantegem doncs el sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} &= -2x_2 \end{aligned}$$

que en realitat són dos equacions unidimensionals que sabem resoldre:

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} c_2$$

i

$$\dot{x_1} = 2x_1 + \mathrm{e}^{-2t} c_2 \Rightarrow x_1 = e^{2t}\left[c_1 + \int \mathrm{e}^{-4t} c_2\, dt\right] = \mathrm{e}^{2t} c_1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} c_2.$$

Com que $\phi_{A+B}(t) = \mathrm{e}^{t(A+B)}$ *és una matriu fonamental, les dues columnes seran de la forma*

$$\left(\mathrm{e}^{2t} c_1 - \frac{1}{4} \mathrm{e}^{-2t} c_2, \mathrm{e}^{-2t} c_2\right)^\top$$

amb constants adequades. Com volem que $\phi_{A+B}(0) = \mathrm{Id}$, *ens cal, d'una banda que la primera columna tingui constants* (c_1, c_2) *tal que*

$$\left(c_1 - \frac{1}{4}c_2, c_2\right) = (1,0) \Longleftrightarrow (c_1, c_2) = (1,0)$$

i d'altra banda que la segona columna tingui constants

$$\left(c_1 - \frac{1}{4}c_2, c_2\right) = (0,1) \Longleftrightarrow (c_1, c_2) = \left(\frac{1}{4}, 1\right).$$

Per tant, recopilant tota la informació:

$$\mathrm{e}^{t(A+B)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

És fàcil veure que $\mathrm{e}^{t(A+B)} \neq \mathrm{e}^{tA} \mathrm{e}^{tB}$.

1.4.1 Càlcul de l'exponencial d'una matriu

En aquesta secció anem a calcular l'exponencial d'una matriu.

Lema 1.21 $x(t)$ *és solució de* $\dot{x} = Ax$ *si i només si* $y(t) = P^{-1}x(t)$ *és solució de* $\dot{y} = P^{-1}APy(t)$, *essent* $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *una matriu constant invertible.*

Demostració. Observeu que permetem que la matriu P sigui complexa. La prova és molt senzilla. Com que P és constant

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy.$$

■

Lema 1.22 *Si* $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *és una matriu invertible,*

$$\mathrm{e}^{tA} = P\, \mathrm{e}^{tP^{-1}AP}\, P^{-1}.$$

Demostració. Anomenem $J = P^{-1}AP$. Pel lema anterior $P^{-1}\mathrm{e}^{tA}$ és una matriu fonamental de $\dot{y} = Jy$. Per tant, existeix una matriu constant C tal que per tot $t \in \mathbb{R}$ (i en particular per $t = 0$),

$$P^{-1}\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tJ} C \Longrightarrow C = P^{-1}.$$

En conclusió $\mathrm{e}^{tA} = P\,\mathrm{e}^{tJ}\,P^{-1}$. ■

Així només ens cal saber com calcular e^{tJ} quan J està en forma de Jordan.

Observació 1.23 *Quan els valors propis són complexos, J serà una matriu complexa i per tant també ho seran P i P^{-1}.*

- **Primera reducció:** $J = \operatorname{diag}\big(J_1, \cdots, J_m\big)$. Com

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_m^k \end{pmatrix}$$

  tenim que

$$\mathrm{e}^{tJ} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{tJ_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{J_m t} \end{pmatrix}$$

  i per tant només cal saber calcular e^{tJ_i}, $i = 1, \cdots, m$.

- **Cas** $J = \lambda \operatorname{Id}$.

$$\mathrm{e}^{t\lambda \operatorname{Id}} = \sum_{k\geq} \frac{(t\lambda)^k}{k!} \operatorname{Id} = \mathrm{e}^{\lambda t} \operatorname{Id}.$$

- **Cas** $J = N$ amb $N^r = 0$ nilpotent.

$$\mathrm{e}^{tN} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} N^k = \operatorname{Id} + Nt + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(t-1)!} t^{r-1}.$$

  En particular, si

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

  llavors

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Cas** $J = \lambda \operatorname{Id} + N$, és a dir, capsa de Jordan no diagonalitzable. Com $\lambda \operatorname{Id}$ i N conmuten:

$$e^{Jt} = e^{(\lambda \operatorname{Id} + N)t} = e^{\lambda \operatorname{Id} t} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Cas valor propi complex simple**. En aquest cas podem pensar que tenim

$$A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det(A) < 0.$$

  És a dir, tenim un valor propi complex i el seu conjugat, tots dos amb multiplicitat 1. En aquest cas, podem

  1. Utilitzar que té forma de Jordan complexa $J = \operatorname{diag}(\lambda, \overline{\lambda})$ i per tant existeix una matriu $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ complexa tal que

  $$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\lambda} t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

  2. O bé no passar pels complexos. És fàcil veure que,

  $$A = Q \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} Q^{-1},$$

  essent $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una matriu real i $\lambda = \alpha + i\beta$. Pel lema 1.22 podem assegurar que $e^{tA} = Q e^{tJ} Q^{-1}$, essent

  $$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \operatorname{Id} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Anomenem

  $$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  És clar que $\alpha \operatorname{Id}$ i βW conmuten, per tant $e^{tJ} = e^{\alpha t} e^{tW}$. És també evident que

  $$W^2 = -\operatorname{Id} \Longrightarrow W^{2k+1} = (-1)^k W,\ W^{2k} = (-1)^k \operatorname{Id}.$$

Així,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\beta W t} &= \sum_{k\geq 0} \frac{(\beta t W)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(\beta t)^{2k}}{(2k)!} \operatorname{Id} + \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} W \\
&= \cos(\beta t) \operatorname{Id} + \sin(\beta t) W = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Per tant

$$
\mathrm{e}^{Jt} = \mathrm{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.
$$

Observació 1.24 *Per trobar la matriu real Q del canvi de variables, recordeu que si $w = u + iv$ és un vector propi de valor propi λ, llavors, com que $\overline{w} = u - iv$ és un vector propi de valor propi $\overline{\lambda}$:*

$$
Au = A\left(\frac{w + \overline{w}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\lambda w + \overline{\lambda w}) = \operatorname{Re}(\lambda w) = \alpha u - \beta v,
$$

si $\lambda = \alpha + i\beta$. Anàlogament,

$$
Av = A\left(\frac{w - \overline{w}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}(\lambda w - \overline{\lambda w}) = \operatorname{Im}(\lambda w) = \beta u + \alpha v.
$$

- **Cas valor propi complex no diagonalitzable**. Com abans podem procedir com s'ha mostrat anteriorment o bé intentar no passar pels complexos. Suposem que tenim una matriu A (real) amb dues capses de Jordan complexos de la forma:

$$
\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \overline{J} \end{pmatrix}, \qquad J = \lambda \operatorname{Id} + N,\ \overline{J} = \overline{\lambda} \operatorname{Id} + N
$$

essent $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ i N matriu nilpotent amb 1's a sota de la diagonal, com a (1.14).

Exercici 1.25 *En el cas anterior:*

i) Veieu que hi ha un canvi de variables real de la matriu A que la transforma en

$$
B = \begin{pmatrix} \widetilde{J} & \cdots & \cdots & 0 \\ \operatorname{Id}_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \widetilde{J} & \vdots \\ 0 & \cdots & \operatorname{Id}_2 & \widetilde{J} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},\ \operatorname{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

amb $\lambda = \alpha + i\beta$.

ii) Calculeu e^{Bt}.

Observació 1.26 *A efectes de calcular una matriu fonamental del sistema lineal* $\dot{x} = Ax$*, és suficient calcular*

$$\mathrm{e}^{tA} P = P\,\mathrm{e}^{t(P^{-1}AP)}.$$

Així ens estalviem de calcular P^{-1}.

Per descomptat, $M(t) = \mathrm{e}^{tA} P$*, no satisfà la condició inicial de la exponencial, és a dir,* $M(0) \neq \mathrm{Id}$.

Anem a veure dos exemples:

1. Matriu fonamental de
$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} x.$$
La matriu A té valors propis $\lambda_1 = 0, \lambda = -5$ i vectors propis $v_1 = (1,3)$, $v_2 = (2,1)$. Per tant $A = PJP^{-1}$, amb
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
i així, una matriu fonamental és
$$\mathrm{e}^{tA} P = P\,\mathrm{e}^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\,\mathrm{e}^{-5t} \\ 3 & \mathrm{e}^{-5t} \end{pmatrix}$$

2. Matriu fonamental de
$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} x.$$
Aquesta matriu té valors propis $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1+2i, \lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ amb vectors propis respectius:
$$v_1 = (0,-2,1), \quad v_2 = (-(2+i), -3i, 2), \quad v_3 = \overline{v_2}.$$
Per tant $A = PJP^{-1}$ amb
$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
i llavors, una matriu fonamental és
$$\mathrm{e}^{tA} P = P\,\mathrm{e}^{tJ} = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t}\cos(2t) & \mathrm{e}^{t}\sin(2t) \\ 0 & -\mathrm{e}^{t}\sin(2t) & \mathrm{e}^{t}\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Dues propietats importants

Veurem ara dos resultats útils. El primer és una simplificació d'un resultat més general que veurem més endavant i el segon ens dóna unes determinades solucions de $\dot{x} = Ax$ molt senzilles de calcular.

Proposició 1.27 *Suposem que tenim una solució matricial qualsevol $X(t)$ de $\dot{x} = Ax$. Llavors*

$$\det X(t) = \det X(t_0)\, \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A(t-t_0)}, \qquad \forall t, t_0 \in \mathbb{R}.$$

En particular, $\det X(t_0) \neq 0$ per algun $t_0 \in \mathbb{R}$ si i només si $\det X(t) \neq 0$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Demostració. La demostració és molt senzilla ja que per ser solució matricial (veieu 1.12)

$$X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\, X(t_0) \Rightarrow \det X(t) = \det X(t_0) \det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\right).$$

Hem vist que $\mathrm{e}^{tA} = P\, \mathrm{e}^{tJ}\, P^{-1}$, per tant

$$\det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\right) = \det P \det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)J}\right) \det P^{-1} = \det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)J}\right).$$

Siguin $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ els valors propis de A. Sabem que $\mathrm{e}^{(t-t_0)J}$ és triangular inferior:

$$\mathrm{e}^{(t-t_0)J} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \mathrm{e}^{\lambda_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix},$$

llavors

$$\det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)J}\right) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-t_0)} \cdots \mathrm{e}^{\lambda_n(t-t_0)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(t-t_0)}$$

i la prova està completa. ■

Suposem ara que volem trobar una matriu fonamental de

$$\dot{x} = Ax,$$

on $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu que diagonalitza (eventualment podria tenir valors propis complexos).

La idea és que no cal passar, si no es vol, per l'exponencial de la matriu. En efecte

Proposició 1.28 *Sigui v un vector propi de la matriu A de valor propi λ. Llavors*

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, v$$

és solució de l'equació diferencial $\dot{x} = Ax$.

Com a conseqüència, si existeix $v_1, v_2, \cdots, v_n$ una base de vectors propis amb valors propis associats $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, la matriu

$$M(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

és una matriu fonamental. És a dir, qualsevol solució és de la forma:

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n,$$

amb $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ i a més el flux ve definit per

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0; 0, x_0) = c_1^0 \mathrm{e}^{\lambda_1 (t-t_0)} v_1 + \cdots + c_n^0 \mathrm{e}^{\lambda_n (t-t_0)} v_n$$

amb $(c_1^0, \cdots, c_n^0)$ les coordenades del vector x_0 en la base $\{v_1, \cdots, v_n\}$.

Demostració. La demostració és senzilla. En efecte, si v és un vector propi de valor propi λ, definint $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ tenim que

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{\lambda t} \lambda v = \mathrm{e}^{\lambda t} A v = A \mathrm{e}^{\lambda t} v = A x(t).$$

Per tant la primera part és immediata.

El fet que $M(t)$ és una matriu fonamental prové del fet que és solució matricial (ja que cada columna ho és) i a més és invertible. En efecte, per la proposició 1.27 és suficient que $M(0)$ sigui invertible:

$$\det M(0) = \det \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \neq 0$$

ja que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ són una base.

La resta és immediata. ■

Exercici 1.29 *Utilitzant l'observació 1.24, veieu que si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ és un valor propi complex de vector propi $w = u + iv$, llavors*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \big(u \cos(\beta t) - v \sin(\beta t)\big), \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \big(u \sin(\beta t) + v \cos(\beta t)\big)$$

són dues solucions reals linealment independents.

1.5 Sistemes lineals a coeficients constants al pla

En aquesta secció estudiarem el comportament de totes les solucions de sistemes

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ x = (x_1, x_2). \tag{1.15}$$

Concretament estem interessats en el que s'anomena *retrat de fase*. Recordem les definicions:

Definició 1.30 *Donat un sistema lineal al pla* (1.15)*, definim:*

- *Òrbita: Definim l'òrbita d'un punt $p \in \mathbb{R}^2$ com*

$$\mathcal{O}(p) = \{\mathrm{e}^{tA}\, p\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

- *Retrat de fase: Definim el retrat de fase com el conjunt de totes les òrbites. L'objectiu d'un retrat de fase és donar un dibuix qualitatiu de tots els diferents comportaments. L'espai on es dibuixa s'anomena espai de fase i les seves variables es denoten també per (x_1, x_2).*

- *Punt fix o punt d'equilibri: Diem que p és un punt d'equilibri si $Ap = 0$. En aquest cas $\mathcal{O}(p) = \{p\}$. Observeu que $(0,0)$ és sempre un punt fix.*

De la pròpia definició deduïm que:

Proposició 1.31 *Sigui $p \in \mathbb{R}^2$.*

1. *Si $q \in \mathcal{O}(p)$ llavors $\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(p)$.*
2. *Si $q \notin \mathcal{O}(p)$ llavors $\mathcal{O}(q) \cap \mathcal{O}(p) = \emptyset$.*

Demostració. Fixem un punt del pla $p \in \mathbb{R}^2$.

1. Si $q \in \mathcal{O}(p)$, existeix t_* tal que $q = \mathrm{e}^{t_* A}\, p$. Llavors $\mathrm{e}^{tA}\, q = \mathrm{e}^{(t+t_*)A}\, p$ i per tant $\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(p)$.
2. Fem-la pel contrarecíproc. Suposem que $\mathcal{O}(q) \cap \mathcal{O}(p) \neq \emptyset$. Llavors, existeixen t_1, t_2 tals que

$$\mathrm{e}^{t_1 A}\, p = \mathrm{e}^{t_2 A}\, q \Longrightarrow q = \mathrm{e}^{(t_1 - t_2)A}\, p \Longrightarrow q \in \mathcal{O}(p).$$

■

Observeu que pel lema 1.21, només cal considerar els casos en els que la matriu A està ja en forma de Jordan. Així ens trobem amb 3 possibilitats:

1. A diagonalitza i té valors propis reals:
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
2. A no diagonalitza
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
3. A té valors propis complexos conjugats $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$:
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Passem ara a dibuixar el retrat de fase en aquests tres casos.

1.5.1 Cas A diagonalitzable als reals

En aquest cas tenim el sistema:
$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \lambda_1 x_1, \\ \dot{x_2} &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$
i per tant:
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$
Així:
$$\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}((p_1, p_2)) = \{(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, p_1, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, p_2)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

A partir d'ara suposarem que $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Exercici 1.32 *Feu el cas $\lambda_1 = 0$ i/o $\lambda_2 = 0$.*

Recordeu que les variables al pla seran (x_1, x_2) (atenció amb la duplicitat de notació, però és l'habitual!).

- És clar que $(0,0)$ és un punt d'equilibri i per tant $\mathcal{O}((0,0)) = \{(0,0)\}$. Per tant, per la proposició 1.31, cap òrbita pot passar per aquest punt.
- Si $p_1 = 0$ i $p_2 \neq 0$, llavors $\mathcal{O}((0,p_2)) = \{(0, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, p_2)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Així,
$$p_2 > 0 \Longrightarrow \mathcal{O}((0,p_2)) = \{x_2 > 0\}, \qquad p_2 < 0 \Longrightarrow \mathcal{O}((0,p_2)) = \{x_2 < 0\}.$$

- Si $p_2 = 0$ i $p_1 \neq 0$, llavors $\mathcal{O}((p_1,0)) = \{(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} p_1, 0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ i per tant

$$p_1 > 0 \Longrightarrow \mathcal{O}((p_1,0)) = \{x_1 > 0\}, \qquad p_1 < 0 \Longrightarrow \mathcal{O}((p_1,0)) = \{x_1 < 0\}.$$

- Si $p_1, p_2 \neq 0$. Escrivim $p = (p_1, p_2)$. Per dibuixar ens és més còmode escriure una variable en funció de l'altre. Per fer-ho fixem (x_1, x_2) un punt de $\mathcal{O}(p)$ i escrivim:

$$x_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} p_1 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \log\left(\frac{x_1}{p_1}\right).$$

Exercici 1.33 *Sigui $p = (p_1, p_2)$. Si $p_1 > 0$, tots els punts de la seva òrbita tenen la primera component positiva (no zero). El mateix si $p_1 < 0$ o $p_2 > 0$ o bé $p_2 < 0$.*

És a dir, els quadrants són invariants.

Com a conseqüència d'aquest resultat, el logaritme de x_1/p_1 està ben definit.

En qualsevol cas, com $x = (x_1, x_2)$ és un punt de $\mathcal{O}(p)$:

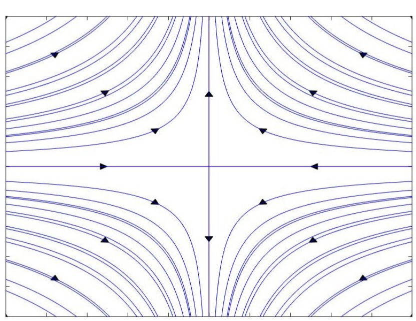
$$x_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} p_2 = \left(\frac{x_1}{p_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} p_2 = |x_1|^{\lambda_2/\lambda_1} \frac{p_2}{|p_1|^{\lambda_2/\lambda_1}}.$$

En resum totes les òrbites amb $p = (p_1, p_2)$ i $p_1, p_2 \neq 0$ es poden descriure com

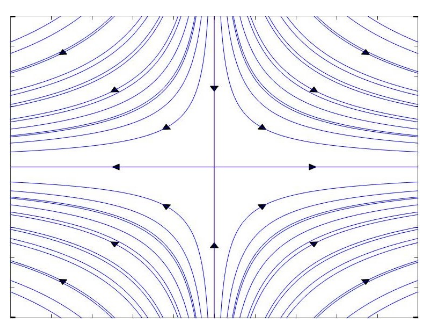
$$x_2 = K|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Aquests fets ens donen una idea bastant aproximada de com seran les solucions segons el valor que prenguin λ_1, λ_2. Concretament, tenim que:

- Si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, diem que $(0,0)$ és un *punt d'equilibri de tipus sella* i tenim



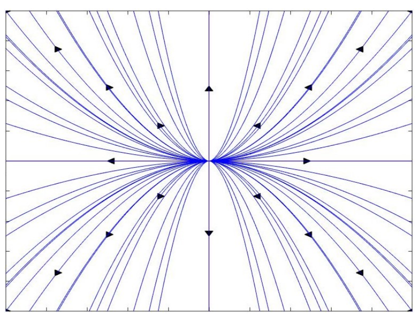
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0.$



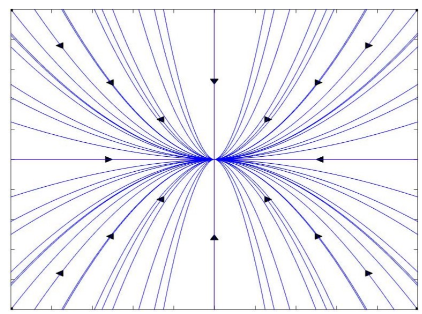
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0.$

- Si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ diem que $(0,0)$ és un *punt d'equilibri de tipus node*. A més, quan $\lambda_1 > 0$, diem que és un *node repulsor* i quan $\lambda_1 < 0$, diem que és un *node atractor*. El comportament qualitatiu de les solucions és:

  i) Quan $\lambda_2/\lambda_1 > 1$,

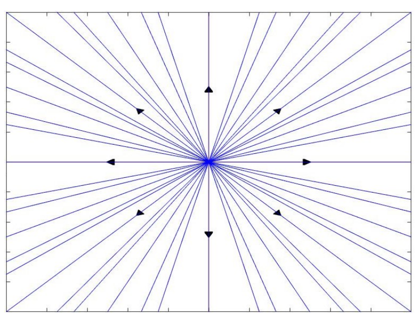


$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, node repulsor

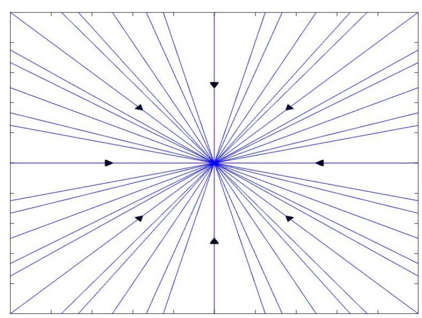


$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, node atractor.

  ii) Quan $\lambda_2/\lambda_1 = 1$,

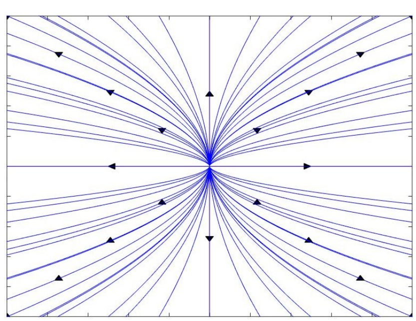


$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, node repulsor.

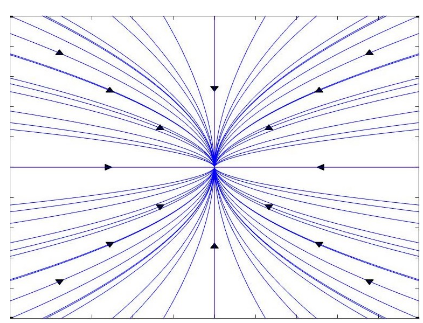


$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, node atractor.

  iii) Quan $\lambda_2/\lambda_1 < 1$,



$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, node repulsor.



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, node atractor.

1.5.2 Cas A no diagonalitzable

En aquest cas estudiem els sistemes

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \lambda x_1 \\ \dot{x_2} &= x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$

És molt fàcil veure que

$$\mathcal{O}(p) = \left\{ \left(\mathrm{e}^{\lambda t} p_1, t\, \mathrm{e}^{\lambda t} p_1 + \mathrm{e}^{\lambda t} p_2 \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Igual que abans deduïm que

$$\mathcal{O}((0, p_2)) = \{x_1 = 0, x_2 > 0\}, \qquad \text{si } p_2 > 0$$

i

$$\mathcal{O}((0, p_2)) = \{x_1 = 0, x_2 < 0\}, \qquad \text{si } p_2 < 0$$

Suposarem que $\lambda \neq 0$.

Exercici 1.34 *Feu el cas $\lambda = 0$.*

Quan $p_1 \neq 0$, escrivint

$$x_1 = \mathrm{e}^{\lambda t} p_1 \Leftarrow t = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{x_1}{p_1} \right)$$

obtenim

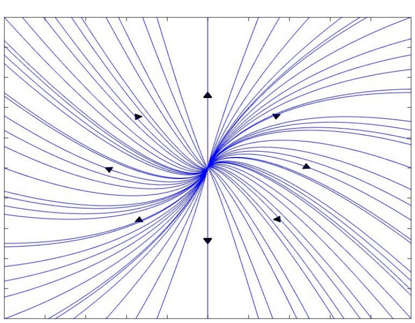
$$x_2 = t\, \mathrm{e}^{\lambda t} p_1 + \mathrm{e}^{\lambda t} p_2 = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{x_1}{p_1} \right) x_1 + \frac{x_1}{p_1} p_2.$$

Com p_1, p_2 són constants al llarg de l'òrbita, totes les solucions s'escriuen:

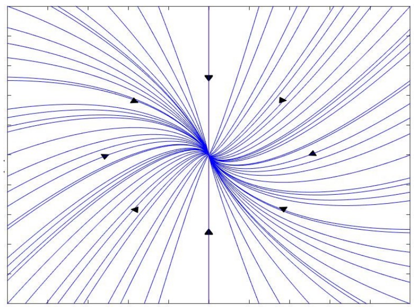
$$x_2 = C x_1 + \frac{1}{\lambda} \log |x_1|$$

Observació 1.35 *Observeu que, igual que ens ha passat en el cas anterior, si $p_1 > 0$, $x_1 > 0$ per qualsevol $x = (x_1, x_2)$ de l'òrbita del punt $p = (p_1, p_2)$. Aquest fet justifica el valor absolut a la fórmula anterior.*

Pot costar més o menys, però és un estudi bastant estàndard comprovar que



$\lambda > 0$, node impropi repulsor.



$\lambda < 0$, node impropi atractor.

Observeu que les òrbites són tangents a $\{x_1 = 0\}$.

1.5.3 Cas A amb valors propis complexos conjugats

Estem estudiant els sistemes de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \dot{x_2} &= -\beta x_1 + \alpha x_1. \end{aligned}$$

Escrivim les solucions

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} p_1 \cos(\beta t) + p_2 \sin(\beta t) \\ -p_1 \sin(\beta t) + p_2 \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Siguin, r_0, θ_0 les coordenades polars del punt inicial (p_1, p_2):

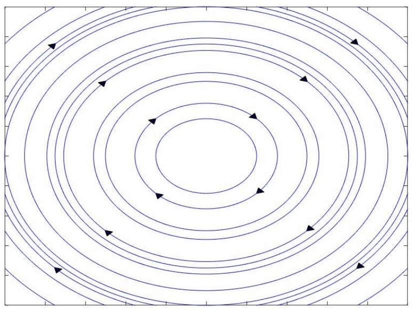
$$p_1 = r_0 \cos\theta_0, \qquad p_2 = r_0 \sin\theta_0.$$

Llavors

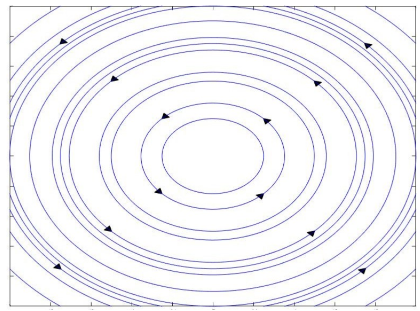
$$\begin{aligned} x(t) = r_0\,\mathrm{e}^{\alpha t} &\begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cos(\beta t) + \sin\theta_0 \sin(\beta t) \\ -\cos\theta_0 \sin(\beta t) + \sin\theta_0 \cos(\beta t) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - \beta t) \\ \sin(\theta_0 - \beta t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i ja ho tenim tot determinat:

- Si $\alpha = 0$ diem que $(0, 0)$ és un *punt d'equilibri de tipus centre*. Llavors totes les òrbites són circumferències i depenent del signe de β les solucions giren en sentit de les agulles del rellotge o oposat :

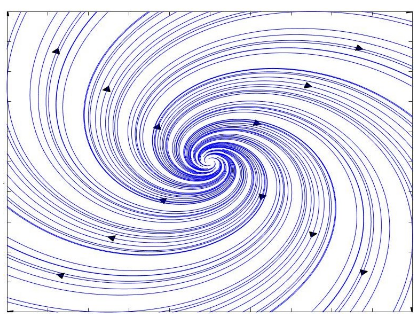


$\beta > 0$, centre.

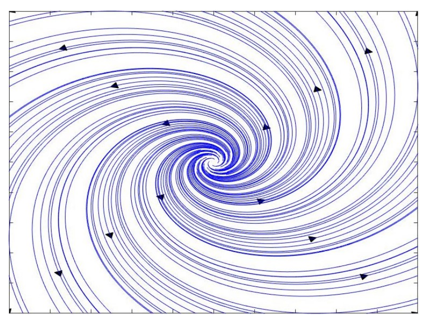


$\beta < 0$, centre.

- Si $\alpha \neq 0$ diem que $(0,0)$ és un *punt d'equilibri de tipus focus.* A més quan $\alpha > 0$, diem que és un *focus repulsor* i quan $\alpha < 0$, diem que és un *focus atractor.* Tenim així que, els focus repulsors són:

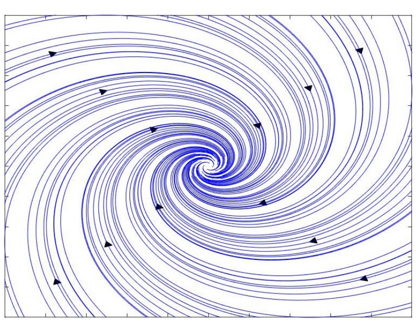


$\alpha > 0, \beta > 0$, focus repulsor.

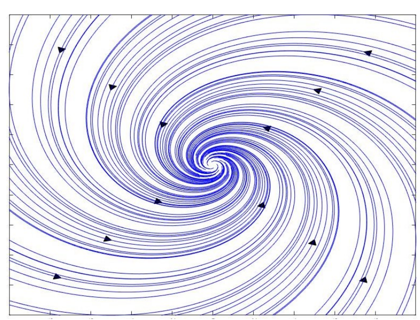


$\alpha > 0, \beta < 0$, focus repulsor.

I els focus atractors:



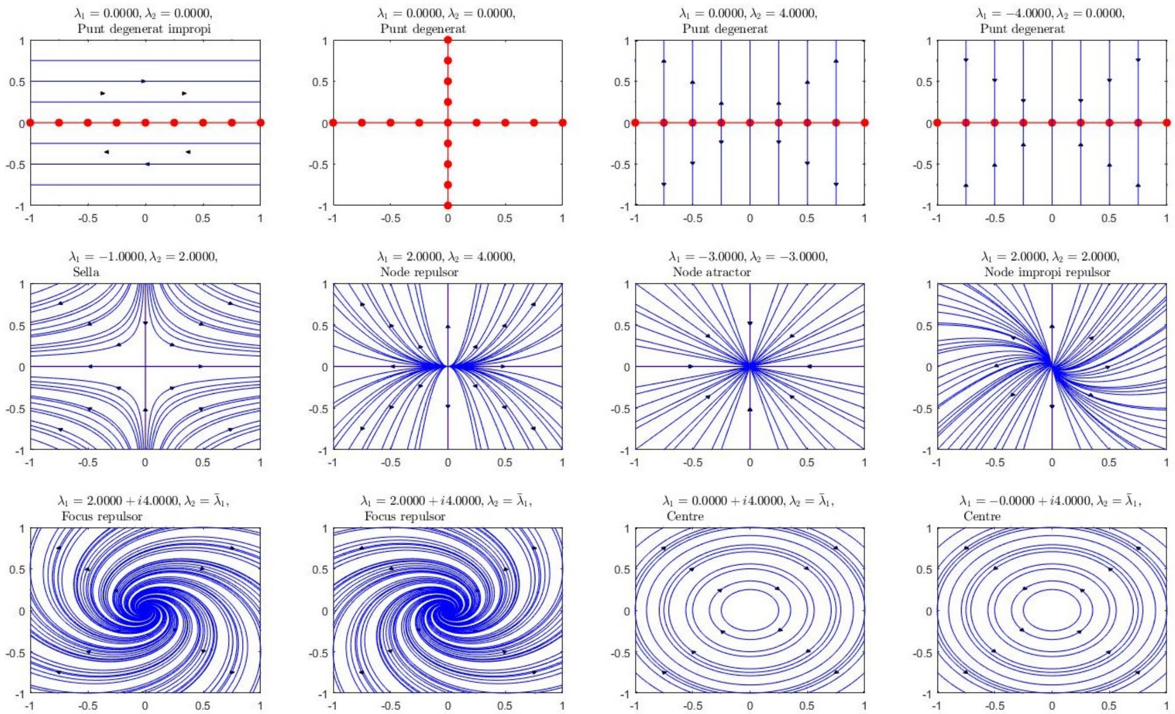
$\alpha < 0, \beta > 0$, focus atractor.



$\alpha < 0, \beta < 0$, focus atractor.

1.5.4 Retrats de fase

Tot resumint, posant també alguns casos degenerats ($\lambda_1 = 0$ o bé $\lambda_2 = 0$), tenim que els diferents comportaments dels sistemes lineals a coeficients constants al pla són:



1.5.5 Classificació de sistemes lineals homogenis al pla

Per acabar aquesta secció dedicada als sistemes al pla, donem una alternativa ràpida per saber de quin tipus de punt d'equilibri és l'origen només calculant la $\operatorname{tr} A$ i el $\det A$.

Proposició 1.36 *Sigui $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considerem el sistema $\dot{x} = Ax$. Anomenem*

$$D(A) = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A.$$

Llavors l'origen és un punt d'equilibri de tipus

i) *Sella si* $\det A < 0$.

ii) *Node si* $\det A > 0$ *i* $D(A) \geq 0$. *És atractor si* $\operatorname{tr} A < 0$ *i repulsor si* $\operatorname{tr} A > 0$. *A més, el node és impropi si* $D(A) = 0$ *i* $A \neq \lambda \operatorname{Id}$, *és a dir, A no diagonalitza.*

iii) *Centre si* $\operatorname{tr} A = 0$ *i* $\det A > 0$.

iv) *Focus si* $D(A) < 0$ *i* $\operatorname{tr} A \neq 0$. *A més és atractor si* $\operatorname{tr} A < 0$ *i repulsor si* $\operatorname{tr} A > 0$.

Demostració. Tal com hem vist a les seccions anteriors, l'origen és de tipus sella, node, centre o focus depenent dels valors propis λ_1, λ_2 de la matriu A:

i) Sella si $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

ii) Node si $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ i A no diagonalitza llavors tenim un node impropi. Si $\lambda_1 > 0$, diem que és un node repulsor i si no diem que és un node atractor.

iii) Centre si $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\beta$.

iv) Focus quan $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$, amb $\alpha \neq 0$. Quan $\alpha > 0$ diem que és un focus repulsor i quan $\alpha < 0$ diem que és un focus atractor.

És ben conegut que el polinomi característic de la matriu A és

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A$$

i per tant els valors propis de A són

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A}}{2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{D(A)}}{2}.$$

Ara la demostració és un exercici senzill. ■

Aquest tipus de resultats van bé sobretot quan es volen estudiar sistemes que depenen de paràmetres. Per exemple,

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x.$$

Calculem

$$\operatorname{tr} A = a + 3, \qquad \det A = 3a + 2, \qquad D(A) = (a+3)^2 - 4(3a+2) = a^2 - 6a + 1.$$

Observem que $D(A) = (a - a_-)(a - a+)$ amb $a_\pm = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Llavors, l'origen és de tipus

i) Sella quan $3a + 2 < 0$.

ii) Node quan $3a + 2 > 0$ i $D(A) = (a - a_-)(a - a+) \geq 0$. Com $2/3 \in (a_-, a_+)$, cal $a \in (2/3, a_-] \cup [a_+, +\infty)$. Impropi quan $a = a_\pm$. A més $\operatorname{tr} A = a + 3 > 0$ i per tant sempre serà repulsor.

iii) Podria ser un centre si $\operatorname{tr} A = a + 3 = 0$, és a dir, si $a = -3$. Però en aquest cas $\det A < 0$ i per tant no pot ser un centre.

iv) Pot ser un focus si $D(A) < 0$, és a dir quan $a \in (a_-, a_+)$. En aquest cas a més $\operatorname{tr} A = a + 3 > 0$ i per tant sempre serà repulsor.

1.6 Matrius fonamentals per equacions lineals homogènies

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar l'existència de matrius fonamentals per equacions lineals homogènies com l'equació (1.10):

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \mathcal{C}^r,\ r \geq 0. \tag{1.16}$$

Per fer-ho, de fet, veurem que el P.V.I.:

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.17}$$

té solució única definida a l'interval I per cada $t_0 \in I$ i per cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

L'eina més potent que farem servir en aquesta secció és el teorema del punt fix de Banach que passem a repassar a la secció següent.

1.6.1 Teorema del punt fix de Banach

La primera definició és la d'espai de Banach:

Definició 1.37 (Espai de Banach) *Un espai normat $(E, \|\cdot\|)$ diem que és de Banach si és complet, és a dir, si tota successió de Cauchy és convergent.*

Així tenim que:

1. $E = \mathbb{R}^n$ i les normes habituals:

   $$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

   i de fet moltes més, són de Banach.

2. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$, l'espai de les funcions contínues $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ amb la norma del suprem

   $$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)\|.$$

   és de Banach. Observeu que si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$, llavors $\|f\|_\infty < \infty$.

3. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ amb la norma amb pes

   $$\|f\|_\beta = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)\,\mathrm{e}^{\beta x}\|,$$

   essent $\beta \in \mathbb{R}$ també és de Banach.

4. De fet, si $w : [a, b] \to \mathbb{R}$, és contínua i $w(x) > 0$, llavors amb la norma

$$\|f\|_w = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)w(x)\|$$

l'espai $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ és també de Banach.

5. Ara bé, $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ (entenent que tenim derivades laterals a a i b) amb la norma del suprem no és de Banach. Però sí que ho és si considerem la norma

$$\|f\|^1_\infty = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)\| + \max_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|.$$

Exercici 1.38 *Demostreu les afirmacions anteriors*

Definició 1.39 (Punt fix) *Sigui $X \subset E$ amb E un espai mètric i $F : X \to X$. Diem que p és un punt fix de F si*

$$F(p) = p.$$

Diem que p és un atractor global si

$$\forall x \in X, \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(x) = p.$$

La última definició que necessitem és:

Definició 1.40 (Aplicació contractiva) *Sigui E un espai normat i $F : X \subset E \to X$. Diem que F és contractiva si existeix $L \in [0, 1)$ tal que*

$$\forall x, y, \in X, \qquad \|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

També diem que F és L-contractiva quan volem indicar la constant.

Ara ja estem en condicions d'enunciar i demostrar el teorema del punt fix de Banach.

Teorema 1.41 *Sigui $(E, \|\cdot\|)$ un espai de Banach, $X \subset E$ un subconjunt tancat de E i $F : X \to X$ una aplicació L-contractiva. Llavors existeix un únic punt fix $x_* \in X$ de F i satisfà:*

$$\|F^n(x) - x_*\| \leq \frac{L^n}{1 - L}\|F(x) - x\|.$$

Demostració. Demostrem primer la unicitat. Suposem que tenim dos punts fixos x_1, x_2 diferents. Llavors

$$\|x_1 - x_2\| = \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|$$

i per tant arribem a una contradicció.

Ara veiem l'existència. El primer que farem és veure que per a qualsevol punt $x \in X$ la successió

$$x_n = F^n(x), \qquad n \geq 0$$

és de Cauchy. Llavors, com que E és complet, la successió $\{x_n\}_n$ serà convergent. A més com que X és tancat aquest límit pertany a X. D'aquesta manera ja haurem vist l'existència d'un únic punt fix x_*.

Anem a veure doncs que la successió $\{x_n\}_n$ és de Cauchy si $x = x_0 \in X$. Observeu que trivialement:

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq L\|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq L^{k-1}\|x_1 - x_0\|.$$

Per tant, per $n \geq m$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\| \leq \sum_{j=m}^{n-1} L^j \|x_1 - x_0\| \\ &= L^m \frac{1 - L^{n-m}}{1 - L}\|x_1 - x_0\| \leq \frac{L^m}{1 - L}\|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Així és clar que la successió és de Cauchy i per tant convergent. Sigui

$$x_* = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Prenent $n \to \infty$ a la desigualtat (1.18), obtenim

$$\|x_* - x_m\| \leq \frac{L^m}{1 - L}\|x_1 - x_0\| \Longleftrightarrow \|x_* - F^m(x)\| \leq \frac{L^m}{1 - L}\|F(x) - x\|$$

ja que $x_0 = x$.

Per últim, com que F és contínua, de la igualtat $x_{n+1} = F(x_n)$ deduïm, prenent límits $n \to \infty$ a banda i banda, que $x_* = F(x_*)$. ■

1.6.2 Existència i unicitat de solucions per equacions lineals homogènies

Demostrarem que el P.V.I. (1.17) té solució. L'enunciat concret del resultat és el següent:

Teorema 1.42 *Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $A : I \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una funció $\mathcal{C}^r(I)$, $r \geq 0$. Llavors per tot $t_0 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de Cauchy*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

té solució única $x : I \to \mathbb{R}^n$, definida a tot I i $\mathcal{C}^{r+1}(I)$.

Demostració. Fixem $t_0 \in I$,$x_0 \in \mathbb{R}^n$, una norma $\|\cdot\|$ a $\mathbb{R}^n$ i un interval compacte $[a,b] \subset I$ tal que $t_\in I$.

1. **Reformulació del problema de Cauchy**. Una funció x és solució del problema de Cauchy $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$ si i només si

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\,ds. \tag{1.19}$$

   Demanem que x sigui contínua en $[a,b]$ perquè només busquem solucions $\mathcal{C}^1$.

2. **Espais de Banach**. L'espai de funcions en el que treballarem serà

$$E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n) = \{h : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \text{contínua}\}.$$

   És cómode considerar una norma amb pes. Concretament, per $\beta < 0$ (que determinarem després), definim la norma:

$$\|h\|_\beta = \max_{t\in[a,b]} \|h(t)e^{\beta|t-t_0|}\|.$$

   Ja havíem comentat que $(E, \|\cdot\|)$ és un espai de Banach.

3. **Reformulació del teorema com una equació de punt fix**. Aquest apartat és semblant al primer, però una mica més sofisticat. Definim el funcional:

$$\mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\,ds.$$

   És clar que l'equació (1.19) és equivalent a $x(t) = \mathcal{F}(x)(t)$. Per tant el que ens caldrà és veure que $\mathcal{F} : E \to E$ és una aplicació contractiva. En efecte, suposem que $\mathcal{F} : E \to E$ és una aplicació contractiva. Llavors pel teorema del punt fix, existeix una única solució $x \in E$ de l'equació de punt fix $x = \mathcal{F}(x)$. Així:

   (a) $x \in E$ vol dir que x és contínua a l'interval $[a,b]$ i per tant,

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\,ds$$

   és $\mathcal{C}^1$. Així $x = \mathcal{F}(x)$ és $\mathcal{C}^1$ i per inducció $\mathcal{C}^{r+1}$ ja que $A : [a,b] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ho és.

   (b) Clarament $x(t_0) = x_0$.

(c) Ens falta veure que x està definida a l'interval I inicial i és $\mathcal{C}^{r+1}$. Escrivim

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n], \qquad t_0 \in [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

Tenim que per cada $n \in \mathbb{N}$ existeix una única $x_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}^n$ solució $\mathcal{C}^{r+1}([a_n, b_n])$, del problema de Cauchy

$$x_n = \mathcal{F}(x_n), \qquad x_n(t_0) = x_0.$$

Definim la funció $x : I \to \mathbb{R}^n$ com

$$x(t) = x_n(t), \qquad \text{si } t \in [a_n, b_n].$$

Llavors

i. La funció $x : I \to \mathbb{R}^n$ està ben definida per unicitat de solucions, és a dir, $t \in [a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$, $x(t) = x_m(t) = x_n(t)$.
ii. x és $\mathcal{C}^{r+1}(I)$ perquè les funcions x_n ho són.
iii. x és solució de $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$.

Per tant només ens falta demostrar:

4. **El funcional $\mathcal{F}$ és contractiu a X.** És clar que $\mathcal{F} : E \to E$ està ben definit, és a dir:

$$x \in E \Longrightarrow \mathcal{F}(x) \in E.$$

Ara només cal provar que $\mathcal{F}$ és contractiva, i.e, per alguna $\beta \in \mathbb{R}$ (que de fet triarem $\beta < 0$) , existeix $L \in [0, 1)$ tal que $\forall x_1, x_2 \in E$

$$\|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)\|_\beta \leq L\|x_1 - x_2\|_\beta.$$

Sigui $t \in [a, b]$,

$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t) - \mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \leq \left| e^{\beta|t-t_0|} \int_{t_0}^{t} \|A(s)\big(x_1(s) - x_2(s)\big)\| \, ds. \right|$$

D'una banda, anomenant

$$K = \sup_{s\in[a,b]} \|A(s)\|,$$

tenim que

$$\|A(s)\big(x_1(s) - x_2(s)\big)\| \leq \sup_{s\in[a,b]} \|A(s)\|\|x_1(s) - x_2(s)\| \leq K\|x_1(s) - x_2(s)\|.$$

D'altra banda $\|x_1(s) - x_2(s)\| \leq e^{-\beta|s-t_0|}\|x_1 - x_2\|_\beta$. Per tant

$$\|A(s)\big(x_1(s) - x_2(s)\big)\| \leq Ke^{-\beta|s-t_0|}\|x_1 - x_2\|_\beta$$

i llavors tenim que

$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t) - \mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \leq K\|x_1 - x_2\|_\beta \left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|}e^{-\beta|s-t_0|}\, ds \right|. \quad (1.20)$$

Veiem que, si $\beta < 0$:

$$\left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|}e^{-\beta|s-t_0|}\, ds \right| \leq \frac{1}{|\beta|}. \quad (1.21)$$

En efecte, d'una banda, si $t \geq t_0$, llavors:

$$\begin{aligned}\left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|}e^{-\beta|s-t_0|}\, ds \right| &= \int_{t_0}^{t} e^{\beta(t-t_0)-\beta(s-t_0)}\, ds = \int_{t_0}^{t} e^{\beta(t-s)}\, ds = -\frac{1}{\beta}(1 - e^{\beta(t-t_0)}) \\ &\leq \frac{1}{|\beta|}.\end{aligned}$$

Si pel contrari $t \leq t_0$,

$$\begin{aligned}\left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|}e^{-\beta|s-t_0|}\, ds \right| &= \int_{t}^{t_0} e^{\beta(t_0-t)-\beta(t_0-s)}\, ds = \int_{t}^{t_0} e^{\beta(s-t)}\, ds = \frac{1}{\beta}(e^{\beta(t_0-t)} - 1) \\ &\leq \frac{1}{|\beta|}.\end{aligned}$$

En qualsevol cas, la fita (1.21) està demostrada. Llavors, utilitzant-la a (1.20):

$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t) - \mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \leq K\|x_1 - x_2\|_\beta \frac{1}{|\beta|}$$

i prenent el màxim sobre els $t \in [a, b]$:

$$\|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)\|_\beta \leq K\|x_1 - x_2\|_\beta \frac{1}{|\beta|}.$$

Agafem doncs β tal que $L := K/|\beta| < 1$ i concloem que $\mathcal{F}$ és L-contractiva en E.

■

1.6.3 Estructura de les solucions. Matrius fonamentals

Una forma de dir que els sistemes homogenis $\dot{x} = A(t)x$ tenen matrius fonamentals és la següent:

Proposició 1.43 *Considerem $\dot{x} = A(t)x$ amb $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i el conjunt*

$$\mathcal{X} = \{x : I \to \mathbb{R}^n, \ \ \textit{una solució de } \dot{x} = A(t)x\}$$

de totes les solucions.

Per cada $t_0 \in I$ definim l'aplicació:

$$\begin{aligned} \Gamma_{t_0} :& \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n \\ & x \longmapsto x(t_0) \end{aligned}$$

(és a dir, considerem la solució avaluada en t_0).

Llavors per cada $t_0 \in I$, Γ_{t_0} és un isomorfisme. Com a conseqüència

$$\dim \mathcal{X} = n$$

i si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$ i $t_0 \in I$, llavors

$$\{\varphi(t; t_0, v_1), \cdots, \varphi(t; t_0, v_n)\}$$

és una base de $\mathcal{X}$.

És clar doncs que

$$M(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi(t; t_0, v_1) & \cdots & \varphi(t; t_0, v_n) \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

és una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$.

Demostració. La demostració és en realitat molt senzilla. En efecte, pel principi de superposició (proposició 1.8) $\mathcal{X}$ és un espai vectorial. A més clarament Γ_{t_0} és una aplicació lineal. La injectivitat prové de la unicitat de les solucions. En efecte, si $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ tals que $\Gamma_{t_0}(x_1) = \Gamma_{t_0}(x_1)$, llavors $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ i per tant $x_1(t) = x_2(t)$, pel teorema 1.42. L'exhaustivitat també es dedueix del teorema 1.42, ja que per a qualsevol $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existeix $x \in \mathcal{X}$ tal que $x(t_0) = x_0$.

Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi(t; t_0, v_j) = \Gamma_{t_0}^{-1}(v_j),$$

i per tant $\{\varphi(t;t_0,v_1),\cdots,\varphi(t;t_0,v_n)\}$ és una base de $\mathcal{X}$. Amb això acabem la demostració. ■

La proposició 1.14 és per tant certa per a tots els sistemes lineals

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

ja que l'existència de matrius fonamentals està garantida. Concretament:

Proposició 1.44 *L'equació diferencial $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ té associat un flux, és a dir, una aplicació $\varphi : I \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\frac{d}{dt}\varphi(t;t_0,x_0) = A(t)\varphi(t;t_0,x_0) + b(t), \qquad \varphi(t_0;t_0,x_0) = x_0$$

i té la forma escrita a la proposició 1.14.

A més, per a cada $t_1, t_2, t_3 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(t_1;t_2,\varphi(t_2,t_3,x_0)) = \varphi(t_1,t_3,x_0).$$

A més $\phi_{t_1,t_2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida per $\phi_{t_1,t_2}(x_0) = \varphi(t_1;t_2,x_0)$ és bijectiva.

Demostració. Feu-la com exercici. ■

1.6.4 El Teorema de Liouville

El teorema de Liouville ens permetrà calcular l'evolució d'un volum al llarg de les solucions d'un sistema d'equacions lineals (no necessàriament homogènies).

La part més difícil de demostrar és el següent resultat:

Teorema 1.45 *Sigui $X(t)$ una solució matricial d'un sistema lineal homogeni $\dot{x} = A(t)x$ amb $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$.*

Llavors per a tot $t, t_0 \in I$,

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds.\right)$$

Demostració. Escrivim la solució matricial per fileres i per columnes, és a dir:

$$X(t) = \big((x_{ij}(t))\big)_{i,j} = \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \tilde{x}_1^t(t) & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \tilde{x}_n^t(t) & \cdots \end{pmatrix}.$$

i definim

$$d(t) = \det X(t) = \det(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)).$$

És clar que, per la multilinealitat del determinant

$$\dot{d}(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \dot{\tilde{x}}_i(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)).$$

Escrivim ara la igualtat $\dot{X} = A(t)X$ per fileres. És clar que les fileres de $A(t)X$ són

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = a_i^t(t)X(t), \qquad i = 1, \cdots, n,$$

essent $a_i^t(t)$, $i = 1, \cdots, r$ les fileres de la matriu $A(t)$. Més encara:

$$\dot{\tilde{x}}_i = a_i^t(t)X(t) = (a_i^t(t)x_1(t), \cdots, a_i^t(t)x_n(t))$$

i per tant

$$\det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \dot{\tilde{x}}_i(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & a_i^t(t)x_1(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & a_i^t(t)x_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Com que $a_i^t(t)x_j(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}(t)$,

$$\begin{aligned}\det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \dot{\tilde{x}}_i(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)) = & \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{k1}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kn}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ =& a_{ii}(t) \det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \tilde{x}_i(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)) \\ =& a_{ii}(t)d(t).\end{aligned}$$

Així tenim que

$$\dot{d}(t) = \big(\operatorname{tr} A(t)\big)d(t),$$

que completa la prova de la proposició 1.3. ■

Com a corol.lari

Corol·lari 1.46 *Sigui $X(t)$ una solució matricial d'un sistema lineal homogeni $\dot{x} = A(t)x$ amb $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$.*

Llavors

$$\exists t_0 \in I, \ \ \det X(t_0) = 0, \iff \forall t \in I, \ \ \det X(t) = 0.$$

Enunciem i demostrem el teorema de Liouville sobre l'evolució del volum d'un conjunt per un flux lineal. Denotarem per $\mathrm{vol}(V)$ el volum d'un conjunt V.

Teorema 1.47 *Sigui $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b : I \subset T \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$. Considerem el sistema lineal*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t).$$

Sigui $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt. Per tot $t, t_0 \in I$ definim

$$V_{t,t_0} = \{\varphi(t; t_0, x_0),\ x_0 \in V\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Llavors

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = \mathrm{vol}(V) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right).$$

En particular si A és una matriu constant:

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = \mathrm{vol}(V)\, \mathrm{e}^{(t-t_0)\,\mathrm{tr}\, A}.$$

Demostració. És clar que

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = \int_{V_{t,t_0}} 1\, dy.$$

La proposició 1.44 ens assegura que el canvi de variable:

$$y = \varphi(t; t_0, x_0)$$

està ben definit. Llavors:

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = \int_V |\det D_{x_0}\varphi(t; t_0, x)|\, dx.$$

Sigui $M(t)$ la matriu fonamental del sistema homogeni $\dot{x} = A(t)x$ tal que $M(t_0) = \mathrm{Id}$. Llavors, per la proposició 1.44 (o aplicant la proposició 1.14):

$$D_{x_0}\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)$$

i per tant, aplicant el teorema 1.45

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = |\det M(t)| \int_V 1\, dx = \mathrm{vol}(V) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right).$$

■

1.7 Equacions lineals amb coeficents periòdics

Considerem equacions

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{1.22}$$

amb $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$ i

$$A(t+T) = A(t), \qquad b(t+T) = b(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

essent $T > 0$.

El resultat principal que diferencia les equacions lineals amb coeficients periòdics de la resta d'equacions lineals és:

Proposició 1.48 *Si $x(t)$ és una solució de (1.22) amb A, b T-periòdiques. Llavors $\hat{x}(t) := x(t+T)$ és també solució.*

Demostració. Només cal derivar $\hat{x}$ i tenir en compte que A, b són T-periòdiques:

$$\dot{\hat{x}} = \dot{x}(t+T) = A(t+T)x(t+T) + b(t+T) = A(t)\hat{x}(t) + b(t).$$

■

A partir d'aquest resultat deduïm que:

Corol·lari 1.49 *Si $M(t)$ és una matriu fonamental de $x' = A(t)x$ amb A T-periòdica, llavors*

$$M(t+T) = M(t)C_M, \qquad C_M \in \mathcal{M}_{n\times n},$$

essent C_M una matriu constant, que depèn de M. De fet

$$C_M = M(T)[M(0)]^{-1}.$$

A més, si M i $\widehat{M}$ són dues matrius de monodromia, C_M i $C_{\widehat{M}}$ són similars, és a dir,

$$C_M = PC_{\widehat{M}}P^{-1}, \qquad P \text{ matriu invertible constant.}$$

Demostració. És clar que, per la proposició 1.48, si $M(t)$ és una matriu fonamental també ho serà $\widetilde{M}(t) := M(t+T)$ i ja sabem que dues matrius fonamentals estan relacionades per una matriu constant (veieu el corol·lari 1.13). Per tant l'existència de C_M constant està garantida i la fórmula $C_M = M(T)[M(0)]^{-1}$ és conseqüència directa de la definició.

D'altra banda, siguin $C_{\widehat{M}}, C_M$ matrius de monodromia associades a matrius fonamentals $M, \widehat{M}$. Com que $\hat{M}(t) = M(t)P$ on P és matriu constant invertible,

$$M(t+t)P = \widehat{M}(t+T) = \widehat{M}(t)C_{\widehat{M}} = M(t)PC_{\hat{M}} \Longrightarrow M(t+t) = M(t)PC_{\widehat{M}}P^{-1}$$

i per tant $C_M = PC_{\widehat{M}}P^{-1}$. ■

Així la següent definició té sentit:

Definició 1.50 *Sigui $\dot{x} = A(t)x$ un sistema lineal T- peridìc. Definim els multiplicadors característics com els valors propis de qualsevol matriu de monodromia.*

1.7.1 Teoria de Floquet

Aquesta teoria ens descriu com són les matrius fonamentals dels sistemes lineals periòdics i a més ens prova que, mitjançant un canvi de variables adequat (tot i que sovint desconegut) podem escriure aquestes equacions com equacions lineals a coeficients constants. El resultat més important és el següent:

Teorema 1.51 *Sigui $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$, T-periòdica. Tota matriu fonamental, $M(t)$, del sistema lineal $\dot{x} = A(t)x$ es pot escriure:*

$$M(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{Bt}, \qquad P(t+T) = P(t),\ \ B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}),\ \textit{tal que}\ \mathrm{e}^{BT} = C_M.$$

Per demostrar-ho necessitem primer un lema tècnic:

Lema 1.52 *Sigui $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ amb $\det C \neq 0$. Llavors existeix una matriu $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $\mathrm{e}^B = C$.*

De fet si $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu real, la matriu B serà (en general) complexa.

Demostració. Observem primer que només cal calcular B en el cas que C tingui la forma d'un bloc de Jordan. En efecte, primer notem que si tenim una matriu J en forma de Jordan amb blocs $J_1, \cdots, J_r$ i sabem calcular B_i tals que $J_i = e^{B_i}$, llavors

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_r \end{pmatrix}$$

satisfà $\mathrm{e}^{\widetilde{B}} = J$. Llavors

$$C = PJP^{-1} = P\,\mathrm{e}^{\widetilde{B}}\,P^{-1} = \mathrm{e}^{P\widetilde{B}P^{-1}}$$

i per tant $B = P\widetilde{B}P^{-1}$ resol el problema.

Per tant fem el cas $C = \lambda\,\mathrm{Id}$ o bé $C = \lambda\,\mathrm{Id} + N$ amb N matriu nilpotent $N^n = 0$.

Clarament, si $C = \lambda\,\mathrm{Id}$, agafant $B = [\log\lambda]\,\mathrm{Id}$ tenim que $C = \mathrm{e}^B$ i en aquest cas ja estem. Si $C = \lambda\,\mathrm{Id} + N$, ens inspirem en el fet que

$$\log(\lambda + x) = \log\lambda + \log\left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k\geq 1} (-1)^k \frac{x^k}{k\lambda^k}$$

per definir

$$B = [\log \lambda] \operatorname{Id} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k\lambda^k} N^k$$

aprofitant el fet que $N^n = 0$.

Com que la igualtat $\lambda + x = e^{\log(\lambda+x)}$ també se satisfà amb les sèries, ja sabem que:

$$\lambda + x = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \left(\log \lambda + \sum_{l\geq 1} (-1)^j \frac{x^j}{j\lambda^j} \right) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$$

i per tant, com que $\lambda \operatorname{Id}$ i N conmuten:

$$\mathrm{e}^B = \sum_{k\geq 0} a_k N^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k N^k = \lambda \operatorname{Id} + N.$$

■

Final de la prova del teorema 1.51. Sigui $M(t)$ una matriu fonamental. Pel lema anterior, existeix B tal que $\mathrm{e}^{BT} = C_M$ amb C_M la matriu de monodromia. Llavors, $P(t) := M(t)\,\mathrm{e}^{-Bt}$ satisfà:

$$P(t+T) = M(t+T)\,\mathrm{e}^{-B(t+T)} = M(t) C_M\,\mathrm{e}^{-BT}\,\mathrm{e}^{-Bt} = M(t)\,\mathrm{e}^{-Bt} = P(t).$$

■

Com a corol·lari d'aquest resultat, podem reduir un sistema lineal a coeficients periòdics a un a coeficients constants:

Corol·lari 1.53 *Sigui $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$, T-periòdica. Llavors $x(t)$ és solució de $\dot{x} = A(t)x$ si i només si $y(t) = [P(t)]^{-1}x(t)$ és solució de $\dot{y} = By$.*

A més, si $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, llavors $\dot{y} = By + [P(t)]^{-1}b(t)$.

Demostració. Sigui $M(t)$ una matriu fonamental del sistema $\dot{x} = A(t)x$. $x(t)$ és solució de $\dot{x}$ si i només si existeix un vector constant $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x(t) = M(t)c = P(t)\,\mathrm{e}^{Bt}\,c.$$

Com $x(t) = P(t)y(t)$, tenim que $y(t) = \mathrm{e}^{Bt}\,c$ que és, trivialment, solució de $\dot{y} = By$. L'argument a la inversa també és vàlid.

Finalment, si $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, llavors les solucions són de la forma

$$x(t) = M(t)\left[c + \int [M(s)]^{-1} b(s)\,ds\right] = P(t)\,\mathrm{e}^{Bt}\left[c + \int \mathrm{e}^{-Bs}[P(s)]^{-1}b(s)\,ds\right].$$

Per tant
$$y(t) = [P(t)]^{-1}x(t) = \mathrm{e}^{Bt}\left[c + \int \mathrm{e}^{-Bs}[P(s)]^{-1}b(s)\,ds\right]$$
és solució de $\dot{y} = By + [P(t)]^{-1}b(t)$. $\blacksquare$

Definició 1.54 *Sigui $\dot{x} = A(t)x$ un sistema lineal i $M(t)$ una matriu fonamental. Definim els exponents característics com els valors propis de qualsevol matriu B satisfent $\mathrm{e}^{BT} = C_M$.*

Observació 1.55 *Noteu que els exponents caracterísitics estan definits excepte múltiples sencers de $\frac{2\pi i}{T}$. En efecte, si B satisfà $\mathrm{e}^{BT} = C_M$, llavors*
$$\mathrm{e}^{\left(B+\frac{2\pi ik}{T}\,\mathrm{Id}\right)T} = C_M, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant si λ_j és un multiplicador característic, $\lambda_j = \mathrm{e}^{T\mu_j}$ amb $\mu_j = \frac{1}{T}(\log\lambda_j + 2\pi ik)$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

Per acabar, enunciem un resultat, conseqüència del Teorema de Liouville:

Proposició 1.56 *Sigui $\dot{x} = A(t)x$ un sistema lineal T-periòdic continu. Siguin $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ els multiplicadors característics. Llavors*
$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = exp\left(\int_0^T \mathrm{tr}\,A(s)\,ds\right).$$

Demostració. Sigui $M(t)$ la matriu fonamental tal que $M(0) = \mathrm{Id}$. Llavors:
$$C_M = M(T).$$

Per la fórmula de Liouville
$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det C_M = \det M(T) = \exp\left(\int_0^T \mathrm{tr}\,A(s)\,ds\right).$$

$\blacksquare$

1.8 Estabilitat de sistemes lineals. Cas constant i periódic

Considerem un sistema lineal homogeni

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A(t+T) = A(t), \text{ o bé } A \text{ constant.}$$

Està clar que

- Les solucions estan definides $\forall t \in \mathbb{R}$. Per tant té sentit preguntar-se per

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = ?$$

- Està clar que $x \equiv 0$ és solució del sistema lineal.

Podem dir alguna cosa sobre el comportament qualitatiu quan $t \to \pm\infty$ de *totes* les solucions? A vegades:

Definició 1.57 *Diem que el sistema $\dot{x} = A(t)x$ amb $A(t+T) = A(t)$ o constant és*

- ***Repulsor**. Quan totes les solucions excepte la solució trivial ($x \equiv 0$) satisfà*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty.$$

- ***Atractor** (o assimptòticament estable). Si totes les solucions satisfan*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0.$$

- ***Estable**. Si totes les solucions estan acotades per a tot $t \in \mathbb{R}$.*

- ***Inestable**. Si existeix una solució $x(t)$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty.$$

Observació 1.58 *Observeu que si existeix alguna solució $x(t) = c \in \mathbb{R}^n$ constant no nul·la, llavors el sistema no pot ser ni atractor ni repulsor.*

És important destacar que, els vectors propis de matrius senyalades, juguen un paper important a l'hora de trobar solucions. En concret tenim que:

Proposició 1.59 *Considerem*

1. *$\dot{x} = Ax$, amb A una matriu constant. Sigui v un vector propi de valor propi λ. Llavors*
$$x(t) = \varphi(t; 0, v) = \mathrm{e}^{tA} v = \mathrm{e}^{\lambda t} v$$

2. *$\dot{x} = A(t)x$, amb $A(t+T) = A(t)$ una matriu periòdica. Sigui v un vector propi de valor propi λ d'una matriu de monodromia C_M associada a una matriu fonamental $M(t)$. Llavors $x(t) = M(t)v$ satisfà*
$$x(t+T) = \lambda x(t).$$
En particular, una solució de $\dot{x} = A(t)x$ és T-periòdica si i només si $x(t) = \varphi(t; t_0, v)$ amb v un vector propi de valor propi 1 d'una matriu de monodromia.

Demostració. El primer ítem és immediat. Anem a veure el segon. Fixem $M(t)$ una matriu fonamental i considerem C_M la seva matriu de monodromia. Llavors

$$x(t+T) = M(t+T)v = M(t)C_M v = \lambda M(t)v.$$

És clar que si una matriu de monodromia té el valor propi 1, llavors $x(t) = M(t)v$ és periòdica si v és vector propi de valor propi 1. L'altra implicació també s veritat ja que, si una solució $x(t)$ és periòdica, d'una banda tenim que $x(t) = M(t)c$ amb $c \in \mathbb{R}^n$ un vector constant, a més, com $x(t+T) = x(t)$:

$$M(t+T)c = M(t)c \Longleftrightarrow M(t)C_M c = M(t)c \Longleftrightarrow C_M c = c.$$

Per tant C_M té el valor propi 1. A la darrera implicació hem utilitzat que $M(t)$ és invertible. ■

1.8.1 Criteris d'estabilitat

Ara anem a donar les condicions necessàries per classificar l'estabilitat dels sistemes a coeficients constants i periòdics. Primer per això veurem un lema tècnic.

Lema 1.60 *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriu tal que tots els valors propis d'A tenen part real negativa, és a dir:*

$$\mathrm{Spec}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}.$$

Llavors, existeixen $K, \mu > 0$ tal que

$$\|\, \mathrm{e}^{tA} \,\| \leq K\, \mathrm{e}^{-\mu t}, \qquad t \geq 0.$$

Demostració. La prova és molt calculística. Primer recordeu que en un espai vectorial de dimensió finita totes les normes són equivalents, és a dir: donades dues normes $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ qualsevols, existeixen constants K_1, K_2 tals que

$$K_1\|\cdot\| \le \|\cdot\|' \le K_2\|\cdot\|.$$

Per tant, és suficient comprovar el resultat per una norma determinada. Triem la norma infinit:

$$A = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad A = \left(a_{ij}\right)_{i,j}.$$

A més, com $A = PJP^{-1}$ amb J en forma de Jordan:

$$\| \mathrm{e}^{tA} \| = \| \mathrm{e}^{tPJP^{-}} \| = \|P \,\mathrm{e}^{tJ} P^{-1}\| \le \|P\|\|P^{-1}\| \,\mathrm{e}^{tJ} \|.$$

Finalment, recordeu que, si $J = \operatorname{diag}(J_1, \cdots, J_r)$, llavors

$$\mathrm{e}^{tJ} = \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{tJ_1}, \cdots, \mathrm{e}^{tJ_r}\right)$$

i per tant

$$\| \mathrm{e}^{tJ} \|_\infty = \max_{i=1,\cdots,r} \| \mathrm{e}^{tJ_i} \|_\infty.$$

Així només cal estudiar la norma $\| \mathrm{e}^{tJ_i} \|_\infty$ amb J_i un bloc de Jordan. En el cas $J_i = \lambda_i \operatorname{Id}$, tenim que

$$\| \mathrm{e}^{tJ_i} \|_\infty = \| \mathrm{e}^{\lambda_i t} \operatorname{Id} \|_\infty \le \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\,. \tag{1.23}$$

En el cas $J_i = \lambda_i \operatorname{Id} + N$, recordeu que

$$\mathrm{e}^{J_i t} = \mathrm{e}^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant

$$\| \mathrm{e}^{J_i} \|_\infty = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i t} \left(1 + |t| + \frac{|t|^2}{2!} + \cdots + \frac{|t|^{r_i}}{r_i!}\right)$$

essent r_i la dimensió de J_i. Llavors, agafant

$$\mu > \max_{i=1,\cdots,n} -\operatorname{Re}\lambda_i \Longleftrightarrow \mu < \min_{i=1,\cdots,n} |\operatorname{Re}\lambda_i|$$

és clar que existeix una constant $K > 0$ tal que

$$\| e^{J_i} \|_\infty \leq K e^{-\mu t}, \qquad t \geq 0.$$

Juntant aquesta cota amb (1.23) obtenim el resultat. ■

Ara ja sí donem el criteri d'estabilitat per sistemes lineals a coeficients constants i com a corol·lari, el criteri corresponent per sistemes lineals a coeficients periòdics.

Proposició 1.61 *Sigui* $\dot{x} = Ax$ *amb* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Llavors*

1. *Si existeix un valor propi* λ *d'A tal que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *o* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *amb caixa de Jordan* $\lambda \operatorname{Id} + N$ *(no semi simple), és inestable.*
2. *Si* $\forall\lambda \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *és atractor.*
3. *Si* $\forall\lambda \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, *és repulsor.*
4. *Si* $\forall\lambda \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ *i quan* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *la capsa de Jordan és* $\lambda \operatorname{Id}$ *(semi simple), estable.*

Demostració. Anem a veure cada implicació.

1. Si existeix un valor propi λ amb part real positiva, sigui v el seu vector propi associat. Llavors $x(t) = e^{\lambda t} v$ és solució de $\dot{x} = Ax$ i

   $$\|x(t)\| = e^{\operatorname{Re}\lambda t} \|v\| \to \infty, \qquad \text{si } t \to \infty.$$

   Suposem ara que $\operatorname{Re}\lambda = 0$ i la capsa de Jordan associada és $\lambda \operatorname{Id} + N$. Siguin v_1, v_2 els vectors tals que

   $$Av_1 = \lambda v_1, \qquad Av_2 = \lambda v_2 + v_1.$$

   Llavors
   $$e^{At} v_2 = e^{\lambda t}(v_2 + t v_1)$$
   i per tant
   $$\| e^{At} v_2\| = \|v_2 + t v_1\| \to \infty, \qquad \text{si } t \to \infty.$$

2. En aquest cas, pel lema 1.60

   $$\| e^{tA} \| \leq K e^{-\mu t} \to 0 \qquad , \text{si } t \to \infty$$

   i per tant el resultat és clar.

3. Qualsevol solució $x(t) = \mathrm{e}^{tA} c$ amb $c \in \mathbb{R}^n$ constant. Per tant, com $c = \mathrm{e}^{-tA} x(t)$ i $-A$ té tots els valors amb part real estrictament negativa, utilitzant el lema 1.60:

$$\|c\| \leq \|\,\mathrm{e}^{-tA} x(t)\| \leq K\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,\|x(t)\| \Longleftrightarrow \|c\|\,\mathrm{e}^{\mu t} \leq K\|x(t)\|.$$

Per tant, si $c \neq 0$ (és a dir si x no és la solució idènticament nul·la) $\|x(t)\| \to \infty$ quan $t \to \infty$.

4. Ens cal veure que totes les solucions estan acotades o equivalentment que $\|\,\mathrm{e}^{tA}\,\|$ està acotada. Clarament, és equivalent a veure que $\|\,\mathrm{e}^{tJ}\,\|$ està acotada, essent J la matriu de Jordan associada a A. Sigui $J = \operatorname{diag}(J_1, \cdots, J_r)$ i $\mathrm{e}^{tJ} = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{tJ_1}, \cdots, \mathrm{e}^{tJ_r})$. Si el bloc de Jordan està associat a un valor propi λ_i amb $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, apliquem el lema 1.60 i tenim

$$\|\,\mathrm{e}^{tJ_i}\,\| \leq K_i\,\mathrm{e}^{-\mu_i t}, \qquad K_i, \mu_i > 0.$$

En cas contrari, el bloc de Jordan és $J_i = \lambda_i \operatorname{Id}$ amb $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$. En aquest cas

$$\|\,\mathrm{e}^{tJ_i}\,\| = \|\,\mathrm{e}^{t\lambda_i}\,\| = 1.$$

En qualsevol dels casos $\|\,\mathrm{e}^{tJ_i}\,\|$ està acotada i per tant també ho està $\|\,\mathrm{e}^{tJ}\,\|$.

$\blacksquare$

No ho farem però es pot veure la implicació contrària també. És a dir, la condició que hem donat sobre els valors propis és una condició necessària.

Exercici 1.62 *Demostreu el comentari anterior (no és fàcil).*

Per acabar, el criteri per sistemes lineals amb coeficients periòdics.

Corol·lari 1.63 *Sigui $\dot{x} = A(t)x$ amb $A(t+T) = A(t)$. Llavors*

1. *Si existeix un multiplicador caracterìstic λ tal que $|\lambda| > 1$ o $|\lambda| = 1$ amb caixa de Jordan (per la matriu de monodromia C_M) $\lambda \operatorname{Id} + N$ (no semi simple), és inestable.*

2. *Si $\forall\lambda$ multiplicador característic, $|\lambda| < 1$, és atractor.*

3. *Si $\forall\lambda$ mutiplicador caracterísitic, $|\lambda| > 1$, és repulsor.*

4. *Si $\forall\lambda$ mutiplicador caracterísitic $|\lambda| \leq 1$ i quan $|\lambda| = 1$ la capsa de Jordan (per la matriu de monodromia C_M) és $\lambda \operatorname{Id}$ (semi simple), és estable.*

Demostració. Només cal fer notar que si B és tal que $C_M = \mathrm{e}^{TB}$ amb C_M matriu de monodromia, llavors $x(t) = P(t)y(t)$ és solució de $\dot{x} = A(t)x$ si i només si $\dot{y} = By$ (veieu corol·lari 1.53). Com els valors propis de C_M (λ_i) i els de B (μ_i) estan relacionats per

$$\lambda_i = \mathrm{e}^{\mu_i T},$$

tenim que $|\lambda_i| < 1$ si i només si $\mathrm{Re}\,\mu_i < 0$ i $|\lambda_i| = 1$ si i només si $\mathrm{Re}\,\mu_i = 0$. Per tant el resultat és conseqüència directa de la proposició anterior i del fet que $x(t) = P(t)y(t)$ amb $P(t)$ T-periòdica. ■

1.8.2 Estabilitat d'equacions de segon ordre

Una especial atenció per les equacions

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \qquad a(t+T) = a(t),\ a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Les més famoses equacions d'aquest estil són l'equació de Mathiew: $a(t) = a + \varepsilon \cos(2t)$ amb $\varepsilon << 1$ i l'equació de Hill amb $a(t) = a + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \cos(2\theta_i t)$ amb $\varepsilon << 1$ i $\theta_1, \cdots, \theta_n$ fixats. Aquestes equacions sorgiren en estudiar el sistema Terra-LLuna.

Escrivim l'equació de segon grau com un sistema lineal a coeficients periòdics:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} y := A(t)y, \qquad y = (x, \dot{x}). \tag{1.24}$$

Proposició 1.64 *Considereu el sistema* (1.24) *i sigui* C_M *una matriu de monodromia. Anomenem* $\alpha = \frac{\mathrm{tr}\, C_M}{2}$.

1. *Si* $|\alpha| < 1$, *el sistema és estable no atractor.*
2. *Si* $|\alpha| > 1$, *el sistema és inestable.*
3. *Si* $|\alpha| = 1$ *i* C_M *diagonalitza, el sistema és estable.*
4. *Si* $|\alpha| = 1$ *i* C_M *no diagonalitza, el sistema és inestable.*
5. *Si* $\alpha = 1$, *tenim com a mínim una òrbita periòdica de període* T.
6. *Si* $\alpha = -1$, *tenim com a mínim una òrbita periòdica de període* $2T$.

Demostració. Recordeu que per la fòrmula de Liouville:

$$\det M(T) = \det M(0) \exp\left(\int_0^T \mathrm{tr}\, A(s)\, ds \right) = \det M(0)$$

si $M(t)$ és una matriu fonamental de $\dot{y} = A(t)y$. Així agafant

$$C_M = M(T)[M(0)]^{-1},$$

matriu de monodromia, tenim que $\det C_M = 1$. Per tant si λ_1, λ_2 són els multiplicadors característics

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Anomenem

$$\alpha = \frac{\operatorname{tr} C_M}{2} \in \mathbb{R}.$$

Llavors el polinomi característic de C_M és

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 \Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Ara anem a distingir els cassos:

1. Si $|\alpha| < 1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ són complexos conjugats, per tant com

$$1 = \lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2.$$

   Com C_M diagonalitza, el corol·lari 1.63 ens assegura que és estable i clarament no atractor.

2. Si $|\alpha| > 1$, els valors propis són reals. Com el seu producte és 1, ha d'haver-hi un valor propi de mòdul més gran estricte que 1. Per tant inestable.

3. Si $|\alpha| = 1$ (que és equivalent a $\alpha = \pm 1$) i C_M diagonalitza, llavors $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, valor propi doble. Llavors, utilitzant altre cop el corol·lari 1.63 tenim que és estable.

4. Si $\alpha = \pm 1$ i C_M no diagonalitza, el sistema és inestable.

5. Si $\alpha = 1$, per la proposició 1.59, el sistema té una òrbita periòdica (ja que C_M té el valor propi 1).

6. Si $\alpha = -1$, C_M té el valor propi -1. Llavors per la proposició 1.59, si v és un vector propi, $x(t) = M(t)v$ satisfà:

$$x(t+T) = -x(t) \Longrightarrow x(t+2T) = -x(t+T) = x(t).$$

■

2 Teoria de Pertorbacions per a sistemes lineals

Aquesta teoria (que de fet es pot generalitzar a equacions diferencials més generals) ens permet trobar solucions de sistemes lineals que depenen d'un paràmetre petit, ε, com a pertorbacions de les solucions del sistema per $\varepsilon = 0$.

2.1 Context i hipòtesis

Considerem un sistema lineal no homogeni

$$\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + b(t,\varepsilon) \tag{2.1}$$

essent $A : I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i $b : I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\begin{aligned} A(t,\varepsilon) &= A_0(t) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon^r A_r(t) + \varepsilon^r \tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon), \\ b(t,\varepsilon) &= b_0(t) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon^r b_r(t) + \varepsilon^r \tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Per simplificar suposarem que I és un obert. A més les hipòtesis sobre les funcions que assumirem són:

H1 Per $i = 1, \cdots, r$, assumim que A_i, b_i, $i = 1, r$ pertanyen a $\mathcal{C}^m(I)$.

H2 Assumim que, fixat $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, les funcions $\tilde{A}_{r+1}(\cdot, \varepsilon)$ i $\tilde{b}_{r+1}(\cdot, \varepsilon)$ també pertanyen a $\mathcal{C}^m(I)$.

H3 Els residus $\tilde{A}_{r+1}$ i $\tilde{b}_{r+1}$ són $o(\varepsilon)$ uniformement sobre compactes de I. És a dir, fixat $J \subset I$ interval compacte i fixat $\eta > 0$, existeix $\varepsilon_* > 0$ (que depèn de J i η) tal que

$$\max_{t\in J,\, |\varepsilon|\le\varepsilon_*} \|\tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon)\| \le \eta, \qquad \max_{t\in J,\, |\varepsilon|\le\varepsilon_*} \|\tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon)\| \le \eta.$$

2.1.1 Un apunt sobre diferenciabilitat

Noteu que com que $I \subset \mathbb{R}$ és un obert i A, b són funcions $\mathcal{C}^k$ a $I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, llavors, fixat $t \in I$, pel teorema de Taylor tenim que per a tot $r \le k$:

$$b(t,\varepsilon) = b(t,0) + \varepsilon \partial_\varepsilon b(t,\varepsilon)|_{\varepsilon=0} + \sum_{i=2}^{r} \varepsilon^i \frac{1}{i!} \partial_\varepsilon^i\, b(t,\varepsilon)|_{\varepsilon=0} + R_{r+1}(t,\varepsilon)$$

amb $R_{r+1}(t,\varepsilon) = o(\varepsilon^r)$.

A més, les funcions $\partial_\varepsilon^i b(t,\varepsilon)_{|\varepsilon=0}$ són $\mathcal{C}^{k-i}(I)$ per $i = 1, \cdots, r$. Per tant totes aquestes funcions són (com a mínim) $\mathcal{C}^{k-r}(I)$.

Respecte al residu $R_{r+1}(t,\varepsilon)$ tenim que

$$R_{r+1}(t,\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \left[\partial_\varepsilon^r b(t,u) - \partial_\varepsilon^r b(t,0)\right] \frac{(\varepsilon-u)^{r-1}}{(r-1)!}\, du.$$

Clarament la funció $\left[\partial_\varepsilon^r b(t,u) - \partial_\varepsilon^r b(t,0)\right]$ és contínua i per tant quan la considerem definida sobre un compacte és uniformement contínua (teorema de Heine). Així, fixats $J \subset I$ un interval compacte i $\eta > 0$, existeix un ε_* tal que

$$\|\partial_\varepsilon^r b(t,u) - \partial_\varepsilon^r b(t,0)\| \leq \eta, \qquad \forall (t,\varepsilon) \in J \times [-\varepsilon_*, \varepsilon_*].$$

Per tant, si $t \in J$ i $|\varepsilon| \leq \varepsilon_*$:

$$\|R_{r+1}(t,\varepsilon)\| \leq \eta \int_0^\varepsilon \frac{(\varepsilon-u)^{r-1}}{(r-1)|}\, du \leq \frac{1}{r!}\eta\varepsilon^r$$

i $R_{r+1}(t,\varepsilon)/\varepsilon^r$ satisfà H3. A més, per definició, $R_{r+1}(\cdot,\varepsilon)$ és $\mathcal{C}^{k-r}(I)$.

Per les funcions matricials $A_0, \cdots, A_r$ i A_{r+1} raonem de la mateixa manera.

Concloem que si A, b són funcions $\mathcal{C}^k$ a $I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, llavors se satisfan les hipòtesis H1, H2, H3, però perdem diferenciabilitat respecte t ja que només podem garantir diferenciabilitat $\mathcal{C}^{k-r}(I)$.

2.2 Resultat amb demostració constructiva

Provarem el resultat descrit a la següent proposició, la demostració del qual dóna el procediment per calcular les diferents aproximacions de la solució.

Proposició 2.1 *Considerem un sistema lineal de la forma*

$$\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + b(t,\varepsilon) \tag{2.3}$$

essent $A : I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *i* $b : I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *de la forma* (2.2)*. Assumin les hipòtesi H1, H2, H3 de la secció anterior.*

Llavors, per a tot $t^0 \in I$ *i per a tot* $x^0 \in \mathbb{R}^n$*, la solució* $x(t,\varepsilon)$ *del sistema* (2.3) *amb condicions inicials* $x(t^0,\varepsilon) = x^0$ *és de la forma*

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \sum_{i=1}^r \varepsilon^i x_i(t) + \varepsilon^r \tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon) \tag{2.4}$$

amb $x_0(t^0) = x^0$*,* $x_1(t^0) = \cdots = x_r(t^0) = 0$*,* $\tilde{x}_{r+1}(t^0,\varepsilon) = 0$ *i satisfent:*

T1 *Per* $i = 1, \cdots, r$, x_i, $i = 1, r$ *pertanyen a* $\mathcal{C}^{m+1}(I)$.

T2 *Fixat* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, *la funció* $\tilde{x}_{r+1}(\cdot, \varepsilon)$ *també pertany a* $\mathcal{C}^{m+1}(I)$.

T3 *El residu* $\tilde{x}_{r+1}$*és* $o(\varepsilon)$ *uniformement sobre compactes de* I. *És a dir, fixat* $J \subset I$ *interval compacte i fixat* $\eta > 0$, *existeix* $\varepsilon_* > 0$ *(que depèn de* J *i* η*) tal que*

$$\max_{t \in J, \, |\varepsilon| \leq \varepsilon_*} \|\tilde{x}_{r+1}(t, \varepsilon)\| \leq \eta.$$

Observació 2.2 *És a dir, les propietats assumides a les hipòtesis H1, H2, H3, es mantenen per les solucions.*

Demostració. La primera cosa que notem és que la forma (2.4) no ens diu molt si no se satisfan T1, T2 i T3. Així que és clar que, si no busquem bé els primers termes $x_0, x_1, \cdots, x_r$ de la solució, no podrem concloure res.

Fixem $t^0 \in I$ i $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Sembla raonable plantejar el sistema (2.3) per ordres $O(\varepsilon^j)$, és a dir, igualar als dos costats del sistema els termes del mateix ordre en ε. Per això notem que

$$\left(\sum_{i=0}^{r} \varepsilon^i A_i(t) \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k x_k(t) \right) = \sum_{j=0}^{2r} \varepsilon^j \left(\sum_{k=0}^{j} A_{j-k} x_k \right),$$

on aquí denotem $A_l = 0$, $b_l = 0$ per $l \geq r+1$. Llavors

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{r} \varepsilon^j \dot{x}_j + \varepsilon^r \dot{\tilde{x}}_{r+1}(t, \varepsilon) = & \sum_{j=0}^{2r} \varepsilon^j \left(\sum_{k=0}^{j} A_{j-k} x_k \right) + \sum_{j=0}^{r} \varepsilon^j b_j \\ & + \varepsilon^r A(t, \varepsilon) \tilde{x}_{r+1}(t, \varepsilon) \\ & + \varepsilon^r \tilde{A}_{r+1}(t, \varepsilon) \sum_{j=0}^{r} \varepsilon^j x_j + \varepsilon^r \tilde{b}_{r+1}(t, \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Imposem ara que els ordres $O(1), O(\varepsilon), \cdots, O(\varepsilon^r)$ coincideixin als dos costats de la igualtat (2.5). Per exemple per $O(1), O(\varepsilon), O(\varepsilon^2)$ tenim que:

$$\begin{aligned} \dot{x_0} &= A_0 x_0 + b_0 \\ \dot{x_1} &= \sum_{k=0}^{1} A_{1-k} x_k + b_1 = A_0 x_1 + \left[A_1 x_0 + b_1 \right] \\ \dot{x_2} &= \sum_{k=0}^{2} A_{2-k} x_k + b_2 = A_0 x_2 + \left[A_2 x_0 + A_1 x_1 + b_2 \right] \end{aligned}$$

i més generalment, per $j = 0, \cdots, r$:

$$\dot{x}_j = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k} x_k + b_j = A_0 x_j + \left[\sum_{k=0}^{j-1} A_{j-k} x_k + b_j \right]. \tag{2.6}$$

El punt clau és que, si resolem les equacions per $x_0, x_1, \cdots, x_r$ en ordre, són equacions lineals no homogènies amb la mateixa matriu A_0. En efecte, si suposem conegudes $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}$, llavors l'únic terme en l'equació per x_j (equació (2.6)) que involucra x_j és $A_0 x_j$, la resta només depèn de $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}$ i per tant és conegut.

Així és clar que, si denotem per $M_0(t)$ la matriu fonamental de $\dot{x} = A_0(t)x$ satisfent $M_0(t^0) = \mathrm{Id}$:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= M_0(t) \left[x^0 + \int_{t^0}^{t} [M_0(s)]^{-1} b_0(s)\, ds \right] \\ x_j(t) &= M_0(t) \int_{t^0}^{t} [M_0(s)]^{-1} \left[\sum_{k=0}^{j-1} A_{j-k}(s) x_k(s) + b_j(s) \right] ds, \end{aligned}$$

amb $j = 1, \cdots, r$. Per tant les $x_0, x_1, \cdots, x_r$ satisfan T1.

Tornem a mirar l'equació (2.5). Els termes que ens falta anular ens donen l'equació que $\tilde{x}_{r+1}$ ha de satisfer:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{r+1}(t, \varepsilon) = & \sum_{j=r+1}^{2r} \varepsilon^{j-r} \left(\sum_{k=0}^{j} A_{j-k} x_k \right) \\ & + A(t, \varepsilon) \tilde{x}_{r+1}(t, \varepsilon) \\ & + \tilde{A}_{r+1}(t, \varepsilon) \sum_{j=0}^{r} \varepsilon^j x_j + \tilde{b}_{r+1}(t, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.7}$$

De moment, és clar que $\tilde{x}_{r+1}$ satisfà T2 per la teoria general de solucions de sistemes lineals.

Recordem que $A(t, \varepsilon)$ té la forma donada en (2.2). Definim $\bar{A}(t, \varepsilon)$ per la igualtat $A(t, \varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon \bar{A}(t, \varepsilon)$, és a dir:

$$\bar{A}(t, \varepsilon) = A_1(t) + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{i-1} A_i(t),$$

i reescrivim l'equació (2.7) com

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_{r+1}(t,\varepsilon) =& A_0\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)+\varepsilon\bar{A}(t,\varepsilon)\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\\ &+\sum_{j=r+1}^{2r}\varepsilon^{j-r}\left(\sum_{k=0}^{j}A_{j-k}x_k\right)\\ &+\tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon)\sum_{j=0}^{r}\varepsilon^j x_j+\tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Si $\tilde{x}_{r+1}$ és solució de (2.8) amb $\tilde{x}_{r+1}(t^0,\varepsilon)=0$, cal que:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon) =& M_0(t)\int_{t^0}^{t}[M_0(s)]^{-1}\varepsilon\bar{A}(t,\varepsilon)\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\,ds\\ &+M_0(t)\int_{t^0}^{t}[M_0(s)]^{-1}\sum_{j=r+1}^{2r}\varepsilon^{j-r}\left(\sum_{k=0}^{j}A_{j-k}(s)x_k(s)\right)ds\\ &+M_0(t)\int_{t^0}^{t}[M_0(s)]^{-1}\left[\tilde{A}_{r+1}(s,\varepsilon)\sum_{j=0}^{r}\varepsilon^j x_j(s)+\tilde{b}_{r+1}(s,\varepsilon)\right]ds.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Anem a comprovar T3. És suficient considerar un compacte J que contingui t^0 perquè si no el podem ampliar fins que contingui t^0 i tot el que és cert per aquesta ampliació també serà cert pel compacte inicial. Fixem doncs J i una quantitat positiva $\eta>0$. Sigui ε_* tal que H3 és certa, és a dir:

$$\max_{t\in J,\,|\varepsilon|\le\varepsilon_*}\|\tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon)\|\le\eta, \qquad \max_{t\in J,\,|\varepsilon|\le\varepsilon_*}\|\tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon)\|\le\eta. \tag{2.10}$$

Denotem per

$$\|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty=\max_{t\in J,\,|\varepsilon|\le\varepsilon_*}\|\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\|.$$

Fixem $t,t^0\in J$ i $|\varepsilon|\le\varepsilon_*$. Com que $J\times[-\varepsilon_*,\varepsilon_*]$ és un compacte, totes les funcions involucrades en (2.9) estaran fitades. Fent servir també les desigualtats a (2.10), és clar doncs que existeix una constant C tal que

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\| \leq & |\varepsilon| \|M_0(t)\| \left| \int_{t^0}^{t} \|[M_0(s)]^{-1}\| \|\bar{A}(t,\varepsilon)\| \|\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\| \, ds \right| \\
& + |\varepsilon| \|M_0(t)\| \left| \int_{t^0}^{t} \|[M_0(s)]^{-1}\| \sum_{j=r+1}^{2r} |\varepsilon|^{j-r-1} \left(\sum_{k=0}^{j} \|A_{j-k}(s)\| \|x_k(s)\| \right) ds \right| \\
& + \|M_0(t)\| \left| \int_{t^0}^{t} \|[M_0(s)]^{-1}\| \left[\|\tilde{A}_{r+1}(s,\varepsilon)\| \sum_{j=0}^{r} |\varepsilon|^j \|x_j(s)\| \right] ds \right| \\
& + \|M_0(t)\| \left| \int_{t^0}^{t} \|[M_0(s)]^{-1}\| \|\tilde{b}_{r+1}(s,\varepsilon)\| \, ds \right| \\
\leq & C\varepsilon_* \|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty + C\varepsilon_* + C\eta.
\end{aligned}
$$

Com que la darrera fita és independent de t i ε, tenim que

$$\|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty \leq C\varepsilon_* \|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty + C\varepsilon_* + C\eta.$$

Per tant, agafant ε_* més petit per tal que (per exemple) $\varepsilon_* \leq \eta$ i $1 - C\varepsilon_* > 1/2$,

$$\|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty \leq C \frac{\varepsilon_* + \eta}{1 - C\varepsilon_*} \leq 4C\eta$$

i el resultat està demostrat. ■

3 Existència, unicitat i prolongació de solucions

Sigui $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció que suposarem com a mínim contínua. De fet, aquesta hipòtesi es pot relaxar a contínua a trossos. Considerem l'equació diferencial ordinària (edo) en forma normal

$$\dot{x} = f(t,x). \tag{3.1}$$

Definició 3.1 *Diem que $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ és una solució de l'edo* (3.1) *si*

1. $(t, x(t)) \in U$.
2. *x és derivable en I. Si la nostra funció f només és contínua a trossos, només cal demanar que sigui derivable en I excepte en un nombre finit de punts.*

3. $x'(t) = f(t, x(t))$ on x sigui derivable.

El nostre propòsit és estudiar les solucions de les edos en el cas més general possible.

La primera qüestió que resoldrem és sobre l'existència i unicitat de solucions de l'anomenat problema de Cauchy:

Definició 3.2 *[El problema de Cauchy]. Sigui $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Siguin $(t_0, x_0) \in U$, ens preguntem si el problema:*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

té solució. Si en té, és única?.

Observeu en els següents exemples que, així com quan tractavem equacions diferencials lineals, sempre teníem existència i unicitat de solucions, en el cas general no és sempre així.

Ex1 $x' = x^2$, $x(0) = 0$, té una única solució $x \equiv 0$.

Ex2 $x' = x^{1/2}$, $x(0) = 0$, té solucions $x_1 \equiv 0$ i $x_2(t) = t^2/4$

Ex3 $x' = -t/x$, $x(0) = 0$ no té solució ja que totes les corbes solució són

$$x^2 + t^2 = c, \qquad c \in \mathbb{R}, \text{ constant.}$$

Ex4 $x' = x^{1/3}$, $x(0) = 0$, té solucions $x_1 \equiv 0$, $x_2(t) = (t/3)^3$, però també

$$x_3(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t}{3}\right)^3 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Per garantir la resolució única del problema de Cauchy, està clar que caldrà demanar alguna cosa més que ser contínua a la funció que defineix l'equació diferencial. De fet, a la secció 3.3 demostrarem un resultat sobre la existència i unicitat de solucions del problema de Cauchy i a la secció 3.2, un altre resultat sobre existència (sota condicions més febles).

L'altre questió que tractarem serà fins on podem prolongar les solucions? Quin és l'interval màxim de definició?. Aquest resultat l'enunciarem a la secció 3.3.

3.1 El Teorema de Picard

Aquest és el resultat més conegut sobre existència i unicitat de solucions d'una edo. Dona a més alguna informació quantitativa sobre l'interval de definició d'aquestes solucions.

Teorema 3.3 (Teorema de Picard) *Sigui $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció contínua. Fixem $(t_0, x_0) \in U$, una norma $\|\cdot\|$ a $\mathbb{R}^n$ i definim $a, b > 0$ constants tals que $\Omega := I_a \times B_b \subset U$ essent*

$$I_a = [t_0 - a, t_0 + a], \qquad B_b = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Siguin

$$M = \sup_{(t,x)\in\Omega} \|f(t,x)\|, \qquad \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Suposem que f és Lipschitz respecte x a Ω, és a dir, existeix una constant $L > 0$ tal que:

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \Omega, \qquad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Llavors:

1. *El problema de Cauchy*

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

   té una única solució x.

2. *La funció x està definida a l'interval $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

3. *$x(t) \in B_b$ per a tot $t \in I_\alpha$.*

Observació 3.4 *Abans de començar la demostració d'aquest teorema, alguns comentaris.*

El primer és que α és el nombre òptim perquè se satisfacin les conclusions del teorema, ja que si fixem $\Omega = [-a, a] \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$ i considerem $x' = M$, $x \in \mathbb{R}$, tenim que per a que les solucions $x(t) = Mt$ pertanyin a $[-b, b]$ per $t \in [-\alpha, \alpha]$, cal $\alpha = M/b$.

El segon comentari és de caràcter més pràctic. Noteu que el teorema es pot aplicar si $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és contínua, $D_x f(t, x)$ existeix i és contínua per a tot $(t, x) \in U$. En efecte. Fixem $(t_0, x_0) \in U$ i un $\Omega = I_a \times B_b \subset U$. Només cal comprovar que f és Lipschitz respecte a la segona variable en Ω. Definim les constants

$$M_1 = \sup_{(t,x)\in\Omega} \|f(t,x)\|, \qquad M_2 = \sup_{(t,x)\in\Omega} \|D_x f(t,x)\|$$

les quals són obviament finites ja que Ω és un compacte i $f, D_x f$ són contínues. Llavors, pel teorema del valor mig en varies variables, si $x_1, x_2 \in \Omega$,

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq \sup_{x \in \overline{x_1\, x_2}} \|D_x f(x)\| \|x_1 - x_2\| \leq M_2 \|x_1 - x_2\|,$$

amb $\overline{x_1\, x_2}$ el segment entre x_1 i x_2.

Així f és Lipschitz respecte a la segona variable a Ω i per tant satisfà les hipòtesis del Teorema de Picard.

Demostració. Fixem $t_0, x_0 \in U$, una norma $\|\cdot\|$ a $\mathbb{R}^n$ i considerem les constants a, b, α, M, L satisfent les hipòtesis i definicions de l'enunciat.

El teorema es demostra mitjançant el teorema del punt fix de Banach.

1. **Reformulació del problema de Cauchy**. Una funció x és solució del problema de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ si i només si

   (a) x és contínua en algun interval $I \subset \mathbb{R}$ que conté t_0,

   (b) $(t, x(t)) \in U$ per a tot $t \in I$,

   (c) x satisfà l'equació integral

   $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

   La demostració d'aquesta equivalència és òbvia.

2. **Espais de Banach**. L'espai de funcions en què treballarem serà

   $$E = \mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{R}^n) = \{h : I_\alpha \to \mathbb{R}^n, \text{ contínua}\}.$$

   És còmode considerar una norma amb pes. Concretament, per $\beta < 0$ (que determinarem després), definim la norma:

   $$\|h\|_\beta = \max_{t \in I_\alpha} \|h(t) e^{\beta|t-t_0|}\|.$$

   És un exercici senzill veure que $(E, \|\cdot\|)$ és un espai de Banach.

   Considerem el subconjunt d'E:

   $$X = \{h \in E : \|h(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall t \in I_\alpha\}.$$

Afirmem que X és un subconjunt tancat de l'espai E. En efecte, si $\{h_k\}_k \subset X$ és una successió convergent a h, llavors per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un k_0 tal que $\forall k \geq k_0$,

$$\|h_k - h\|_\beta \leq \varepsilon \Leftrightarrow \max_{t\in I_\alpha} \|(h_k(t) - h(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \max_{t\in I_\alpha} \|h_k(t) - h(t)\| \leq \varepsilon e^{|\beta\alpha|}.$$

Per tant $h_k \to h$ també amb la norma del suprem. En particular, com que per tot $k \in \mathbb{N}$ i $t \in I_\alpha$, $\|h_k(t) - x_0\| \leq b$, prenent el límit $k \to \infty$ deduïm que $\|h(t) - x_0\| \leq b$ per a tot $t \in I_\alpha$ i per tant $h \in X$.

Notem que, com X és un conjunt tancat d'un espai de Banach, el teorema del punt fix es pot aplicar sobre funcionals definits només sobre aquest conjunt tancat.

3. **Reformulació del teorema com una equació de punt fix**. Aquest apartat és semblant al primer però una mica més sofisticat. En efecte, el que farem serà veure que, si som capaços de demostrar que un funcional definit sobre X és una aplicació contractiva, llavors totes les conclusions del Teorema de Picard són certes.

   Definim el funcional:

$$\mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

   Suposem que $\mathcal{F} : X \to X$ és una aplicació contractiva. Llavors pel teorema del punt fix, existeix una única solució $x \in X$ de l'equació de punt fix $x = \mathcal{F}(x)$. Així:

   (a) $x \in X$, vol dir que és contínua i per tant,

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

   és $\mathcal{C}^1$. Això implica que $x = \mathcal{F}(x)$ és $\mathcal{C}^1$.

   (b) $x(t_0) = x_0$.

   (c) x està definida a l'interval I_α i $\|x(t) - x_0\| \leq b$ per definició del subconjunt X.

4. **El funcional $\mathcal{F}$ és contractiu a X**. La primera propietat que cal comprovar és que $\mathcal{F} : X \to X$, és a dir:

$$x \in X \Longrightarrow \mathcal{F}(x) \in X.$$

   En efecte, sigui $x \in X$. Llavors:

(a) Si $t \in I_\alpha \subset I_a$, per a tot $s \in [t_0, t] \subset I_\alpha \subset I_a$, $x(s) \in B_b$ i per tant, la funció f està ben definida a $(s, x(s)) \in \Omega \subset U$.

(b) A més $\mathcal{F}(x)$ és contínua a I_α. Per tant $\mathcal{F}(x) \in E$.

(c) Per últim, per a tot $t \in I_\alpha$,

$$\|\mathcal{F}(x)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\| \, ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b,$$

per definició de α.

En conclusió $\mathcal{F}(x) \in X$.

L'última propietat que hem de comprovar és que existeix $K \in [0, 1)$ tal que per a qualssevol $x_1, x_2 \in X$

$$\|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)\|_\beta \leq K\|x_1 - x_2\|_\beta,$$

per alguna $\beta < 0$ adequada. En efecte, sigui $t \in I_\alpha$, és clar que:

$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t) - \mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \leq \left| e^{\beta|t-t_0|} \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\| \, ds. \right|$$

D'una banda, com f és Lipschitz respecte la segona variable, tenim que

$$\|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\| \leq L\|x_1(s) - x_2(s)\|.$$

D'altre banda $\|x_1(s) - x_2(s)\| \leq e^{-\beta|s-t_0|}\|x_1 - x_2\|_\beta$. Per tant

$$\|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\| \leq Le^{-\beta|s-t_0|}\|x_1 - x_2\|_\beta$$

i llavors tenim que

$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t) - \mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \leq L\|x_1 - x_2\|_\beta \left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|}e^{-\beta|s-t_0|} \, ds \right|.$$

Anem a estudiar aquesta darrera integral, tenint en compte que agafarem $\beta < 0$. D'una banda, si $t \geq t_0$, llavors:

$$\begin{aligned}\left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|}e^{-\beta|s-t_0|} \, ds \right| &= \int_{t_0}^{t} e^{\beta(t-t_0)-\beta(s-t_0)} \, ds = \int_{t_0}^{t} e^{\beta(t-s)} \, ds = -\frac{1}{\beta}(1 - e^{\beta(t-t_0)}) \\ &\leq \frac{1}{|\beta|}.\end{aligned}$$

Si pel contrari $t \leq t_0$,

$$\left|\int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|}e^{-\beta|s-t_0|}\,ds\right| = \int_{t}^{t_0} e^{\beta(t_0-t)-\beta(t_0-s)}\,ds = \int_{t}^{t_0} e^{\beta(s-t)}\,ds = \frac{1}{\beta}(e^{\beta(t_0-t)}-1)$$
$$\leq \frac{1}{|\beta|}.$$

Així tenim que

$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t)-\mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \leq L\|x_1-x_2\|_\beta \frac{1}{|\beta|}$$

i com la fita (a la dreta de la desigualtat) no depèn de t,

$$\|\mathcal{F}(x_1)-\mathcal{F}(x_2)\|_\beta \leq \frac{L}{|\beta|}\|x_1-x_2\|_\beta.$$

Per tant, agafant β tal que $K := L/|\beta| < 1$, concloem que $\mathcal{F}$ és contractiva a X i el resultat està demostrat.

■

3.2 Teorema de Peano

El teorema de Peano ens assegura que, si la funció f és contínua, es pot garantir la existència de solucions del problema de Cauchy, però tal com hem vist als exemples E2, E4, no es pot garantir la unicitat.

Per demostrar-lo necessitarem dos resultats clau de l'anàlisi funcional, el teorema d'Ascolí-Arzelà i el teorema de Weierstrass d'aproximació de funcions contínues per polinomis. Recordem aquests resultats.

Teorema 3.5 *[Ascolí-Arzelà]. Sigui $K \subset \mathbb{R}^k$ un compacte i considerem el conjunt de les funcions contínues en aquest compacte amb recorregut a $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}(K,\mathbb{R}^m)$. Sigui $\Sigma \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R}^n)$ una família tal que:*

1. *Σ és equicontínua en K, és a dir, fixat $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que*

$$z_1, z_2 \in K,\ \|z_1-z_2\| \leq \delta \Longrightarrow \|\psi(z_1)-\psi(z_2)\| \leq \varepsilon, \qquad \forall\psi \in \Sigma.$$

2. *Σ satisfà:*

$$\forall x \in K, \ \text{ el conjunt } \{\psi(x),\, \psi \in \Sigma\} \subset \mathbb{R}^m \text{ és fitat.}$$

Llavors, per a qualsevol successió $\{\psi_n\}_n \subset \Sigma$, hi ha una parcial uniformement convergent, és a dir, convergent amb la norma:

$$\|\psi\|_\infty = \max_{z\in K} \|\psi(z)\|.$$

Teorema 3.6 *[Weierstrass] Sigui $K \subset \mathbb{R}^k$ un compacte i $g : K \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Llavors, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un polinomi $p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\|p - g\|_\infty = \max_{z\in K} \|p(z) - g(z)\| \leq \varepsilon.$$

Corol·lari 3.7 *Sigui $K \subset \mathbb{R}^k$ un compacte i $g : K \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ una funció de vàries components contínua. Llavors:*

1. *Existeix $\{p_l\}_l$ successió de vectors de polinomis $p_l : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{l\to\infty} p_l = g$ uniformement en K, és a dir:*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists l_0,\ \text{tal que}\ \ \forall l \geq l_0,\ \|p_l - g\|_\infty = \max_{z\in K} \|p_l(z) - g(z)\| \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

2. *Existeix $\{q_l\}_l$ successió de vectors de polinomis $q_l : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ tal que $\|q_l\|_\infty = \|g\|_\infty$ i $\lim_{l\to\infty} q_l = g$ uniformement en K, és a dir, per a tot $l \geq 0$,*

$$\max_{z\in K} \|q_l(z)\| = \max_{z\in K} \|g(z)\|$$

   i la propietat (3.2) és certa substituint p_l per q_l.

Demostració. El primer ítem és evident pel Teorema 3.6. Per a demostrar el segon, sigui $\{p_l\}_l$ una successió de polinomis satisfent la primera propietat. Escollim

$$q_l(z) = \frac{\|g\|_\infty}{\|p_l\|_\infty} p_l(z), \qquad \text{essent } \|p_l\|_\infty = \max_{z\in K} \|p_l(z)\|,\ \|g\|_\infty = \max_{z\in K} \|g(z)\|.$$

És clar que si $g(z) \neq 0$ per algun $z \in K$, $p_l(z) \neq 0$ també si $l \geq l_0$ és suficientment gran, per tant podem redefinir la successió $\{p_l\}$ com $\{p_{l+l_0}\}$ i ja tenim que $\|p_l\|_\infty \neq 0$. Clarament, si $g \equiv 0$, podem agafar $q_l \equiv 0$ i ja estem.

Observem que $\|q_l\|_\infty = \|g\|_\infty$. A més, fent servir la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} \|q_l - g\|_\infty &= \left\| \frac{\|g\|_\infty}{\|p_l\|_\infty} p_l - g \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\|g\|_\infty}{\|p_l\|_\infty} p_l - p_l \right\|_\infty + \|p_l - g\|_\infty \\ &= \|p_l\|_\infty \left| \frac{\|g\|_\infty}{\|p_l\|_\infty} - 1 \right| + \|p_l - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Llavors, com

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\|g\|_\infty}{\|p_l\|_\infty} = 1, \qquad \lim_{l\to\infty} \|p_l - g\|_\infty = 0$$

concloem que $\lim_{l\to\infty} \|q_l - g\|_\infty = 0$. ■

Amb tots aquests resultats ja podem demostrar el resultat principal d'aquesta secció:

Teorema 3.8 (Teorema de Peano) *Sigui $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció contínua. Fixem $(t_0, x_0) \in U$, una norma $\|\cdot\|$ a $\mathbb{R}^n$ i definim $a, b > 0$ constants tals que $\Omega := I_a \times B_b \subset U$ essent*

$$I_a = [t_0 - a, t_0 + a], \qquad B_b = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Siguin

$$M = \sup_{(t,x)\in\Omega} \|f(t,x)\|, \qquad \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Llavors:

1. *El problema de Cauchy*

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

   té una solució x (no és necessàriament la única).

2. *La funció x està definida a l'interval $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

3. *$x(t) \in B_b$ per tot $t \in I_\alpha$.*

Demostració. Siguin $t_0, x_0 \in U$ i una norma $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$, fixem les constants a, b, α, M i el compacte Ω del teorema. Definim per a qualsevol funció $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ la norma

$$\|h\|_\infty = \max_{(t,x)\in\Omega} \|h(t,x)\|.$$

La demostració d'aquest resultat es fa per passos que detallem a continuació:

1. **Teorema de Weirstrass**. Pel Corol·lari 3.7 del Teorema de Weirstrass, tenim una successió de polinomis $p_l : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que p_l tendeix a f quan $l \to \infty$, uniformement sobre Ω i $\|p_l\|_\infty = \|f\|_\infty$.

2. **Teorema de Picard**. Considerem els problemes de Cauchy

$$x' = p_l(t, x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ara aplicarem el Teorema de Picard a cadascun d'aquests problemes, però primer discutim sobre les constants que surten. D'una banda, com que els polinomis estan definits a tot $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, és clar que les constants $a, b > 0$ escollides per f, les podem fer servir també per cada p_l. D'altra banda, les constants M_l i α_l corresponents són:

$$M_l = \sup_{(t,x)\in\Omega} \|p_l(t, x)\| = \sup_{(t,x)\in\Omega} \|f(t, x)\| = M,$$
$$\alpha_l = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \alpha$$

Llavors, pel Teorema de Picard

$$\exists x_l : I_\alpha \to B_b, \qquad x_l'(t) = p_l(t, x_l(t)),\ x_l(t_0) = x_0.$$

A més, sabem que

$$x_l(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} p_l(s, x_l(s))\, ds. \tag{3.3}$$

3. **Teorema d'Ascolí-Arzelà**. Veurem que la família $\Sigma = \{x_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ satisfà les hipòtesis del teorema d'Ascolí-Arzelà. En efecte, d'una banda, si fixem un $t \in I_\alpha$,

$$\forall x_l \in \Sigma, \quad \|x_l(t) - x_0\| \leq b \Longrightarrow \{x_l(t) \,:\, x_l \in \Sigma\} \subset B_b$$

i per tant el conjunt $\{x_l(t) \,:\, x_l \in \Sigma\}$ està fitat.

D'altra banda, veiem que Σ és equicontínua. En efecte, notem que, com que x_l satisfà (3.3), tenim que

$$\|x_l(t) - x_l(\tau)\| \leq \left|\int_{\tau}^{t} p_l(s, x_l(s)) ds\right| \leq M|t - \tau|.$$

Fixem ara $\varepsilon > 0$ i agafem $\delta = \varepsilon/M$. Aleshores, se satisfà la condició de ser equicontínua:

$$|t - \tau| \leq \delta \Longrightarrow \|x_l(t) - x_l(\tau)\| \leq \varepsilon.$$

Aplicant el Teorema d'Ascolí-Arzelà tenim que existeix una parcial $\{x_{l_m}\}_m$ convergent uniformement a I_α. Definim

$$x = \lim_{m\to\infty} x_{l_m}.$$

4. **La solució com a límit uniforme**. Sabem que qualsevol solució del problema de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, ha de satisfer l'equació de punt fix

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

És clar que aplicant (3.3) a x_{l_m}:

$$x_{l_m}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} p_{l_m}(s, x_{l_m}(s))\, ds.$$

Per tant, si demostrem que la funció (de s) definida per $p_m(s, x_{l_m}(s))$ convergeix uniformement a $f(s, x(s))$ ja estarem. Anem a veure-ho. Si fixem $s \in I_\alpha$ qualsevol, és clar que:

$$\begin{aligned} \|p_{l_m}(s, x_{l_m}(s)) - f(s, x(s))\| \leq & \|p_{l_m}(s, x_{l_m}(s)) - f(s, x_{l_m}(s))\| \\ & + \|f(s, x_{l_m}(s)) - f(s, x(s))\|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Fixem $\varepsilon > 0$, com que $p_{l_m} \to f$ uniformement a I_α quan $m \to \infty$, existeix un $m_0 > 0$ que no depèn de s tal que

$$\forall m \geq m_0, \qquad \|p_{l_m}(s, x_{l_m}(s)) - f(s, x_{l_m}(s))\| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall s \in I_\alpha. \tag{3.5}$$

Com que f és contínua, existeix $\delta > 0$, independent de s tal que

$$\|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow \|f(s,x) - f(s,y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com que $x_{l_m} \to x$ uniformement a I_α quan $m \to \infty$, existeix un $m_1 > 0$ que no depèn de s tal que

$$\forall m \geq m_1, \qquad \|x_{l_m}(s) - x(s)\| \leq \delta,\ \forall s \in I_\alpha.$$

Així

$$\forall m \geq m_1, \qquad \|f(s, x_{l_m}(s)) - f(s, x(s))\| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall s \in I_\alpha \tag{3.6}$$

i per tant, agafant $m_2 = \max\{m_0, m_1\}$ i utilitzant (3.5) i (3.6) a (3.4) obtenim

$$\forall m \geq m_2, \qquad \|p_{l_m}(s, x_{l_m}(s)) - f(s, x(s))\| \leq \varepsilon.$$

■

3.3 Solucions Maximals

En aquesta secció demostrarem dos resultats. El primer que existeix un interval obert (no necessàriament finit) maximal on les solucions estan definides "com a molt". El segon ens dóna una caracterització d'aquest mateix interval. Considerem primer l'exemple

$$x' = -x^2, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Tenim que si $x_0 \neq 0$,

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{1}{u^2} du = t - t_0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t - t_0 \Longleftrightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}.$$

A més quan $x_0 = 0$, tot i que en principi el procediment no era vàlid, a posteriori, quadra. Així observem que l'interval I on $x(t)$ depèn de t_0, x_0

$$I = \begin{cases} \left(-\infty, t_0 - \dfrac{1}{x_0}\right) & \text{si } x_0 < 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } x_0 = 0 \\ \left(t_0 - \dfrac{1}{x_0}, \infty\right) & \text{si } x_0 > 0. \end{cases}$$

Proposició 3.9 *Sigui $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció contínua. Suposem que $\forall (t_0, x_0)$ el problema de Cauchy*

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3.7}$$

té solució única (per exemple si f satisfà les hipòtesis del teorema de Picard).

Llavors $\forall (t_0, x_0) \in U$, existeix una única solució $\varphi(t, t_0, x_0)$ definida a un interval obert $I(t_0, x_0)$ tal que

1. *$\varphi(t, t_0, x_0) \in U$ per a tot $t \in I(t_0, x_0)$.*
2. *$\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ és $\mathcal{C}^1$ a $I(t_0, x_0)$.*
3. *Tota solució $x : J \to \mathbb{R}^n$ del problema (3.7) satisfà:*

$$J \subset I(t_0, x_0), \qquad i \qquad x = \varphi(\cdot, t_0, x_0)|_J\,.$$

Anomenem interval maximal de definició a l'interval obert $I(t_0, x_0)$ i solució maximal a la solució $\varphi(\cdot, t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$.

Demostració. La prova és en realitat molt senzilla i es basa en l'existència i unicitat de solucions. Considerem el conjunt S de totes les solucions del problema (3.7) (això no és cap contradicció amb la unicitat!):

$$S = \{x : I_x \to \mathbb{R}^n \ : \ x \text{ és solució de (3.7)},\ I_x \text{ obert}\}.$$

Definim $I(t_0, x_0)$ i $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ com:

$$I(t_0, x_0) = \bigcup_{x \in S} I_x, \qquad \varphi(t, t_0, x_0) = x(t), \text{ si } t \in I_x. \tag{3.8}$$

És clar que $I(t_0, x_0)$ és un obert.

Veiem primer que $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ està ben definida. És a dir, si $t \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$ amb x_1, x_2 solucions de (3.7), llavors $x_1(t) = x_2(t)$. Per cada dues solucions x_1, x_2, definim el conjunt

$$C = \{t \in I_{x_1} \cap I_{x_2} \ : \ x_1(t) = x_2(t)\}.$$

Com que $I_{x_1} \cap I_{x_2}$ és connex, si veiem que C és no buit, obert i tancat de $I_{x_1} \cap I_{x_2}$, llavors $C = I_{x_1} \cap I_{x_2}$ i per tant $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ està ben definida:

1. $C = \big(x_1 - x_2\big)^{-1}(\{0\})$, per tant és un tancat.
2. $C \neq \emptyset$ perquè $t_0 \in C$.
3. Per a tot $t_* \in C \subset I_{x_1} \cap I_{x_2}$, denotem per $x_* = x_1(t_*) = x_2(t_*)$. El problema de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_*) = x_*$ té una única solució $x_* : I_{x_*} \to \mathbb{R}^n$ amb I_{x_*} obert. Llavors per a tot $t \in I_{x_*} \cap \big(I_{x_1} \cap I_{x_2}\big)$, $x_1(t) = x_2(t)$. Per tant $I_{x_*} \cap \big(I_{x_1} \cap I_{x_2}\big) \subset C$ que implica que C és obert.

Així $C = I_x x_1 \cap I_{x_2}$ i per tant la funció $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ està ben definida.

A més, com f és una funció contínua, una solució $x : I_x \to \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{C}^1$ a I_x i per tant $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ és també $\mathcal{C}^1$ al seu domini de definició.

Només fa falta discutir un detall. Si l'interval de definició d'una solució x^0 de (3.7) és un interval no obert, per exemple $J^0 = (a, b]$. Llavors aquesta solució no entra dintre del nostre raonament anterior. Anem a solucionar-ho.

Anomenem $x^b = x^0(b)$. Considerem el problema de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(b) = x^b$. Té solució única x_b definida a un interval obert $J^b = (-b + \varepsilon, b + \varepsilon)$. Llavors, tenim una solució $\bar{x}$ definida a l'interval obert $\bar{J} = J^0 \cup J^b$:

$$\bar{x}(t) = x^0(t), \quad \text{si } t \in J^0, \qquad \bar{x}(t) = x_b(t), \quad \text{si } t \in J^b.$$

A més $J^0 \subset \bar{J} \subset I(t_0, x_0)$ (per definició (3.8) de $I(x_0, x_0)$) i com $\varphi(\cdot, t_0, x_0)_{|\bar{J}} = \bar{x}$, també $\varphi(\cdot, t_0, x_0)_{|J^0} = x^0$.

Si l'interval J^0 és $[a, b)$ o $[a, b]$, procedim anàlogament. Amb aquest darrer argument hem acabat. ■

Observació 3.10 *L'interval maximal depèn de l'obert U on considerem que f està definida.*

Ara enunciarem i provarem la propietat més important de les solucions maximals.

Proposició 3.11 *Sigui $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció contínua. Suposem que $\forall (t_0, x_0)$ el problema de Cauchy*

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3.9}$$

té solució única.

Sigui $\varphi(t, t_0, x_0)$ la solució maximal definida a $I(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$. Llavors per a tot $K \subset U$ compacte, existeixen entorns $J_\pm(t_0, x_0)$ de $\omega_\pm(t_0, x_0)$ tals que

$$(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \notin K, \qquad \forall t \in J_\pm(t_0, x_0) \cap I(t_0, x_0).$$

A vegades escrivim simplement

$$\lim_{t \to \omega_\pm(t_0, x_0)} (t, \varphi(t, t_0, x_0)) \in \partial U,$$

on ∂U indica la frontera de U.

Demostració. Fixem $(t_0, x_0) \in U$. A partir d'ara treurem (t_0, x_0) de la notació, és a dir escriurem $\varphi(t)$, I i $\omega_\pm$ en comptes de $\varphi(t, t_0, x_0)$, $I(t_0, x_0)$ i $\omega_\pm(t_0, x_0)$.

Suposem el contrari, és a dir que existeix un $K \subset U$ compacte tal que per qualsevol entorn $J_\pm$ de $\omega_\pm$, existeix un $t \in J_\pm \cap (\omega_-, \omega_+)$ tal que $(t, \varphi(t)) \in K$.

Per fixar idees, treballem només amb ω_+. Per a cada $\delta > 0$ suficientement petit,

$$\exists t^\delta \in (\omega_+ - \delta, \omega_+), \qquad \text{tal que} \qquad (t^\delta, \varphi(t^\delta)) \in K. \tag{3.10}$$

Per tant, tenim que $\omega_+ < \infty$.

Farem dos raonaments. Primer un treballant amb successions i un altre sense.

1. Agafem $\delta = 1/n$ i obtenim una successió $\{s_n\}$ que satisfà la propietat (3.10). Com que tota successió té una parcial convergent a K, tenim que, de fet, existeix una successió $(t_n, \varphi(t_n)) \in K$ tal que

   $$(\omega_+, x_+) := \lim_{n \to \infty} (t_n, \varphi(t_n)) \in K \subset U.$$

   Podem doncs considerar el problema de Cauchy

   $$x' = f(t,x), \qquad x(\omega_+) = x_+.$$

Tenim que existeix una única solució maximal d'aquest problema. A més pel Teorema de Peano (el podem aplicar ja que f és contínua) podem estimar un interval de definició. En efecte, fixada una norma qualsevol a $\mathbb{R}^n$, siguin $a, b, M > 0$ tal que

$$\Omega = [\omega_+ - a, \omega_+ + a] \times \{\|x - x_+\| \le b\} \subset U, \qquad \sup_{(t,x)\in\Omega} \|f(t,x)\| = M.$$

Llavors, per $\alpha = \min\{a, b/M\}$, la solució està definida a $I_\alpha = [\omega_+ - \alpha, \omega_+ + \alpha]$.

Anomenem $x_n = \varphi(t_n)$. Afirmem que existeix n_0 prou gran tal que per a tot $n \ge n_0$ les solucions dels problemes de Cauchy

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_n) = x_n \tag{3.11}$$

estan definides a l'interval $\{|t - t_n| \le 3\alpha/4\}$. En efecte, sigui n_0 tal que per a tot $n \ge n_0$,

$$|t_n - \omega_+| \le \frac{\alpha}{4}, \qquad \|x_n - x_+\| \le \frac{b}{4}.$$

Llavors, com que $\alpha \le a$,

$$\Omega_n = \left[t_n - \frac{3a}{4}, t_n + \frac{3a}{4}\right] \times \left\{\|x - x_n\| \le \frac{3b}{4}\right\} \subset [\omega_+ - a, \omega_+ + a] \times \{\|x - x_+\| \le b\} \subset U.$$

A més

$$M_n = \sup_{(t,x)\in\Omega_n} \|f(t,x)\| \le \sup_{(t,x)\in\Omega} \|f(t,x)\| = M.$$

Per tant el Teorema de Peano ens assegura que les solucions dels problemes (3.11) per $n \ge n_0$ estan definides

$$\alpha_n = \min\left\{\frac{3a}{4}, \frac{3b}{4M_n}\right\} \ge \min\left\{\frac{3a}{4}, \frac{3b}{4M}\right\} = \frac{3\alpha}{4}$$

que implica el que volíem: els problemes de Cauchy (3.11) estan definits a l'interval $\{|t - t_n| \le 3\alpha/4\}$.

A més,

$$I_{\alpha/2} = \left\{|t - \omega_+| \le \frac{\alpha}{2}\right\} \subset \left\{|t - t_n| \le \frac{3\alpha}{4}\right\}.$$

En efecte, sigui t tal que $|t - \omega_+| \le \alpha/2$. Tenim que

$$|t - t_n| \le |t - \omega_+| + |\omega_+ - t_n| \le \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} = \frac{3\alpha}{4}.$$

En particular els problemes (3.11) estan definits a $I_{\alpha/2}$. És a dir, $\varphi(t, t_n, x_n)$ està definida com a mínim a $I_{\alpha/2}$.

Recordem que la solució maximal $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ estava definida a $I = (\omega_-, \omega_+)$. Definim ara

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t, t_0, x_0) & \text{si } t \in (\omega_-, \omega_+) \\ \varphi(t, t_n, x_n) & \text{si } t \in \Big(t_n, \omega_+ + \dfrac{\alpha}{2}.\Big) \end{cases}$$

És clar que és solució de (3.9), ja que per unicitat

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t, t_n, x_n), \qquad t \in (t_n, \omega_+).$$

A més està definida a $(\omega_-, \omega_+ + \alpha/2)$ contradint el fet que (ω_-, ω_+) és interval maximal.

2. Sigui

$$0 < d \leq \frac{1}{2}\text{dist}\big(K, \partial U\big)$$

agafant com a norma $\|(t, x)\| = \max\{|t|, \|x\|\}$. Llavors, d'una banda, per a tot $(t_*, x_*) \in K$,

$$\Omega(t_*, x_*) := [t_* - d, t_* + d] \times \{\|x - x_*\| \leq d\} \subset U$$

i d'altre banda, com el conjunt

$$\widetilde{K} = \bigcup_{(t_*, x_*) \in K} [t_* - d, t_* + d] \times \{\|x - x_*\| \leq d\} \subset U$$

és un compacte, sigui

$$\widetilde{M} = \sup_{(t,x) \in \widetilde{K}} \|f(t, x)\|.$$

Com que

$$\widetilde{M} \geq M_* := \sup_{(t,x) \in \Omega(t_*, x_*)} \|f(t, x)\|,$$

el teorema de Peano ens assegura que per a tot $(t_*, x_*) \in K$, existeix una solució definida a, com a mínim, l'interval:

$$[t_* - \alpha, t_* + \alpha], \qquad \alpha = \min\left\{d, \frac{d}{\widetilde{M}}\right\} \leq \min\left\{d, \frac{d}{M_*}\right\}$$

Sigui ara $\delta = \alpha/2$, t^δ com a (3.10) i $x^\delta = \varphi(t^\delta, t_0, x_0)$. Com que $(t^\delta, x^\delta) \in K \subset U$, la solució maximal $\varphi(t, t^\delta, x^\delta)$ està definida com a mínim a

$$I_\alpha = [t^\delta - \alpha, t^\delta + \alpha].$$

Definim ara la funció

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t, t_0, x_0) & \text{si } t \in (\omega_-, \omega_+) \\ \varphi(t, t^\delta, x^\delta) & \text{si } t \in \big(t^\delta, t^\delta + \alpha\big). \end{cases}$$

És clar que ψ és solució de (3.9), ja que per unicitat

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t, t^\delta, x^\delta), \qquad t \in (t^\delta, \omega_+).$$

A més com que $\omega_+ + \alpha/2 < t^\delta + \alpha$, la solució ψ està definida a $(\omega_-, \omega_+ + \alpha/2)$ contradient el fet que (ω_-, ω_+) és interval maximal.

■

Observeu que en general, si $\varphi(\cdot, t_0, x_0) : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ és una solució maximal, el límit

$$\lim_{t \to \omega_\pm} \varphi(t, t_0, x_0)$$

no existeix. Per exemple:

$$x' = \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t}\right), \qquad f : (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

té solucions $x(t) = \sin(1/t) + C$ amb C constant. Clarament estan definides a $(-\infty, 0)$ i per tant un dels extrems de l'interval maximal és $t = 0$. Està clar que

$$\lim_{t \to 0} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{no existeix.}$$

Corol·lari 3.12 *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció contínua. Suposem que per a tot (t_0, x_0) existeix solució maximal del problema de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ i sigui $\varphi(t, t_0, x_0)$ la solució maximal definida a $I(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$.*

Llavors:

1. *Si $\omega_+(t_0, x_0) < \infty$, llavors per a tot compacte $K \subset U$, existeix $t \in I(t_0, x_0)$ tal que $\varphi(t, t_0, x_0) \notin K$.*

2. *Si existeix $M > 0$ tal que per a tot $t \in (t_0, \omega_+(t_0, x_0))$, $\|\varphi(t, t_0, x_0)\| \leq M$, llavors $\omega_+(t_0, x_0) = \infty$.*

Demostració. La prova es deixa com a exercici. És una conseqüència directa de la proposició anterior, però observeu que el compacte K és de $\mathbb{R}^n$ no de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. ■

Una altra propietat molt interessant i útil és la següent:

Proposició 3.13 *Sigui $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció contínua i Lipschitz respecte la segona variable. Sigui $\varphi(t, t_0, x_0)$ la solució maximal. Llavors per $(t_0, x_0) \in U$ i $t, t_1 \in I(t_0, x_0)$:*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)).$$

Demostració. Definim

$$\psi_1(t) = \varphi(t, t_0, x_0), \qquad \psi_2(t) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)).$$

D'una banda tenim que $\psi_1(t_1) = \varphi(t_1, t_0, x_0)$ i d'altre banda

$$\psi_2(t_1) = \varphi(t_1, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = \varphi(t_1, t_0, x_0)$$

on hem utilitzat aquí la propietat del flux:

$$\varphi(s, s, x) = x, \forall (s, x) \in U.$$

A més és clar que $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ són solucions de l'edo $x' = f(t, x)$. Per tant per unicitat de solucions del problema de Cauchy

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_1) = \varphi(t_1, t_0, x_0),$$

$\psi_1(t) = \psi_2(t)$. ■

4 Continuïtat de les solucions maximals

En aquesta secció tractarem el tema de la dependència contínua respecte (t, t_0, x_0) del flux o solució maximal $\varphi(t, t_0, x_0)$. De fet, la regularitat respecte t ja l'hem estudiada a la proposició 3.9

Primer a les seccions 4.1 i 4.2 provarem dos resultats quantitatius usant un dels lemes més útils de la teoria d'equacions diferencials: el lema de Gronwall. Després a la secció 4.3 demostrarem el resultat principal (teorema 4.1 a sota) el qual es basa en els resultats esmentats i en el fet que es poden trobar dominis grans i comuns de definició de dues solucions diferents si les condicions inicials estan properes.

Finalment tractarem la continuïtat respecte paràmetres d'equacions diferencials paramètriques localment Lipschitz (corol·lari 4.2). La seva demostració es troba al final de la secció 4.3. Reformularem també la proposició 2.1 de la secció 2 sobre equacions lineals que farem servir en la següent secció.

Demostrarem el següent resultat:

Teorema 4.1 *Sigui $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : W \to \mathbb{R}^n$ contínua. Suposem que f és Lipschitz respecte la segona variable a W, és a dir, existeix $L > 0$ tal que*

$$\forall (t, x), (t, \bar{x}) \in U, \qquad \|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|.$$

Fixem $(t_0, x_0) \in W$ i sigui $I(t_0, x_0)$ l'interval maximal de definició de la solució del problema de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

Llavors per cada interval compacte $J = [a, b] \subset I(t_0, x_0)$ tal que $t_0 \in J$ i per cada compacte $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\{\varphi(t, t_0, x_0) \ : \ t \in [a, b]\} \subset \operatorname{int}(K),$$

existeix un entorn $V_{(t_0,x_0)} \subset W$ de (t_0, x_0) tal que

$$\forall (t, t_1, x_1) \in J \times V_{(t_0,x_0)}, \qquad \varphi(t, t_1, x_1) \in K.$$

A més, definint

$$M = \sup_{(t,x)\in J\times K} \|f(t, x)\|$$

tenim que $\forall t, \bar{t} \in J$ se satisfà:

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(\bar{t}, t_1, x_1)\| \leq M|t - \bar{t}| + M|t_0 - t_1|e^{L|t-t_0|} + \|x_1 - x_0\|e^{L|t-t_0|}.$$

La regularitat respecte paràmetres també juga un paper important en molts models físics, biològics, etc. Per exemple, ens pot ajudar també a aproximar solucions tal com vam fer a la secció 2 en el cas d'equacions lineals. Tot seguit doncs enunciem el corol·lari més important del teorema anterior.

Corol·lari 4.2 *Siguin $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ dos oberts i*

$$\begin{array}{rccc} g: & U \times \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t, y, \lambda) & \longmapsto & g(t, y, \lambda) \end{array}$$

contínua i localment Lipschitz respecte $x = (y, \lambda)$. És a dir $\forall (t, x) \in U \times \Lambda$, existeix $W_{(t,x)} \subset U \times \Lambda$ entorn obert de (t, x) i una constant L tal que

$$\forall (t, x), (t, \bar{x}) \in W_{(t,x)}, \qquad \|g(t, x) - g(t, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|. \tag{4.1}$$

Per cada $(t_0, y_0, \lambda_0) \in U \times \Lambda$, definim $I(t_0, y_0, \lambda_0)$ l'interval maximal de definició de la solució del problema de Cauchy $y' = g(t, y, \lambda_0)$, $y(t_0) = y_0$, que denotem $\varphi(t, t_0, y_0, \lambda_0)$. Llavors

1. El conjunt

$$D = \left\{(t, t_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \,:\, (t_0, y_0, \lambda_0) \in U \times \Lambda,\, t \in I(t_0, y_0, \lambda_0)\right\}$$

és obert.

2. $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ *és contínua, de fet és localment Lipschitz.*

Observem que si la funció g depèn de paràmetres $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k$, de fet, ens podem reduir a una edo independent de paràmetres. En efecte, sigui g com l'enunciat del corol·lari. Considerem la funció $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ definida per

$$f(t, y, \lambda) = \begin{pmatrix} g(t, y, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És clar que definint $x = (y, \lambda)$, tenim que:

$$x' = f(t, x).$$

A més si $\psi(t, t_0, y_0, \lambda_0)$ és el flux de $y' = g(t, y, \lambda_0)$, llavors

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \begin{pmatrix} \psi(t, t_0, x_0) \\ \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

és el flux de $x' = f(t, x)$. A més f és localment Lipschitz respecte x.

Observació 4.3 *El raonament anterior és una prova que és suficient demostrar el corol·lari 4.2 per equacions independents de paràmetres.*

Com a comentari principal sobre aquests resultats, dir que no són el més general possible. Es pot demostrar continuïtat respecte condicions inicials simplement suposat que existeixen solucions maximal úniques, és a dir, sense suposar que f sigui localment Lipschitz respecte la segona variable. La demostració és bastant més tècnica.

De fet, en el cas d'equacions lineals tenim que:

Corol·lari 4.4 *Sigui* $I \subset \mathbb{R}$ *un interval obert,* $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$, $A : I \times \Lambda \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *i* $b : I \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ *contínues. Considerem l'equació lineal*

$$x' = A(t, \lambda)x + b(t, \lambda).$$

El seu flux és continu per tot $(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times I \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$.

Demostració. La prova es deixa com a exercici. Hi ha dues alternatives:

1. La primera alternativa és reescriure el teorema d'existència i unicitat de solucions en el cas d'equacions lineals, afegint la continuïtat respecte paràmetres a l'espai de Banach corresponent. La clau és que $I(t_0, y_0, \lambda_0) = I$ per tota condició inicial i paràmetre.

2. La segona és utilitzar els resultats de la secció 2.1.1. Fixeu $(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times I \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$ qualsevol. Recordeu que el flux està definit per tot $t \in I$. Llavors si λ està en un entorn de λ_0,

   $$\lambda = \lambda_0 + \eta, \qquad \eta \in \{\xi \in \mathbb{R}^k \, , \, \|\xi\| \leq \varepsilon_0\}.$$

   Així, redefinint
   $$\psi(t, t_0, x_0, \eta) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0 + \eta),$$
   podem pensar sempre que el (nou) paràmetre està al voltant de l'origen. D'altra banda, la proposició 2.1 aplicada al cas continu (en la notació de la proposició, $r = m = 0$) només és vàlida si el paràmetre és unidimensional. Per salvar aquest inconvenient, fixat $\|\eta\| \leq \varepsilon_0$, comparem sempre fluxos $\psi(t, t_0, x_0, \tilde{\eta})$ i $\psi(t, t_0, x_0, \hat{\eta})$ amb paràmetres $\tilde{\eta}$ i $\hat{\eta}$ que tenen només una component diferent.

■

4.1 Un resultat parcial i el lema de Gronwall

Abans d'abordar la demostració del teorema 4.1, demostrarem un resultat molt més simple però que ja aporta bastant informació i a més involucra la eina principal de la demostració: el lema de Gronwall

Proposició 4.5 *Sigui $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : W \to \mathbb{R}^n$ contínua i Lipschitz respecte la segona variable. És a dir,*

$$\forall (t, x), (t, \bar{x}) \in W, \qquad \|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|.$$

Sigui $(t_0, x_0), (t_0, x_1) \in W$. Denotem per $\varphi(t, t_0, x_0), \varphi(t, t_0, x_1)$ les solucions maximals definides respectivament a $I(t_0, x_0)$ i $I(t_0, x_1)$. Llavors, $\forall t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, x_1)$,

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_1)\| \leq e^{L|t - t_0|}\|x_0 - x_1\|.$$

La demostració d'aquest resultat està basada en el Lema de Gronwall. Primer enunciem i demostrem aquest lema i després l'aplicarem per provar la proposició 4.5.

Observació 4.6 *Aquest resultat no garanteix la continuïtat respecte x_0. En primer lloc no està garantida la uniformitat de $I(t_0, x_1)$ respecte x_1. És a dir, no hem demostrat que existeix un entorn de x_0, V_{x_0} tal que el conjunt*

$$\bigcap_{x_1 \in V_{x_0}} I(t_0, x_1)$$

tingui interior no buït.

Aquest fet es podria utilitzar per demostrar la continuïtat respecte x_0 per alguns valors de t. Però això no és el resultat que volem demostrar, així que, ens cal veure que donat $t \in I(t_0, x_0)$, les solucions $\varphi(t, t_0, x_1)$ estan definides per tot x_1 pertanyent a algun entorn de x_0.

4.1.1 Lema de Gronwall

Lema 4.7 *Siguin $u, v : [a, b) \to [0, \infty)$, contínues no negatives (b pot ser ∞). Suposem que existeix una constant $C \geq 0$ tal que*

$$u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)\,ds, \qquad \forall t \in [a, b).$$

Llavors,

$$u(t) \leq C\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right).$$

Demostració. Definim la funció

$$w(t) = C + \int_a^t u(s)v(s)\,ds$$

que és derivable a l'interval (a, b) i satisfà

$$w'(t) = u(t)v(t), \qquad u(t) \leq w(t).$$

Per tant $w'(t) \leq w(t)v(t)$.

(a) Cas $C > 0$. En aquest cas $w(t) > 0$ per a tot $t \in [a, b]$. Llavors tenim que

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t) \Longrightarrow \int_a^t \frac{w'(s)}{w(s)}\,ds \leq \int_a^t v(s)\,ds \Longleftrightarrow \log\left(\frac{w(t)}{w(a)}\right) \leq \int_a^t v(s)\,ds.$$

Com $w(a) = C$, prenent exponencials tenim que

$$w(t) \leq C\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

i la conclusió és clara atès que $u(t) \leq w(t)$.

(b) Cas $C = 0$. En aquest cas, observem que també és cert que $\forall \varepsilon > 0$,

$$u(t) \leq \varepsilon + \int_a^t u(s)v(s)\,ds.$$

Aplicant el cas anterior ($C > 0$), tenim que $\forall \varepsilon > 0$,

$$u(t) \leq \varepsilon \exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

i concloem que $u(t) = 0$ per a tot $t \in [a, b)$.

■

Aquesta és una de les versions del lemma de Gronwall, n'hi ha vàries de més sofisticades però la que hem enunciat és la que més es fa servir. De fet, nosaltres farem servir un corol.lari directe d'aquest lemma

Corol·lari 4.8 *Siguin $u, v : (a, b) \to [0, \infty)$, contínues no negatives ($|a|, b$ poden ser ∞). Sigui $C \geq 0$ i $t_0 \in (a, b)$ tal que*

$$u(t) \leq C + \left|\int_{t_0}^t u(s)v(s)\,ds\right|, \qquad \forall t \in (a, b).$$

Llavors,

$$u(t) \leq C \exp\left(\left|\int_{t_0}^t v(s)\,ds\right|\right).$$

Demostració. Observeu que quan $t \geq t_0$, és el mateix lemma de Gronwall, ja que les funcions u, v estan definides a $[t_0, b)$. Per resoldre el cas $t \leq t_0$, considereu la funció $\bar{u}(\tau) = u(t_0 - \tau)$, comproveu que

$$\bar{u}(\tau) \leq C + \int_0^\tau v(t_0 - s)\,ds$$

i apliqueu el lemma de Gronwall.

Acabeu la demostració com a exercici. ■

4.1.2 Demostració de la Proposició 4.5

Sigui f com a l'enunciat i fixem $(t_0, x_0), (t_0, x_1) \in W$. El primer que notem és que, com que f és Lipschitz respecte la segona variable podem aplicar el teorema de Picard i la proposició 3.9 i per tant les solucions maximals estan ben definides. Els intervals maximals de definició són $I(t_0, x_0), I(t_0, x_1)$ respectivament i com que t_0 pertany a tots dos $I(t_0, x_0) \cap I(t_0, x_1)$ és un interval obert.

Denotem

$$\psi_0(t) = \varphi(t, t_0, x_0), \qquad \psi_1(t) = \varphi(t, t_0, x_1), \qquad I = I(t_0, x_0) \cap I(t_0, x_1)$$

i recordem que

$$\psi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_0(s))\, ds, \qquad \psi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_1(s))\, ds.$$

Per definició d'interval maximal, si $s \in I$, $\psi_0(s), \psi_1(s) \in W$. Llavors:

$$\begin{aligned} \|\psi_0(t) - \psi_1(t)\| = & \left\| x_0 - x_1 + \int_{t_0}^{t} \big(f(s, \psi_0(s)) - f(s, \psi_1(s)) \big)\, ds \right\| \\ \leq & \|x_0 - x_1\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \psi_0(s)) - f(s, \psi_1(s))\|\, ds \right| \\ \leq & \|x_0 - x_1\| + L \left| \int_{t_0}^{t} \|\psi_0(s) - \psi_1(s)\|\, ds \right|. \end{aligned}$$

Ara podem aplicar el lema de Gronwall (de fet el corol·lari 4.8) amb

$$u(t) = \|\psi_0(t) - \psi_1(t)\|, \qquad C = \|x_0 - x_1\|, \qquad v(t) = L$$

i obtenim el que volíem:

$$u(t) \leq \|x_0 - x_1\| \mathrm{e}^{L|t - t_0|}.$$

4.2 Segon resultat parcial

Proposició 4.9 *Sigui $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : W \to \mathbb{R}^n$ contínua i Lipschitz respecte la segona variable. És a dir,*

$$\forall (t, x), (t, \bar{x}) \in W, \qquad \|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|.$$

Sigui $(t_0, x_0) \in W$ i $\varphi(t, t_0, x_0)$ la solució maximal definida a $I(t_0, x_0)$. Fixem $J \subset I(t_0, x_0)$ un interval tancat i fitat i definim

$$M_J = \sup_{s \in J} \|f(s, \varphi(s, t_0, x_0))\|.$$

Tenim que

1. *Per a tot* $t, \bar{t} \in J$,

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(\bar{t}, t_0, x_0)\| \leq M_J |t - \bar{t}|$$

2. *Sigui* $t_1 \in J$. *Considerem* $\varphi(t, t_1, x_0)$ *la solució maximal definida a* $I(t_1, x_0)$. *Per a tot* $t \in J \cap I(t_1, x_0)$,

$$\|\varphi(t, t_1, x_0) - \varphi(t, t_0, x_0)\| \leq M_J |t_1 - t_0| e^{L|t-t_1|}.$$

Observació 4.10 *Observeu que, en el segon ítem, com que* $t_1 \in J \subset I(t_0, x_0)$, *llavors* $J \cap I(t_1, x_0)$ *té interior no buit.*

Aquest resultat tampoc garanteix la continuïtat respecte t, t_0. *Vegeu la observació 4.6 feta després de la proposició 4.5.*

Tal com vam observar a la proposició 3.9 les constants M_J *estan ben definides.*

Demostració. Fixem un $J \subset I(t_0, x_0)$ tancat i fitat. Anomenem $\psi_0(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$. El primer ítem es dedueix de la igualtat:

$$\psi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_0(s))\, ds$$

ja que

$$\psi_0(t) - \psi_0(\bar{t}) = \int_{\bar{t}}^{t} f(s, \psi_0(s))\, ds.$$

Respecte al segon ítem, recordem que per la proposició 3.13,

$$\forall t, t_1 \in I(t_0, x_0), \qquad \varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)).$$

Anomenem $x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0)$ i notem que

$$I(t_1, x_1) = I(t_0, x_0).$$

Llavors

$$\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_1, x_0) = \varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_1, x_0).$$

Per la proposició 4.5, $\forall t \in I(t_1, x_1) \cap I(t_1, x_0) = I(t_0, x_0) \cap I(t_1, x_0)$,

$$\|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_1, x_0)\| \leq \|x_1 - x_0\| e^{L|t-t_1|}.$$

Pel primer ítem

$$\|x_1 - x_0\| = \|\varphi(t_1, t_0, x_0) - \varphi(t_0, t_0, x_0)\| \leq M_J |t_1 - t_0|$$

i per tant, si $t \in J \cap I(t_1, x_0)$

$$\|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_1, x_0)\| \leq M_J |t_1 - t_0| e^{L|t-t_1|}.$$

■

4.3 Final de la demostració de la continuïtat de les solucions maximals

Tal com hem comentat a les observacions 4.6 i 4.10, per tenir continuïtat ens cal garantir que tenim un interval comú de definició de les solucions maximals $\varphi(t, t_0, x_0)$ i $\varphi(t, t_1, x_1)$ si les condicions inicials són properes. Això està demostrat a la secció 4.3.1 a sota. Després a la secció 4.3.2 demostrarem el teorema 4.1 i per últim a la secció 4.3.3 donarem la prova del corol·lari 4.2.

4.3.1 Domini comú de definició de les solucions maximals

Lema 4.11 *Sigui W un obert i $f : W \to \mathbb{R}^n$ contínua i Lipschitz respecte la segona variable amb constant $L > 0$. Sigui $(t_0, x_0) \in W$ i $I(t_0, x_0)$ el seu interval de definició maximal.*

Llavors, per tot $J = [a, b] \subset I(t_0, x_0)$ interval compacte, tal que $t_0 \in J$, existeix un entorn $V_{(t_0,x_0)} \subset W$ de (t_0, x_0) i un compacte K tal que $J \times K \subset W$,

$$\forall (t_1, x_1) \in V_{(t_0,x_0)}, \qquad \varphi(t, t_1, x_1), \text{ està definida a } J \subset I(t_1, x_1)$$

i $\varphi(t, x_1, x_1) \in K$.

Demostració. Fixem $(t_0, x_0) \in W$ i un interval compacte $J = [a, b] \subset I(t_0, x_0)$ tal que $t_0 \in J$. Veiem primer que

$$\exists \delta > 0, \text{ tal que } \|x_1 - x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \varphi(t, t_0, x_1) \text{ definida a } J. \tag{4.2}$$

En efecte, per la proposició 4.5 tenim que $\forall t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, x_1)$,

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_1)\| \leq \|x_1 - x_0\| e^{L|t-t_0|}. \tag{4.3}$$

Sigui

$$d \leq \frac{1}{2} \min_{t \in [a,b]} \operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x_0), \partial W)$$

i els conjunts K i $\widetilde{K}$ definits per:

$$\widetilde{K} = [a, b] \times K := [a, b] \times \bigcup_{t \in [a,b]} \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - \varphi(t, t_0, x_0)\| \leq d\}. \tag{4.4}$$

És clar que tots dos són compactes i que $\widetilde{K}$ és un compacte contingut a W. Agafem $\delta > 0$ tal que

$$\delta e^{L(b-a)} \leq d.$$

Llavors si $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$ i $t \in J \cap I(t_0, x_1)$,

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_1)\| \leq \|x_1 - x_0\| e^{L|t-t_0|} \leq \|x_1 - x_0\| e^{L(b-a)}.$$

Per tant:

$$\forall t \in J \cap I(t_0, x_1), \qquad \|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_1)\| \leq d. \tag{4.5}$$

Sigui $I(t_0, x_1) = (\omega_-^1, \omega_+^1)$ i suposem que $\omega_+^1 \leq b$. Per la proposició 3.11 aplicada al compacte $\widetilde{K}$ tenim que existeix t_* satisfent $a < t_0 < t_* < \omega_+^1 \leq b$ tal que

$$(t_*, \varphi(t_*, t_0, x_1)) \notin \widetilde{K} = J \times K. \tag{4.6}$$

Ara bé, tenim que $t_* \in J \cap I(t_0, x_1)$, i per tant (4.5) ens diu que

$$\|\varphi(t_*, t_0, x_0) - \varphi(t_*, t_0, x_1)\| \leq d.$$

A més, per la definició (4.4) de $\widetilde{K}$, tenim que $(t_*, \varphi(t_*, t_0, x_1)) \in \widetilde{K}$. Així tenim una contradicció amb (4.6) que ve de suposar que $\omega_+^1 \leq b$. Per tant $\omega_+^1 > b$. Anàlogament veuríem que $\omega_-^1 < a$.

En conclusió:

$$\varphi(t, t_0, x_1) \quad \text{està definida per } t \in J = [a, b]$$

i a més $\varphi(t, t_0, x_1) \in K$. Així (4.2) està provada.

Ara fem el cas general. Considerem el compacte $\widetilde{K}$ definit a (4.4) i

$$M = \sup_{(t,x) \in \widetilde{K}} \|f(t, x)\|.$$

De moment sigui $t_1 \in J = [a, b]$ i $I(t_1, x_1) = (\omega_-^1, \omega_+^1)$ l'interval maximal de definició de $\varphi(t, t_1, x_1)$. Suposem (igual que abans) que $\omega_+^1 \leq b$. Apliquem la proposició 3.11 i obtenim que $\exists t_* \in I(t_1, x_1)$ satisfent

$$(t_*, \varphi(t_*, t_1, x_1)) \notin \widetilde{K}. \tag{4.7}$$

Tenim que, per definició, $a < t_0 < t_* < \omega_+^1 \leq b$. En conseqüència $t_* \in J \subset I(t_0, x_0)$ i, pel que hem vist abans a (4.2), $t_* \in I(t_0, x_1)$. Llavors podem aplicar les proposicions 4.5 i 4.9 a t_* i obtenim

$$\begin{aligned}\|\varphi(t_*, t_0, x_0) - \varphi(t_*, t_1, x_1)\| \leq& \|\varphi(t_*, t_0, x_0) - \varphi(t_*, t_0, x_1)\| \\ &+ \|\varphi(t_*, t_0, x_1) - \varphi(t_*, t_1, x_1)\| \\ \leq& \|x_1 - x_0\| e^{L|t_*-t_0|} + M_J |t_0 - t_1| e^{L|t_*-t_1|}\end{aligned}$$

amb

$$M_J = \sup_{t \in J} \|f(t, \varphi(t, t_0, x_1))\|.$$

Per (4.5), $(t, \varphi(t, t_0, x_1)) \in \widetilde{K}$ si $t \in J$, així és clar que $M_J \leq M$ i per tant, com $t_*, t_0, t_1 \in J = [a, b]$,

$$\|\varphi(t_*, t_0, x_0) - \varphi(t_*, t_1, x_1)\| \leq \|x_1 - x_0\| e^{L(b-a)|} + M|t_0 - t_1| e^{L(b-a)}.$$

Agafem $\delta > 0$ tal que

$$\delta e^{L(b-a)}(1 + M) \leq d$$

i tenim que, si $|t_1 - t_0|, \|x_1 - x_0\| \leq \delta$, llavors

$$\|\varphi(t_*, t_0, x_0) - \varphi(t_*, t_1, x_1)\| \leq d \Longrightarrow (t_*, \varphi(t_*, t_1, x_1)) \in \widetilde{K}$$

i tenim una contradicció amb (4.7) que ve de suposar $\omega_+^1 \leq b$. Procedint anàlogament per ω_-^1 arribem a la conclusió del resultat. El fet que les solucions $\varphi(t, t_1, x_1) \in K$ amb K definit a (4.4) és immediat. ■

Per il·lustrar el resultat:

4.3.2 Demostració del Teorema 4.1

Sigui $(t_0, x_0) \in W$, $J = [a, b] \subset I(t_0, x_0)$, $L > 0$ la constant de Lipschitz:

$$\|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|$$

i $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacte que conté $\varphi(t, t_0, x_0)$ al seu interior per tot $t \in J$.

Escollim $J' = [a', b']$ tal que $J' \subset I(t_0, x_0)$, $J \subset \text{int}(J')$ i $\varphi(t, t_0, x_0) \in \text{int}(K)$ per tot $t \in (a', b')$. Això sempre ho podem fer ja que $\text{int}(K)$ és un obert.

Definim l'obert $W = \text{int}(J' \times K)$ i observem que $J \times \text{int}K \subset W$. Pel lema 4.11 aplicat a $f|_W$ existeix $V_{(t_0,x_0)}$ un entorn de (t_0, x_0) tal que per a tot $(t_1, x_1) \in V_{(t_0,x_0)}$ les solucions $\varphi(t, t_0, x_0)$, $\varphi(t, t_1, x_1)$ estan definides per $t \in J = [a, b]$ i $\varphi(t, t_1, x_1) \in V$.

Recordem

$$M = \sup_{(t,x)\in J\times K} \|f(t, x)\| \tag{4.8}$$

la constant definida a l'enunciat del teorema.

Siguin $t, \bar{t} \in J$. Aplicant la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(\bar{t}, t_1, x_1)\| \leq & \|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(\bar{t}, t_0, x_0)\| + \|\varphi(\bar{t}, t_0, x_0) - \varphi(\bar{t}, t_1, x_0)\| \\ & + \|\varphi(\bar{t}, t_1, x_0) - \varphi(\bar{t}, t_1, x_1)\|. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Apliquem ara les proposicions 4.5 i 4.9 i obtenim:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_1)\| &\leq \|x_1 - x_0\| e^{L|t-t_0|}, \\ \|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t, t_1, x_1)\| &\leq M_J |t_0 - t_1| e^{L|t-t_0|} \\ \|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(\bar{t}, t_1, x_1)\| &\leq M_J |t - \bar{t}|, \end{aligned} \tag{4.10}$$

essent

$$M_J = \sup_{t\in J} \|f(t, \varphi(t, t_1, x_1))\|.$$

Com que $\varphi(t, t_1, x_1) \in K$, és clar que $M_J \leq M$ (veure (4.8)). Llavors aplicant les fites obtingudes a (4.10) als elements a la part dreta de (4.9), obtenim:

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(\bar{t}, t_1, x_1)\| \leq M|t - \bar{t}| + M|t_0 - t_1| e^{L|t-t_0|} + \|x_1 - x_0\| e^{L|t-t_0|},$$

i el teorema està demostrat.

4.3.3 Demostració del Corol·lari 4.2

L'observació 4.3 feta després de l'enunciat del corol·lari, ens assegura que és suficient pensar en el cas independent de paràmetres.

Primer demostrem el següent lema que afirma que si una funció satisfà la propietat (4.1) a l'enunciat del corol·lari 4.2 llavors la seva restricció sobre compactes és Lipschitz respecte la segona variable.

Lema 4.12 *Sigui f satisfent les hipòtesis del corol·lari 4.2. Sigui $K \subset U$ compacte. Llavors existeix $L > 0$ tal que*

$$\forall (t, x), (t, \bar{x}) \in B, \qquad \|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|.$$

Demostració. Fixem un compacte K de l'obert U Per a cada $(t,x) \in K$ considerem l'entorn $W_{(t,x)}$ definit a la condició (4.1) del corol·lari 4.2, els quals podem pensar que són boles centrades en x. Considerem el següent recobriment de K

$$K \subset \bigcup_{(t,x)\in K} W_{(t,x)}.$$

Com que K és un compacte, existeix un subrecobriment finit:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} W_{(t_i,x_i)}.$$

Cada bola $W_{(t_i,x_i)}$ té associada una constant de Lipschitz L_i (mireu la propietat (4.1)).

Sigui $x, \bar{x} \in K$ i $\overline{x, \bar{x}}$ el segment entre x i $\bar{x}$. Suposem que $x \in W_{(t_1,x_1)}$ i $\bar{x} \in W_{(t_m,x_m)}$. Si no és així afegim els entorns $W_{(t,x)}$ i $W_{(t,\bar{x})}$ al recobriment i renombrem m. És una observació trivial que $\overline{x, \bar{x}} \cap W_{(t_i,x_i)}$ és o bé buït o bé un subsegment de $\overline{x, \bar{x}}$. Siguin

$$\overline{x, \bar{x}} \cap W_{(t_{i_k},x_{i_k})} \neq \emptyset, \qquad 1 \leq k \leq \ell \leq m$$

i definim també:

$$\overline{y_{i_k}, y_{i_{k+1}}} = \overline{x, \bar{x}} \cup W_{(t_{i_k},x_{i_k})}.$$

Llavors, com $x = y_{i_1}$ i $\bar{x} = y_{i_{\ell+1}}$

$$\|f(t,x) - f(t,\bar{x})\| \leq \sum_{k=1}^{\ell} \|f(t,y_{i_k}) - f(t,y_{i_{k+1}})\| \leq \sum_{k=1}^{\ell} L_{i_k}\|y_{i_k} - y_{i_{k+1}}\|.$$

És clar que $y_{i_k} = x + t_{i_k}(\bar{x} - x)$ per algun t_{i_k}. A més, per definició $t_{i_k} < t_{i_{k+1}}$, per tant:

$$\|y_{i_k} - y_{i_{k+1}}\| = (t_{i_{k+1}} - t_{i_k})\|x - \bar{x}\|.$$

Definint $L = L_1 + \cdots + L_{i_\ell}$,

$$\|f(t,x) - f(t,\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\| \sum_{k=1}^{\ell}(t_{i_{k+1}} - t_{i_k}) = L\|x - \bar{x}\|(t_{i_\ell} - t_{i_1}) = L\|x - \bar{x}\|.$$

■

Ara anem a demostrar el resultat. Sigui dons $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ contínua i satisfent la propietat (4.1).

1. **Existència de solucions maximals** El primer que cal raonar és que tenim existència i unicitat de solucions maximals. En efecte, sigui $(t_0, x_0) \in U$ i un compacte $\Omega \subset U$ tal que $(t_0, x_0) \in \Omega$. Llavors $f_{|\Omega}$ és Lipschitz pel lema 4.12 i per tant pel Teorema de Picard tenim existència i unicitat de solucions locals. Llavors apliquem la proposició 3.9 i concloem que les solucions maximals estan ben definides.

   Observació 4.13 *Si el compacte Ω no és de la forma proposada en el teorema de Picard, sempre el podem incloure dins d'un Ω' de la forma desitjada.*

2. **Definició de dominis**. Fixem un $(t, t_0, x_0) \in D$. Considerem $I(t_0, x_0)$ l'interval màxim de definició i un interval tancat J tal que

$$J = [a, b] \subset I(t_0, x_0), \qquad t \in (a, b). \tag{4.11}$$

   Per cada interval tancat J, definim el compacte (veieu (4.4)):

$$W = [a, b] \times \bigcup_{t \in [a,b]} \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x - \varphi(t, t_0, x_0)\| \leq d\}, \tag{4.12}$$

   essent

$$d \leq \frac{1}{2} \min_{t \in [a,b]} \operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x_0), \partial U).$$

   Llavors, pel lema 4.12 $f_{|W}$ és Lipschitz. Per tant podem aplicar tots els resultats anteriors a aquesta restricció. De fet a $f_{\operatorname{int}(W)}$ ja que els resultats s'apliquen a conjunts oberts.

3. **El conjunt D és obert**. Recordem que

$$D = \big\{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \, : \, (t_0, x_0) \in U, \, t \in I(t_0, x_0)\big\}.$$

   Sigui $(t, t_0, x_0) \in D$. Considerem $I(t_0, x_0)$ l'interval màxim de definició i un interval tancat $J = [a, b]$ definit com a (4.11). Considerem la restricció de f, $f : \operatorname{int}W \to \mathbb{R}^n$ amb W definit com a (4.12). Llavors, com $f_{|W}$ és Lipschitz i $\varphi(t, t_0, x_0) \in \operatorname{int}W$ per a tot $t \in J$, pel teorema 4.1 (o bé utilitzant simplement el lema 4.11) existeix un entorn $V_{(t_0, x_0)}$ tal que

$$\forall (s, t_1, x_1) \in J \times V_{(t_0,x_0)}, \qquad \varphi(s, t_1, x_1) \in W \subset U.$$

   Així el conjunt

$$(a, b) \times V_{(t_0,x_0)} \subset D.$$

   Com que $(t, t_0, x_0) \in (a, b) \times V_{(t_0,x_0)}$ i aquest conjunt té interior no buit, D és obert.

4. **Continuïtat de φ a D.** Sigui $(t, t_0, x_0) \in D$, J com a (4.11) i W com (4.12). Pel lema 4.12 $f_{|W}$ és Lipschitz. Llavors podem aplicar el teorema 4.1, i obtenim que existeix $V_{(t_0,x_0)}$ entorn de (t_0, x_0) tal que $\forall t, \bar{t} \in J$ i $(t_1, x_1) \in V_{(t_0,x_0)}$:

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(\bar{t}, t_1, x_1)\| \leq M|t - \bar{t}| + M|t_0 - t_1|e^{L|t-t_0|} + \|x_1 - x_0\|e^{L|t-t_0|}$$

essent M, $L > 0$ constants positives. Òbviament la constant L depèn de l'elecció del compacte W, per això la fita que ens sortirà no és uniforme a l'obert U. És clar doncs que φ és localment Lipschitz i per tant és contínua.

5 Diferenciabilitat de les solucions maximals

Seguint amb l'estudi iniciat a la secció 4, on hem estudiat la continuïtat de les solucions maximals respecte a les condicions inicials (t_0, x_0) i respecte paràmetres λ, a la secció present ens preguntem sota quines condicions podem garantir la diferenciabilitat d'un flux.

Dividirem aquesta secció en diversos apartats:

1. Introduïrem notació bàsica (i estàndard). També recordarem les definicions de diferenciabilitat, derivada, derivada parcial i propietats d'aquestes. A més, enunciarem el teorema de diferenciabilitat, sense demostració. Tot això està a la secció 5.1.

2. Abans de la demostració del teorema de diferenciabilitat, exposarem com calcular les derivades del flux. Per això definirem les equacions que aquestes derivades han de satisfer (*equacions variacionals*) i donarem les seves condicions inicials. Moltes vegades a les derivades del flux se les anomena *variacions*. Secció 5.2

3. A la secció 5.3, mostrem algunes aplicacions senzilles del càlcul de variacions.

4. Demostració del Teorema de diferenciabilitat, fet a la secció 5.4.

5. Finalment a la secció 5.5, una petita introducció a la teoria de pertorbacions per equacions diferencials que depenen d'un paràmetre petit.

5.1 Definicions bàsiques, notació i enunciat del teorema

Tota la notació que introduïrem la farem servir sense menció en el futur.

Comencem aquesta secció introductòria amb qüestions bàsiques sobre diferenciabilitat. Sigui $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^\ell$ un obert i

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & z = (z_1, \cdots, z_\ell) & \longmapsto & g(z) = (g_1(z), \cdots, g_m(z)). \end{array}$$

1. Sigui $e_1, \cdots, e_\ell$ la base canònica de $\mathbb{R}^\ell$. Si els límits
$$\lim_{s\to 0} \frac{g(a+se_i)-g(a)}{s}, \qquad i=1,\cdots,\ell$$
existeixen, els anomenem derivades parcials de g en a. Les denotem per $\partial_i g(a)$, $i=1,\cdots,\ell$.

   A més, donat $v \in \mathbb{R}^\ell$, tal que $\|v\|=1$, si el límit
$$\lim_{s\to 0} \frac{g(a+tv)-g(a)}{t}$$
existeix, el denotem per $\partial_v g(a)$ i l'anomenem derivada direccional respecte v de g al punt a.

2. Diem que g és derivable en $a \in \mathcal{U}$ si existeix $L \in \mathcal{M}_{m\times\ell}$ matriu tal que
$$\lim_{h\in\mathbb{R}^\ell, \|h\|\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)-Lh}{\|h\|} = 0.$$
Denotem $L = Dg(a)$.

3. Si g és derivable en $a \in \mathcal{U}$, llavors existeixen totes les derivades parcials de g i
$$Dg(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(a) & \cdots & \partial_\ell g_1(a) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_1 g_m(a) & \cdots & \partial_\ell g_m(a) \end{pmatrix}.$$
Observeu que, en aquest cas
$$\partial_i g(a) = Dg(a)e_i, \qquad i=1,\cdots,\ell$$
i a més si $v \in \mathbb{R}^\ell$ amb $\|v\|=1$, llavors $\partial_v g(a) = Dg(a)v$ i de fet
$$v = v^1 e_1 + \cdots + v^\ell e_\ell \Rightarrow \partial_v g(a) = v^1 \partial_1 g(a) + \cdots + v^\ell \partial_\ell g(a).$$

4. Introduïm
$$L^l(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m) = \{A : \overbrace{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell}^{l} \to \mathbb{R}^m, \ : \ A \,\text{multilineal, contínua}\}.$$

Recordeu que una funció és multilineal si satisfà que per tot $j \in \{1, \cdots, l\}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $v_1, \cdots, v_l, w \in \mathbb{R}^\ell$,

$$\begin{aligned} A(v_1, \cdots, v_{j-1}, \lambda v_j + \mu w, v_{j+1}, \cdots, v_l) =& \lambda A(v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \cdots, v_l) \\ &+ \mu A(v_1, \cdots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \cdots, v_l). \end{aligned}$$

Amb la norma

$$\|A\| = \sup_{\|v_1\|=\cdots=\|v_l\|=1} \|A(v_1, \cdots, v_l)\| \tag{5.1}$$

$L^l(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m)$ és un espai de Banach.

5. Diem que g és $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{U}$ si g és derivable per a tot $a \in \mathcal{U}$ i

$$\begin{array}{rccc} Dg: & \mathcal{U} & \longrightarrow & L^1(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m) \\ & a & \longmapsto & Dg(a) \end{array}$$

és contínua. Escrivim $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$.

Equivalentment, $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ si i només si per a tot $a \in \mathcal{U}$, existeixen totes les derivades parcials, $\partial_1 g(a), \cdots, \partial_\ell g(a)$, i totes elles són contínues. És a dir, per a tot $i = 1, \cdots, \ell$, les funcions

$$\partial_i g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$$

són contínues.

6. Diem que g té parcials d'ordre l a $\mathcal{U}$ si per a tot $a \in \mathcal{U}$, per a tot $j \leq l$ i per a tota $(i_1, \cdots, i_j) \in \{1, \cdots, \ell\}^j$, j-tupla, les derivades parcials

$$\partial_{i_j}(\partial_{i_{j-1}}(\cdots(\partial_{i_1} g(a))))$$

existeixen. En aquest cas denotem recurrentment

$$\partial_{i_j, \cdots, i_1} g(a) = \partial_{i_j}(\partial_{i_{j-1}}(\cdots(\partial_{i_1} g(a)))).$$

7. Diem que una funció g és $\mathcal{C}^r$ a l'obert $\mathcal{U}$ si existeixen totes les derivades parcials fins a ordre r i totes elles són contínues. En aquest cas per a tot $a \in \mathcal{U}$ i per a tot $1 \leq l \leq r$ existeix $D^l g(a) \in L^l(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$D^l g(a)(v_1, \cdots, v_l) = \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_l \leq \ell} \partial_{i_l, \cdots, i_1} g(a)[v_l^{i_l} \times \cdots \times v_1^{i_1}], \tag{5.2}$$

essent $v_j = (v_j^1, \cdots, v_j^\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, $j = 1, \cdots, l$ vectors arbitraris.

En aquest cas $D^l g(a)$ és simètrica, és a dir

$$D^l g(a)(v_1, \cdots, v_l) = D^l g(a)(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(l)}), \qquad \forall \sigma \text{ permutació de } l \text{ elements.}$$

8. La noció de diferenciabilitat es pot extendre a $\psi : \mathcal{U} \to L^l(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m)$. En efecte, diem que ψ és derivable en $a \in \mathcal{U}$ si existeix $A \in L(\mathbb{R}^\ell, L^l(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m)) \cong L^{l+1}(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m)$ tal que
$$\lim_{h \in \mathbb{R}^\ell, \|h\| \to 0} \frac{\psi(a+h) - \psi(a) - Ah}{\|h\|} = 0.$$
On s'entén que, per calcular aquest límit, agafem la norma (5.1) de $L^l(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m)$.

Llavors, si $g \in \mathcal{C}^r(\mathcal{U})$, per a tot $j \leq r$,
$$D^j g(a) = D(D^{j-1} g)(a).$$

Fins aquí les consideracions sobre diferenciabilitat. Ara passem a introduir el context on treballarem. Sigui $U \times \Lambda$ un obert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ i
$$\begin{array}{rccl} f: & U \times \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t, x, \lambda) & \longmapsto & f(t, x, \lambda), \end{array} \tag{5.3}$$
una funció $\mathcal{C}^r$ amb $r \geq 1$. Considerem l'equació diferencial
$$x' = f(t, x, \lambda). \tag{5.4}$$
Sigui $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ el flux de l'equació anterior amb D definit per
$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \, (t_0, x_0, \lambda_0) \in U \times \Lambda, \; t \in I(t_0, x_0, \lambda_0)\}. \tag{5.5}$$
Ja sabem que D és un obert i que $\varphi \in \mathcal{C}^0(D)$. Per tant, té sentit pensar en la diferenciabilitat de φ al conjunt D.

Suposarem que f depèn de 3 variables (t, x, λ), en aquest ordre i llavors φ en depèn de 4, (t, t_0, x_0, λ), també en aquest ordre. Així denotem per $D_1 f$, $D_2 f$, $D_3 f$ les derivades de f respecte t, x i λ respectivament. Anàlogament, $D_1\varphi$, $D_2\varphi$, $D_3\varphi$, $D_4\varphi$ denotaran les derivades de φ respecte t, t_0, x_0 i λ respectivament.

L'objectiu final és demostrar el següent resultat.

Teorema 5.1 *Sigui f com* (5.3) *un funció $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ a l'obert $U \times \Lambda$. Considerem l'equació diferencial* (5.4) *i el seu flux associat $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ amb domini D definit en* (5.5). *Llavors φ és $\mathcal{C}^r$ a l'obert D.*

5.2 Algorisme de càlcul

Al llarg d'aquesta secció preliminar suposarem que hem demostrat el teorema 5.1. Més concretament:

H1 tenim una equació com (5.4) amb $f \in \mathcal{C}^r(U \times \Lambda)$, $r \geq 2$ i un flux φ associat definit al conjunt obert D (veieu (5.5)). És a dir,

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda), \qquad (t, t_0, x_0, \lambda) \in D. \tag{5.6}$$

H2 $\varphi \in \mathcal{C}^r(D)$ (aquesta és òbviament, la suposició més forta de moment).

Anem a veure com calcular $D_2\varphi$, $D_3\varphi$ i $D_4\varphi$.

Proposició 5.2 *Assumint les hipòtesis H1 i H2, tenim que per a tot* $(t, t_0, x_0, \lambda) \in D$*,*

1. $z(t) = D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ *satisfà el problema de Cauchy:*

$$z'(t) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) z(t), \qquad z(t_0) = \mathrm{Id}\,.$$

2. $z(t) = D_2\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ *satisfà el problema de Cauchy:*

$$z'(t) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) z(t), \qquad z(t_0) = -f(t_0, x_0, \lambda).$$

   De fet tenim que

$$D_2\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = -D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) f(t_0, x_0, \lambda).$$

3. $z(t) = D_4\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ *satisfà el problema de Cauchy:*

$$z'(t) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) z(t) + D_3 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda), \qquad z(t_0) = 0.$$

Demostració. Derivem l'equació (5.6) respecte x_0. Com que tot és $\mathcal{C}^2$, podem intercanviar els ordres de derivació i tenim per la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda). \tag{5.7}$$

A més

$$\varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda) = x_0 \Longrightarrow D_3\varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda) = \mathrm{Id}.$$

Així $D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ és la solució fonamental del sistema lineal homogeni (5.7).

Fem el mateix per t_0:

$$\frac{d}{dt} D_2\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) D_2\varphi(t, t_0, x_0, \lambda).$$

Per tant $D_2\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ és solució de la mateixa equació (5.7) però la seva condició inicial és:

$$\begin{aligned}\varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda) = x_0 &\Longrightarrow f(t_0, x_0, \lambda) + D_2\varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 0\\ &\Longrightarrow D_2\varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda) = -f(t_0, x_0, \lambda).\end{aligned}$$

La teoria general d'equacions lineals ens assegura que

$$D_2\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = -D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)f(t_0, x_0, \lambda).$$

Finalment derivant l'equació (5.6) respecte λ

$$\frac{d}{dt}D_4\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)D_4\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) + D_3 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$$

que és una equació lineal no homogènia, però fixeu-vos que la part homogènia correspon a (5.7). La seva condició inicial és:

$$\varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda) = x_0 \Longrightarrow D_4\varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 0.$$

■

5.3 Aplicacions

Al llarg d'aquesta secció suposarem les condicions H1 i H2 de la secció 5.2.

5.3.1 Aproximació de solucions al voltant d'una solució coneguda

1. El cas més simple és si suposem que tenim un punt d'equilibri en un sistema autònom (independent de t). És a dir, considerem l'equació diferencial $x' = f(x)$ i suposem que existeix $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = 0$. Recordeu que estem suposant que f és $\mathcal{C}^r$ al seu domini de definició, amb r gran. D'una banda és clar que $\varphi(t, t_0, p) = p$. D'altra banda, com que

   $$\frac{d}{dt}D_3\varphi(t, t_0, x_0) = Df(\varphi(t, t_0, x_0))D_3\varphi(t, t_0, x_0), \tag{5.8}$$

   avaluant a $x_0 = p$,

   $$\frac{d}{dt}D_3\varphi(t, t_0, p) = Df(p)D_3\varphi(t, t_0, p).$$

   Llavors

   $$D_3\varphi(t, t_0, p) = e^{(t-t_0)Df(p)}.$$

Fem un altre derivada. Derivem altre cop respecte x_0, l'equació (5.8) i suposeu que podem intercanviar l'ordre de derivació.

$$\frac{d}{dt}D_3^2\varphi(t,t_0,x_0) = Df(\varphi(t,t_0,x_0))D_3^2\varphi(t,t_0,x_0)+D^2f(\varphi(t,t_0,x_0))\big(D_3\varphi(t,t_0,t_0)\big)^2.$$

Un altre cop, si ho avaluem a $x_0 = p$,

$$\frac{d}{dt}D_3^2\varphi(t,t_0,p) = Df(p)D_3^2\varphi(t,t_0,p) + D^2f(p)\big(D_3\varphi(t,t_0,p)\big)^2.$$

A més, derivant dues vegades respecte x_0, l'igualtat $x_0 = \varphi(t_0,t_0,x_0)$, tenim que

$$D_3^2\varphi(t_0,t_0,p) = 0$$

Observació 5.3 *Aquí és convenient destacar que $D_3^2\varphi(t,t_0,p)$ i $D^2f(p)$ són funcions multilineals simètriques. Per tant l'equació anterior significa que per cada v_1, v_2 vectors,*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D_3^2\varphi(t,t_0,p)(v_1,v_2) =& Df(p)D_3^2\varphi(t,t_0,p)(v_1,v_2)\\ &+ D^2f(p)\big(D_3\varphi(t,t_0,p)v_1, D_3\varphi(t,t_0,p)v_2\big).\end{aligned}$$

Una altra manera de fer-ho és pensar en les derivades parcials $\partial_{i,j}\varphi(t,t_0,x_0)$ i retrobar $D_3^2\varphi(t,t_0,x_0)$ a partir de la fórmula (5.2). És clar que tenim que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\partial_{i,j}\varphi(t,t_0,x_0) =& Df(\varphi(t,t_0,x_0))\partial_{i,j}\varphi(t,t_0,x_0)\\ &+ D^2f(\varphi(t,t_0,x_0))\partial_i\varphi(t,t_0,x_0)\partial_j\varphi(t,t_0,x_0).\end{aligned}$$

A més $\partial_{i,j}\varphi(t_0,t_0,x_0) = 0$.

En resum,

$$D_3^2\varphi(t,t_0,p) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)Df(p)}D^2f(p)\big(D_3\varphi(s,t_0,p)\big)^2\,ds.$$

Així tenim que si $x_0 \approx p$,

$$\begin{aligned}\varphi(t,t_0,x_0) =& p + e^{(t-t_0)Df(p)}(x_0-p)\\ &+ \left(\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)Df(p)}D^2f(p)\big(D_3\varphi(s,t_0,p)(x_0-p), D_3\varphi(s,t_0,p)(x_0-p)\big)\,ds.\right)\\ &+ \mathcal{O}(x_0-p)^3.\end{aligned}$$

2. Un altre exemple és quan tenim

$$f(t, x, \varepsilon) = f_0(x) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + \varepsilon^3 f_3(t, x, \varepsilon),$$

pensem que el paràmetre $|\varepsilon| \ll 1$ és petit i suposem que coneixem una solució $x^0(t)$ quan $\varepsilon = 0$.

Sigui $x_0 = x^0(t_0)$, la condició inicial. Per continuïtat respecte ε, és clar que el flux $\varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ satisfà que $\varphi(t, t_0, x_0, 0) = x^0(t)$. Llavors, fent servir el teorema de Taylor,

$$\varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon) = x^0(t) + \varepsilon D_4\varphi(t, t_0, x_0, 0) + \varepsilon^2 \frac{1}{2} D_4^2 \varphi(t, t_0, x_0, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Per calcular $x^1(t) = D_4\varphi(t, t_0, x_0, 0)$ i $x^2(t) = D_4^2\varphi(t, t_0, x_0, 0)$ fem servir que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_4\varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon) =& D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon), \varepsilon) D_4\varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon) \\ &+ D_3 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon), \varepsilon) \end{aligned} \tag{5.9}$$

i, derivant altre cop respecte ε l'equació anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_4^2\varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon) =& D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon), \varepsilon) D_4^2\varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon) \\ &+ D_2^2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon), \varepsilon) \big(D_4\varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon)\big)^2 \\ &+ 2 D_2 D_3 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon), \varepsilon) D_4\varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon) \\ &+ D_3^2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ara avaluem les equacions a $\varepsilon = 0$ fent servir que $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3$. Llavors l'equació (5.9):

$$\frac{d}{dt} x^1(t) = D_2 f_0(x^0(t)) x^1(t) + f_1(t, x^0(t)). \tag{5.11}$$

Fent el mateix amb l'equació (5.10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x^2(t) =& D_2 f_0(x^0(t)) x^2(t) + D_2^2 f_0(x^0(t)) \big(x^1(t)\big)^2 \\ &+ 2 D_2 f_1(t, x^0(t)) x^1(t) + f_2(t, x^0(t)) \end{aligned}$$

3. Aplicació a

$$x' = f(t, x, \lambda) := ax(1 - x) - \lambda(1 - \sin(t)), \qquad a > 0. \tag{5.12}$$

Aquesta equació diferencial mesura la dinàmica d'una població x que pateix caça periòdicament amb més o menys intensitat segons la data de l'any.

Quan $\lambda = 0$ el sistema té dos punts fixos $p_0 = 0$ i $p_1 = 1$. Triem aquestes dues com a solucions conegudes pel sistema quan $\lambda = 0$. Utilitzem el que hem vist per veure el comportament de les solucions quan $|\lambda| \ll 1$ és petit i amb condicions inicials $x_0 \approx 0$ o $x_0 \approx 1$ respectivament. Per simplificar agafem $t_0 = 0$ i ho treiem de la notació. Tenim que:

$$\begin{aligned}\varphi(t, x_0, \lambda) =& \varphi(t, x_0, 0) + D_3\varphi(t, x_0, 0)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)\\ =& \varphi(t, p_i, 0) + D_2\varphi(t, p_i, 0)(x_0 - p_i) + D_3\varphi(t, p_i, 0)\lambda\\ &+ \mathcal{O}((|\lambda| + |x_0 - p_i|)^2)\\ =& p_i + D_2\varphi(t, p_i, 0)(x_0 - p_i) + D_3\varphi(t, p_i, 0)\lambda + \mathcal{O}((|\lambda| + |x_0 - p_i|)^2).\end{aligned}$$

Ara calculem $D_2\varphi(t, p_i, 0)$ i $D_3\varphi(t, p_i, 0)$. La primera és conseqüència del primer cas d'aquesta secció ja que abans de derivar respecte x_0, podem avaluar a $\lambda = 0$ l'equació (5.12) i després calcular $D_2\varphi(t, p_i, 0)$. Per tant, com $D_2 f(t, 0, 0) = a$ i $D_2 f(t, 1, 0) = -a$:

$$D_2\varphi(t, 0, 0) = e^{ta}, \qquad D_2\varphi(t, 1, 0) = e^{-at}.$$

Respecte a $D_3\varphi(t, p_i, 0)$, tenim que satisfan l'equació (5.11) amb $x^0(t) = 0$ i $x^0(t) = 1$, és a dir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} D_3\varphi(t, 0, 0) &= aD_3\varphi(t, 0, 0) - (1 - \sin(t))\\ \frac{d}{dt} D_3\varphi(t, 1, 0) &= aD_3\varphi(t, 1, 0) - (1 - \sin(t))\end{aligned}$$

amb condicions inicials ($t_0 = 0$), $D_3\varphi(0, 0, 0) = D_3\varphi(0, 1, 0) = 0$. Per tant:

$$\begin{aligned}D_3\varphi(t, 0, 0) &= -e^{at} \int_0^t e^{-as}(1 - \sin(s))\, ds,\\ D_3\varphi(t, 1, 0) &= -e^{-at} \int_0^t e^{as}(1 - \sin(s))\, ds.\end{aligned}$$

Exercici 5.4 *Seguint el que hem fet en els apartats anteriors, calculeu el desenvolupament de Taylor de $\varphi(t, x_0, \lambda)$ fins a ordre 2.*

5.3.2 Existència d'òrbites periòdiques

Ens trobem ara en la següent situació. Tenim un sistema

$$x' = f(t, x, \varepsilon) := f_0(x) + \varepsilon f_1(x, t, \varepsilon), \qquad f_1(x, t+T, \varepsilon) = f_1(x, t, \varepsilon). \tag{5.13}$$

Imaginem que, per $\varepsilon = 0$ tenim un punt d'equilibri p (i.e. $f_0(p) = 0$). A vegades també se l'anomena punt fix o solució constant.

En general, p no és una solució constant del sistema complert (i.e. per $\varepsilon \neq 0$), però dóna lloc a una òrbita periòdica. En concret tenim el següent resultat:

Proposició 5.5 *Considerem una equació diferencial de la forma* (5.13) *amb f una funció $\mathcal{C}^r$, amb $r \geq 1$. Suposem que existeix p tal que $f_0(p) = 0$ i $Df_0(p)$ no té el valor propi* 0.

Llavors, existeix un $\varepsilon_0 > 0$, un entorn V_p de p i una funció $q : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V_p$ tal que $q(\varepsilon) = p + \mathcal{O}(\varepsilon)$ i

$$\gamma(t) = \varphi(t, 0, q(\varepsilon), \varepsilon)$$

és solució T-periòdica. De fet, existeix $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \|\gamma(t) - p\| \leq C\varepsilon, \qquad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$$

per alguna constant C.

Observació 5.6 *Un exemple d'aquest tipus de sistemes és*

$$x' = f(t, x, \lambda) := ax(1-x) - \lambda(1 - \sin(t)).$$

De fet, com ja hem comentat abans, $p_0 = 0$ i $p_1 = 1$ són dos punts fixos quan $\lambda = 0$. A més $D_2 f(t, 0, 0) = a$ i $D_2 f(t, 1, 0) = -a$. Com cap de les dues són 0*, la proposició ens assegura l'existència de dues òrbites periòdiques λ-a prop de p_0 i p_1.*

Demostració. La primera observació és que si $x(t)$ és una solució de (5.13), llavors $y(t) := x(t+T)$ també. Aquest fet és evident per la periodicitat de f. En efecte, definim $x(t) = \varphi(t, 0, q, \varepsilon)$ i $y(t) = x(t+T) = \varphi(t+T, 0, q, \varepsilon)$. Llavors si $x(0) = y(0) = x(T)$, per unicitat de solucions, $x(t) = y(t) = x(t+T)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.

És a dir si $q = x(0)$ és tal que $q = x(T) = \varphi(T, 0, q, \varepsilon)$, llavors $\varphi(t, 0, q, \varepsilon)$ és una òrbita periòdica.

Definim

$$F(q, \varepsilon) = \varphi(T, 0, q, \varepsilon) - q.$$

L'objectiu és veure que per cada ε, $F(\cdot, \varepsilon)$ s'anul·la per algun q. Per això apliquem el teorema de la funció implícita. En efecte,

- F és $\mathcal{C}^1$ perque estem suposant H2.
- $F(p,0)=0$ perque p és un punt fix quan $\varepsilon=0$.
- $D_1F(p,0)=D_3\varphi(T,0,p,0)-\mathrm{Id}$. Com estem avaluant a $\varepsilon=0$ i derivant respecte q, cal fer la derivada respecte la condició inicial del flux del sistema (5.13) per $\varepsilon=0$. Aquest cas el vam tractar a la secció anterior 5.3.1 i vam veure que:

  $$D_3\varphi(T,0,p,0)=e^{TDf_0(p)}.$$

  Per tant $D_1F(p,0)=e^{TDf_0(p)}-\mathrm{Id}$. És invertible si i només si $e^{TDf_0(p)}$ no té el valor propi 1 que és equivalent a que $Df_0(p)$ no tingui el valor propi 0.

Així el teorema de la funció implícita ens assegura l'existència de la funció q i les seves propietats.

Per demostrar la fita per $\|\gamma(t)-p\|$ és suficient notar que:

$$\|\gamma(t)-p\|=\|\varphi(t,0,q(\varepsilon),\varepsilon)-\varphi(t,0,p,0)\|,$$

que la funció $\varphi(t,0,q(\varepsilon),\varepsilon)$ és $\mathcal{C}^1$ respecte (t,ε) i que és suficient considerar $t\in[0,T]$ i per tant tenim una fita uniforme respecte t. ∎

5.4 Demostració de la diferenciabilitat de la solució maximal. Teorema 5.1

La demostració del teorema 5.1 es subdivideix en tres apartats ben diferenciats. Recordem que l'objectiu és demostrar que $\varphi\in\mathcal{C}^r$.

1. El primer resultat, teorema 5.7 a la secció 5.4.1 ens parla de la diferenciabilitat respecte la condició inicial x_0. Aquest és el resultat més difícil de demostrar, involucra el teorema fonamental del càlcul i també el lema de Gronwall.

2. Després, utilitzant el resultat anterior, es demostra la diferenciabilitat respecte les altres variables (temps inicial t_0 i paràmetres λ) del flux. De fet es demostra que $\varphi\in\mathcal{C}^1$ si l'equació diferencial és també $\mathcal{C}^1$. Vegeu teorema 5.8 a la secció 5.4.2.

3. Finalment el teorema 5.1 es demostra amb un raonament per inducció sobre el grau de diferenciabilitat. A més, a partir de la pròpia demostració es pot veure que totes les derivades parcials del flux d'ordre més petit o igual que r satisfan una equació diferencial lineal, corol·lari (5.9). Això està fet a la secció 5.4.3.

5.4.1 Diferenciabilitat respecte la condició inicial x_0

El resultat és:

Teorema 5.7 *Sigui f com* (5.3) *un funció contínua tal que $D_2 f$ és contínua. Considerem l'equació diferencial* (5.4) *i el seu flux associat $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ amb domini D definit a* (5.5)*.*

Llavors, φ és derivable respecte x_0 i

$$D_3\varphi : D \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

és contínua.

A més, és derivable respecte t i per tot $(t, t_0, x_0, \lambda) \in D$, satisfà el problema de Cauchy:

$$z'(t) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) z(t), \qquad z(t_0) = \mathrm{Id}\,. \tag{5.14}$$

Demostració.

1. **Preliminars**. Fixem $(t_0, x_0, \lambda) \in U \times \Lambda$. Agafem $J = [a, b] \subset I(t_0, x_0, \lambda)$ que contingui t_0 i un compacte K convex qualsevol que contingui al seu interior $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ per a tot $t \in [a, b]$.

   (a) Pel Teorema 4.1, existeix un entorn $V_{(t_0,x_0)}$ de (t_0, x_0) tal que $\varphi(t, t_1, x_1, \lambda)$ està definida per $t \in J$ si $(t_1, x_1) \in V_{(t_0,x_0)}$. A més, $\varphi(t, t_1, x_1, \lambda) \in K$.

   (b) Observeu que si veiem que φ és derivable respecte x_0, que

   $$D_3\varphi : J \times U \times \Lambda \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

   és contínua i que és solució del problema de Cauchy (5.14), ja estem perquè podem recobrir $I(t_0, x_0, \lambda)$ per intervals compactes $J_l = [a_l, b_l]$ i utilitzar la unicitat de solucions ja que l'equació que satisfà $D_3\varphi$ és lineal.

   (c) Necessitem una matriu candidata per ser $D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$. La candidata natural és $M(t, t_0, x_0, \lambda)$, la solució del problema de Cauchy (5.14). Observem que, pel Teorema 4.1, $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ és contínua. Així la matriu

   $$D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$$

   depèn contínuament de (t_0, x_0, λ). Si pensem (t_0, x_0, λ) com a paràmetres, pel Corol·lari 4.4 tenim que $M(t, t_0, x_0, \lambda)$ també serà contínua.

   (d) Per demostrar el resultat només cal veure que

   $$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t, t_0, x_0 + h, \lambda) - \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) - M(t, t_0, x_0, \lambda)h}{\|h\|} = 0. \tag{5.15}$$

(e) Com a convenció, a partir d'ara, esborrarem els paràmetres (t_0, λ) de la notació ja que estan fixats a priori.

(f) Definim
$$\psi(t, h, x_0) = \varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0) - M(t, x_0)h. \tag{5.16}$$

2. **Primera expressió integral de** ψ. Aplicarem aquí l'operador de Picard. En efecte, és clar que:
$$\varphi(t, x_0 + h) = x_0 + h + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s, x_0 + h))\, ds$$
$$M(t, x_0) = \mathrm{Id} + \int_{t_0}^{t} A(s, x_0) M(s, x_0)\, ds$$
essent
$$A(t, x_0) = D_2 f(t, \varphi(t, x_0)).$$
Per tant
$$\psi(t, h, x_0) = \int_{t_0}^{t} \big[f(s, \varphi(s, x_0 + h)) - f(s, \varphi(s, x_0)) - A(s, x_0) M(s, x_0) h \big]\, ds. \tag{5.17}$$

3. **Aplicació del teorema fonalmental del càlcul**. Observem primer que, com que hem triat K convex, per tot $y_1, y_2 \in K$ i per tot $s \in [a, b]$,
$$f(s, y_1) - f(s, y_2) = \left(\int_0^1 D_2 f(s, y_2 + v(y_1 - y_2))\, dv \right) (y_1 - y_2)$$
En efecte, només cal aplicar el teorema fonamental del càlcul
$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(v)\, dv$$
a la funció
$$F(v) = f(s, y_2 + v(y_1 - y_2))$$
i observar que $y_1 - y_2$ no depèn de la variable d'integració v i per tant pot sortir fora de la integral. Anomenem
$$\Delta\varphi(s, h, x_0) = \varphi(s, x_0 + h) - \varphi(s, x_0).$$

Llavors, com que $\varphi(s, x_0), \varphi(s, x_0 + h) \in K$ convex, si $\|h\| \ll 1$ és prou petit,

$$
\begin{aligned}
f(s, \varphi(s, x_0 + h)) - &f(s, \varphi(s, x_0)) \\
&= \left(\int_0^1 D_2 f(s, \varphi(s, x_0) + v\Delta\varphi(s, h, x_0))\, dv. \right) \Delta\varphi(s, h, x_0) \\
&=: \hat{A}(s, h, x_0)\Delta\varphi(s, h, x_0).
\end{aligned}
$$

Per tant, de (5.17) deduïm:

$$
\begin{aligned}
\psi(t, h, x_0) =& \Delta\varphi(t, h, x_0) - M(t, x_0)h \\
=& \int_{t_0}^{t} \left[\hat{A}(s, h, x_0)\Delta\varphi(s, h, x_0) - A(s, x_0)M(s, x_0)h \right] ds.
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

Finalment, sumant i restant $\hat{A}(s, h, x_0)M(s, x_0)h$ dintre de la integral que hi ha a l'expressió (5.18):

$$
\begin{aligned}
\psi(t, h, x_0) = & \int_{t_0}^{t} \hat{A}(s, h, x_0)\psi(s, h, x_0)\, ds \\
& + \int_{t_0}^{t} \left[\hat{A}(s, h, x_0) - A(s, x_0) \right] M(t, x_0)h\, ds.
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

4. **Comportament de les funcions quan** $h \to 0$. Treballarem amb la definició de límit per demostrar que el límit a (5.15) és 0. Així fixem un $\varepsilon > 0$.

   Observem que, com que

   $$\hat{A}(t, h, x_0) = \int_0^1 D_2 f(t, \varphi(t, x_0) + v\Delta\varphi(t, h, x_0))\, dv, \quad A(t, x_0) = D_2 f(t, \varphi(t, x_0)),$$

   tenim que $A(t, x_0) = \hat{A}(t, 0, x_0)$. A més és clar que $\hat{A}(t, h, x_0)$ és contínua respecte h, uniformement sobre $t \in [a, b]$ (teorema de Heine) ja que totes les funcions involucrades en la seva definició ho són. Per tant, existeix $h_0 > 0$ tal que:

   $$\max_{t \in [a,b], \|h\| < h_0} \|\hat{A}(t, h, x_0) - A(t, x_0)\| \le \varepsilon.$$

5. **Expressió integral de ψ. Lema de Gronwall**. Fitant les expressions a (5.19) tenim que

   $$
   \begin{aligned}
   \|\psi(t, h, x_0)\| \le & \left| \int_{t_0}^{t} \|\hat{A}(s, h, x_0)\| \|\psi(s, h, x_0)\|\, ds \right| \\
   & + \left| \int_{t_0}^{t} \|\hat{A}(s, h, x_0) - A(s, x_0)\| \|M(t, t_0)\| \|h\|\, ds \right|.
   \end{aligned} \tag{5.20}
   $$

Siguin C_1, C_2 dues constants positives tals que:

$$C_1 = \max_{t\in[a,b]} \|M(t,t_0)\|, \qquad C_2 = \max_{(t,x)\in[a,b]\times K} \|D_2 f(t,x)\|.$$

Observeu d'una banda que les dues constants estan ben definides (són finites) per continuïtat i d'altre banda, que per definició de $\hat{A}(t,h,x_0)$,

$$\max\{\|\hat{A}(t,h,x_0)\|\,, t\in[a,b],\, x_0+h\in K\} \le C_2.$$

Ara podem fitar (5.20) millor. En efecte, fent servir el que hem vist a l'ítem anterior, per tot $\varepsilon > 0$, existeix $h_0 > 0$ tal que si $\|h\| \le h_0$,

$$\|\psi(t,h,x_0)\| \le C_2 \left| \int_{t_0}^{t} \|\psi(s,h,x_0)\|\, ds \right| + C_1(b-a)\varepsilon\|h\|.$$

I finalment apliquem el corol·lari 4.8 del lema de Gronwall (lema 4.1.1) i obtenim

$$\|\psi(t,h,x_0)\| \le C_1(b-a)\varepsilon\|h\|e^{C_2|t-t_0|} \le C_1(b-a)\varepsilon\|h\|e^{C_2(b-a)}$$

que implica que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\psi(t,h,x_0)\|}{\|h\|} = 0.$$

■

5.4.2 El flux és derivable amb derivada contínua

Utilitzant el teorema 5.7 demostrarem el següent resultat:

Teorema 5.8 *Sigui f com a* (5.3) *un funció $\mathcal{C}^1$ a l'obert $U\times\Lambda$. Considerem l'equació diferencial* (5.4) *i el seu flux associat $\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$ amb domini D definit en* (5.5)*. Llavors φ és $\mathcal{C}^1$ a l'obert D.*

A més, $D_2\varphi$, $D_3\varphi$ i $D_4\varphi$ satisfan els problemes de Cauchy indicats a la proposició 5.2.

Demostració. L'ànalisi per a $D_3\varphi$ ja ha estat feta al Teorema 5.7. Ara veurem que les parcials $D_2\varphi$ i $D_4\varphi$ són contínues.

Veiem primer $D_2\varphi$. Per tot s per a la qual les expressions següents tingui sentit:

$$\varphi(t,s,x_0,\lambda) = \varphi(t,t_0,\varphi(t_0,s,x_0,\lambda),\lambda).$$

Com que la part esquerra de la igualtat no depèn de t_0, la seva derivada respecte t_0 és 0. La part esquerra, com a funció de t_0 és derivable. A més com que $D_3\varphi$ i $D_1\varphi$ són contínues, existeix $D_2\varphi$ i

$$0 = D_2\varphi(t, t_0, \varphi(t_0, s, x_0, \lambda), \lambda) + D_3\varphi(t, t_0, \varphi(t_0, s, x_0, \lambda), \lambda) f(t_0, \varphi(t_0, s, x_0, \lambda), \lambda).$$

Avaluant a $s = t_0$, obtenim

$$D_2\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = -D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) f(t_0, x_0, \lambda)$$

que satisfà el problema de Cauchy de la proposició 5.2.

Ara mirem $D_4\varphi$, la derivada respecte λ. Considerem

$$y = (x, \lambda)^\top, \qquad g(t, y) = (f(t, x, \lambda), 0)^\top.$$

És clar que $g : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Considerem la nova equació diferencial:

$$y' = g(t, y)$$

i $\psi(t, t_0, y_0)$ el seu flux. Observem que, denotant $y_0 = (x_0, \lambda)$:

$$\psi(t, t_0, y_0) = \begin{pmatrix} \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

En efecte, és clar que $\psi(t, t_0, y_0)$ és solució de $y' = g(t, y)$ i

$$\psi(t_0, t_0, y_0) = (x_0, \lambda)^\top.$$

Per tant

$$\psi(t, t_0, y_0) = \begin{pmatrix} \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Llavors pel teorema 5.7 existeix $D_3\psi$ i és contínua. En particular, com que $y_0 = (x_0, \lambda)$ tenim que les derivades respecte x_0 i λ existeixen i són contínues. Calculem la derivada respecte λ. D'una banda:

$$D_\lambda\psi(t, t_0, y_0) = \begin{pmatrix} D_\lambda\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \\ 1 \end{pmatrix}$$

i

$$D_2 g(t, y) = \begin{pmatrix} D_2 f(t, x, \lambda) & D_3 f(t, x, \lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, com que

$$\frac{d}{dt}D_\lambda\psi(t,t_0,y_0) = D_2g(t,\psi(t,t_0,y_0))D_\lambda\psi(t,t_0,y_0)$$

tenim que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} D_\lambda\varphi(t,t_0,x_0,\lambda) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} D_2f(t,\varphi(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda) & D_3f(t,\varphi(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_\lambda\varphi(t,t_0,x_0,\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i per tant $D_\lambda\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$ satisfà l'equació diferencial de la proposició 5.2. A més, com que $x_0 = \varphi(t_0,t_0,x_0,\lambda)$ derivant respecte λ, obtenim que $D_3\varphi(t_0,t_0,x_0,\lambda) = 0$. ■

5.4.3 Final de la prova del teorema 5.1 i un corol·lari

Ara demostrarem la diferenciabilitat $\mathcal{C}^r$ del flux φ. Com ja hem comentat, la prova es fa per inducció sobre r.

Prova del teorema 5.1. Pel teorema 5.8 sabem que el resultat és cert per $r = 1$. Suposem que el resultat és cert per $r-1$. Com que f és $\mathcal{C}^{r-1}$, llavors φ és també $\mathcal{C}^{r-1}$ per hipòtesi d'inducció. Per veure que és $\mathcal{C}^r$ veurem que les derivades parcials $D_2\varphi, D_3\varphi, D_4\varphi$ són $\mathcal{C}^{r-1}$.

Considerem la funció $F(t,z,t_0,x_0,\lambda) = D_2f(t,\varphi(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda)z$ i l'equació

$$z' = F(t,z,t_0,x_0,\lambda).$$

És clar que F és una funció $\mathcal{C}^{r-1}$ de totes les seves variables. Considerem les solucions amb condicions inicials

$$z(t_0) = \mathrm{Id}, \qquad z(t_0) = -f(t_0,x_0,\lambda)$$

que corresponen a $D_3\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$ i $D_2\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$ respectivament. La hipòtesi d'inducció ens diu que les dues són funcions $\mathcal{C}^{r-1}$.

Anàlogament, considerant l'equació:

$$z' = F(t,z,t_0,x_0,\lambda) + D_3f(t,\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$$

concloem que, com que $D_4\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$ és solució d'aquesta, també és $\mathcal{C}^{r-1}$.

Per tant $\varphi \in \mathcal{C}^r(D)$ i el teorema 5.1 està demostrat. ■

Com a corol·lari d'aquesta demostració tenim un algorisme de càlcul per les derivades parcials d'ordre alt. Concretament,

Corol·lari 5.9 *Sigui f com a (5.3) una funció $\mathcal{C}^r$ a l'obert $U \times \Lambda$. Considerem l'equació diferencial* (5.4) *i el seu flux associat $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ amb domini D. Fixem una j-tupla $(i_1, \cdots, i_j)$ qualsevol amb $2 \leq j \leq r$ i $i_j \geq 2$. Definim*

$$\Delta(t, t_0, x_0, \lambda) = \partial_{i_j}(\partial_{i_{j-1}}(\cdots(\partial_{i_1}\varphi(t, t_0, x_0, \lambda))).$$

Noteu que les derivades respecte t no estan incluïdes.

Llavors

$$\frac{d}{dt}\Delta(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)\Delta(t, t_0, x_0, \lambda) + b(t, t_0, x_0, \lambda),$$

on b només depèn de $D\varphi, D^2\varphi, \cdots, D^{j-1}\varphi$. A més, si Δ no conté cap derivada parcial respecte t_0, llavors $\Delta(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 0$.

Demostració. Feu la prova com a exercici. ■

5.5 Teoria de pertorbacions

El propòsit d'aquesta secció és donar una metodologia de càlcul de les variacionals respecte paràmetres.

1. **Context**. Per simplificar suposarem que tenim un únic paràmetre petit. És a dir, $f : U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ amb $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon_0 > 0$. Suposem que f és $\mathcal{C}^r$ a $U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

2. **Aplicació de la teoria**. Pel teorema 5.1 tenim que el flux φ és també C^r. En particular, el teorema de Taylor ens assegura que podem escriure:

$$f(t, x, \varepsilon) = f_0(t, x) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + \cdots + \varepsilon^r f_r(t, x) + o(\varepsilon^r) \tag{5.21}$$

i a més, si $x(t, \varepsilon) = \varphi(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ és una solució qualsevol:

$$x(t, \varepsilon) = x^0(t) + \varepsilon x^1(t) + \varepsilon^2 x^2(t) + \cdots + \varepsilon^r x^r(t) + o(\varepsilon^r).$$

Observeu que $x^0, x^1, \cdots, x^r$ depenen de t_0, x_0, però no d'ε. Com que

$$\frac{d}{dt}x(t, \varepsilon) = f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon), \qquad x(t_0, \varepsilon) = x_0,$$

tenim que

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) + \varepsilon\dot{x}^1(t) + \cdots + \varepsilon^r\dot{x}^r(t) = & f_0(t, x^0(t) + \varepsilon x^1(t) + \cdots + \varepsilon^r x^r(t)) \\ & + \varepsilon f_1(x^0(t) + \varepsilon x^1(t) + \cdots + \varepsilon^r x^r(t)) \\ & \quad \vdots \\ & + \varepsilon^r f_r(x^0(t) + \varepsilon x^1(t) + \cdots + \varepsilon^r x^r(t)) \\ & + o(\varepsilon^r). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Com que les funcions a banda i banda de la igualtat anterior són $\mathcal{C}^r$ la unicitat del polinomi de Taylor ens assegura que han de coincidir a cada ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^j)$ per $0 \leq j \leq r$. Igualant ordres aconseguim equacions diferencials lineals molt semblants a les equacions de les variacionals, excepte per l'ordre $\mathcal{O}(1)$.

3. **Mètode de càlcul per x^0, x^1 i x^2.** Per l'ordre constant tenim que

$$\dot{x}^0 = f_0(t, x^0), \qquad x^0(t_0) = x_0.$$

Normalment suposem que aquesta solució és coneguda.

Per simplificar la notació denotarem $Df_l(t,x)$ per $D_2 f_l(t,x)$, la derivada respecte x. Igualem els termes $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de (5.22):

$$\dot{x}^1 = Df_0(t, x^0(t))x^1 + f_1(t, x^0), \qquad x^1(t_0) = 0.$$

Aquesta equació diferencial és lineal no homogènia. Com que suposem que $x^0(t)$ és coneguda, tot està ben determinat. En el cas autònom (f no depèn de t), sovint $x^0(t)$ és o bé una solució constant o bé una solució periòdica. Llavors, podem fer servir la teoria que tenim per sistemes lineals constants o bé periòdics (teoria de Floquet) segons el cas.

Igualem els termes $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$\dot{x}^2 = Df_0(t, x^0(t))x^2 + D^2 f_0(t, x^0(t))(x^1(t), x^1(t)) + Df_1(t, x_0)x^1 + f_2(t, x^0),$$

amb condició inicial $x^2(t_0) = 0$.

4. **Forma de les equacions per x^j, $j \geq 2$.** Els càlculs són més tediosos, però es poden fer. Suposem conegudes les funcions:

$$x^0(t), x^1(t), \cdots, x^{j-1}(t).$$

És clar que l'equació per x^j només involucrarà els termes d'ordre ε^j de

$$\varepsilon^l f_l(t, x^0(t) + \cdots + \varepsilon^r x^r(t)), \qquad 0 \leq l \leq j.$$

Observem que f_l és $\mathcal{C}^{j-l}$ (de fet $\mathcal{C}^{r-l}$) i per tant:

$$\begin{aligned} f_l(t, x^0(t) + \varepsilon x^1(t) + \cdots + \varepsilon^r x^r(t)) = {} & f_l(t, x^0) \\ & + Df_l(t, x^0)\big(\varepsilon x^1 + \varepsilon^2 x^2 + \cdots + \varepsilon^{j-l} x^{j-l}\big) \\ & + D^2 f_l(t, x^0)\big(\varepsilon x^1 + \varepsilon^2 x^2 + \cdots + \varepsilon^{j-l-1} x^{j-l-1}\big)^2 \\ & \quad \vdots \\ & + D^{j-l} f_l(t, x^0)\big(\varepsilon x^1\big)^{j-l} \\ & + o(\varepsilon^{j-l}). \end{aligned}$$

Així, el terme $\varepsilon^l f_l(t, x^0(t) + \cdots + \varepsilon^r x^r(t))$ a (5.22) contribueix a l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^j)$ com:

$$Df_l(t, x^0)x^{j-l} + c_l(x^0(t), \cdots, x^{j-l-1}(t)).$$

Per tant, x^j només intervé quan $l = 0$ amb el terme $Df_0(t, x^0)x^j$. És a dir, l'equació per x^j és de la forma

$$\dot{x}^j = Df_0(t, x^0)x^j + b_j(t)$$

on b_j és una funció que depèn de t i $x^0(t), x^1(t), \cdots, x^{j-1}(t)$.

6 Estabilitat de Lyapunov per punts d'equilibri

El propòsit d'aquesta secció curta és realitzar una teoria similar (tot i que en menor mesura) a la classificació de punts fixos per sistemes lineals.

No arribarem a fer-ho tot, però podem donar unes petites pinzellades. Ens restringirem al cas d'equacions diferencials autònomes (i.e. que no depenen de t) i només tractarem l'estabilitat de punts d'equilibri.

6.1 Definicions preliminars

Com que ens restringirem a les equacions diferencials autònomes és important assenyalar que el temps inicial (t_0) és *irrellevant* en el següent sentit: si $\varphi(t, t_0, x_0)$ és el flux de $x' = f(x)$, llavors

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0).$$

És a dir, podem recuperar el flux per qualsevol temps inicial t_0 a partir del flux amb temps inicial $t_0 = 0$. Per aquest motiu, a partir d'ara suposarem que $t_0 = 0$ i el treiem de la notació.

Comencem doncs amb la definició d'estabilitat i d'estabilitat asimptòtica segons Lyapunov.

Definició 6.1 (Estabilitat de Lyapunov) *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció $\mathcal{C}^1$. Suposem que existeix $p \in U$ tal que $f(p) = 0$.*

1. ***Punt d'equilibri estable**. Diem que p és estable si per a tot entorn U_p de p existeix un altre entorn V_p de p tal que si $x_0 \in V_p$,*

   (a) $\varphi(t, x_0)$ està definida per a tot $t \geq 0$.

   (b) $\varphi(t, x_0) \in U_p$.

2. ***Punt d'equilibri asimptòticament estable***. *Diem que p és un punt d'equilibri asimptòticament estable si*

   (a) *p és estable.*

   (b) *existeix un entorn W_p de p tal que si $x_0 \in W_p$,*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0) = p.$$

3. ***Punt d'equilibri inestable***. *Diem que p és inestable si no és estable.*

Com a exemples, els sistemes lineals $\dot{x} = Ax$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tenen $p = (0,0)^\top$ com a punt d'equilibri estable i asimptòticament estable respectivament. Noteu que en el primer cas no és asimptòticament estable.

Una altra definició important és la de punts fixos hiperbòlics:

Definició 6.2 (Punts d'equilibri hiperbòlics) *Els punts d'equilibri que satisfan*

$$\mathrm{Spec} Df(p) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \neq 0\}$$

es diuen punts d'equilibri hiperbòlics.

6.2 Estabilitat lineal de punts d'equilibri hiperbòlics

Ens agradaria tenir una condició fàcilment computable per classificar l'estabilitat d'un punt d'equilibri.

Proposició 6.3 *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció $\mathcal{C}^1$. Suposem que existeix $p \in U$ tal que $f(p) = 0$.*

1. *Si* $\mathrm{Spec} Df(p) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < 0\}$ *llavors p és asimptòticament estable.*

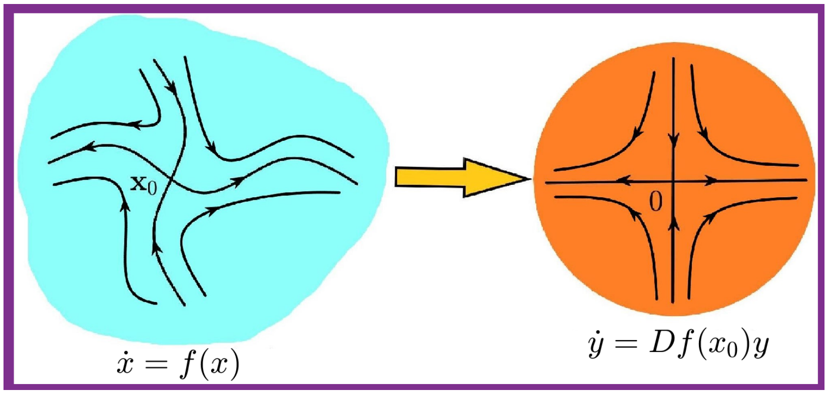
2. *Si existeix algun valor propi λ de $Df(p)$ amb $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, llavors p és inestable.*

Observació 6.4 *Per punts d'equilibri hiperbòlics aquest resultat ens dóna una manera senzilla de saber l'estabilitat o no del punt d'equilibri.*

De fet, hi ha un resultat molt més profund que ens assegura l'existència d'un canvi de variable $y = h(x)$ on h és un homeomorfisme local al voltant del punt d'equilibri hiperbòlic x_0 satisfent

$$y' = Df(x_0)y.$$

És el Teorema de Hartman (una versió simplificada d'aquest en realitat).



Ara bé, què passa quan hi ha algun valor propi λ amb $\operatorname{Re}\lambda = 0$*? Això és bastant més complicat.*

Demostració. La demostració de la proposició 6.3 és senzilla, però cal pautar-la. Indiquem els passos a seguir i vosaltres podeu omplir les demostracions que no estiguin fetes. De fet, està a la llista dels problemes del curs (Tema 5, problemes 6 i 7).

1. Fem Taylor de la funció f al voltant de $x = p$ i fem el canvi de variables $y = x - p$:

$$\dot{y} = Df(p)y + g(y), \qquad g(y) = o(\|y\|).$$

   Denotem $A = Df(p)$ i fixem y_0 qualsevol. Aplicant el mètode de variació de les constants, tenim que, per a t on estigui definit el flux:

$$\varphi(t, y_0) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} g(\varphi(s, y_0))\, ds. \tag{6.1}$$

2. Recordeu que, com ja havíem vist en el tema de sistemes lineals, existeixen constants $K, \mu > 0$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\mu t}, \qquad t \geq 0.$$

   D'altra banda, com que $g(y) = o(\|y\|)$, per qualsevol constant $\eta > 0$, existeix $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|y\| \leq \varepsilon \Longrightarrow \|g(y)\| \leq \eta\|y\|. \tag{6.2}$$

   Agafem

$$\eta = \frac{\mu}{2K}$$

   i $\varepsilon > 0$ tal que (6.2) es satisfà per aquest valor de η.

3. Sigui y_0 tal que $\|y_0\| < \varepsilon$ i considerem l'interval màxim de definició $[0, \omega_+)$ tal que
$$\|\varphi(t, y_0)\| < \varepsilon, \qquad \forall t \in [0, \omega_+).$$
Veieu que, acotant (6.1)
$$e^{-\mu t}\|\varphi(t, y_0)\| \leq \|y_0\| + \frac{\mu}{2}\int_0^t e^{-\mu s}\|\varphi(s, y_0)\|\, ds$$
i aplicant el lema de Gronwall:
$$\|\varphi(t, y_0)\| \leq \|y_0\| e^{-\frac{\mu}{2}t}, \qquad \|y_0\| < \varepsilon,\ t \in [0, \omega_+)$$

4. Utilitzeu la proposició (3.11) sobre solucions maximals i raoneu que cal $\omega_+ = \infty$. Per tant la solució $\varphi(t, y_0)$ està definida per a tot $t \geq 0$.

   Una vegada sabem que tenim la solució definida per a tot $t \geq 0$, es veu molt fàcilment que $\varphi(t, y_0) \to 0$ quan $t \to \infty$.

5. La prova de la inestabilitat de punts d'equilibri p tals que $Df(p)$ té algun valor propi amb part real positiva es deixa com exercici.

■

Com a corol·lari de la demostració tenim que:

Corol·lari 6.5 *Considerem el sistema $\dot{x} = Ax + g(x, t)$ amb $g(x, t) = o(\|x\|)$ uniformement en $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Si* $\mathrm{Spec}A \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < 0\}$ *llavors* 0 *és asimptòticament estable.*

2. *Si existeix algun valor propi λ de A amb* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$*, llavors* 0 *és inestable.*

6.3 Estabilitat per punts d'equilibri no hiperbòlics

En aquest cas, enunciarem el resultat principal (sense fer tota la demostració) que ens caracteritza quan un punt d'equilibri és estable i assimptòticament estable. Es pot utilitzar també per punts d'equilibri hiperbòlics, però en aquest cas és molt més fàcil utilitzar la proposició 6.3.

Primer definirem funció de Lyapunov i funció de Lyapunov estricta.

Definició 6.6 (Funció de Lyapunov) *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció $\mathcal{C}^1$. Suposem que existeix $p \in U$ tal que $f(p) = 0$.*

Sigui $W_p \subset U$ un entorn obert de p i $h : W_p \to \mathbb{R}$ una funció $\mathcal{C}^1$. Diem que h és una funció de Lyapunov si *(a)* $h(x) \geq 0$ *per a tot* $x \in W_p$ *i* $h(x) = 0$ *si i només si* $x = p$.

(b) $Dh(x)f(x) \leq 0$ *per a tot* $x \in W_p$.

Si a més

(c) $Dh(x)f(x) < 0$ *per a tot* $x \in W_p \backslash \{p\}$

diem que h *és una funció de Lyapunov estricta.*

Observació 6.7 *Estem fent servir la notació* $Dh(x)f(x)$ *pel producte escalar entre els dos vectors. Noteu però que sempre podem pensar que* $Dh(x)$ *és un vector filera i* $f(x)$ *és un vector columna i per tant la notació és clara.*

Tenim el següent resultat:

Teorema 6.8 *Sigui* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un obert i* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *una funció* $\mathcal{C}^1$. *Suposem que existeix* $p \in U$ *tal que* $f(p) = 0$. *Llavors:*

1. *Si existeix una funció de Lyapunov* h *associada a* p*, llavors* p *és estable.*
2. *Si existeix una funció de Lyapunov estricta* h *associada a* p*, llavors* p *és asimptòticament estable.*

Prova del criteri d'estabilitat. Fixem $\varepsilon > 0$ prou petit i definim

$$B_\varepsilon = \{\|x - p\| < \varepsilon\} \subset W_p, \qquad m = \min_{x \in \partial B_\varepsilon} h(x) > 0.$$

Com $h(p) = 0$, existeix $0 < \delta < \varepsilon$ prou petit tal que

$$0 < h(x) < m, \qquad \text{per } \ 0 < \|x - p\| < \delta.$$

Sigui $x_0 \in B_\delta \backslash \{p\}$. Considerem la solució maximal $\varphi(t; x_0)$ a B_ε, és a dir

$$t \in (\omega_-, \omega_+) \Longrightarrow \varphi(t; x_0) \in B_\varepsilon.$$

Volem veure que $\omega_+ = \infty$. Suposem el contrari que, com $\overline{B_\varepsilon} \subset U$, vol dir que

$$\varphi(\omega_+; x_0) \in \partial B_\varepsilon \Longrightarrow h(\varphi(\omega_+; x_0)) \geq m. \tag{6.3}$$

Considerem ara la funció $H(t) = h(\varphi(t; x_0))$. És clar que per $t \in (\omega_-, \omega_+)$:

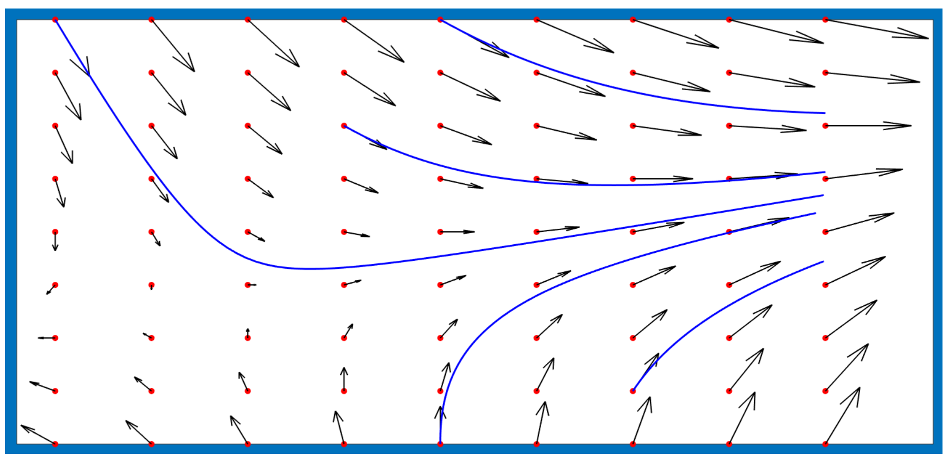
$$\frac{d}{dt}H(t) = Dh(\varphi(t; x_0))f(\varphi(t; x_0)) \leq 0 \Longrightarrow H(t) \leq H(0) = h(x_0) < m. \tag{6.4}$$

Prenent $t \to \omega_+$ a la darrera desigualtat en (6.4), tenim una contradicció amb (6.3). ■

Observació 6.9 *Aquesta mateixa idea es pot utilitzar per demostrar la invariància de conjunts B.*

- *Observeu que $\varphi(t; x_0)$ té com a vector tangent $f(\varphi(t; x_0))$. Tenim així la noció de* ***camp vectorial****:*

$$\textit{qualsevol punt } x \in U \subset \mathbb{R}^n \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n, \textit{ on } f(x) \textit{ és un vector!}$$



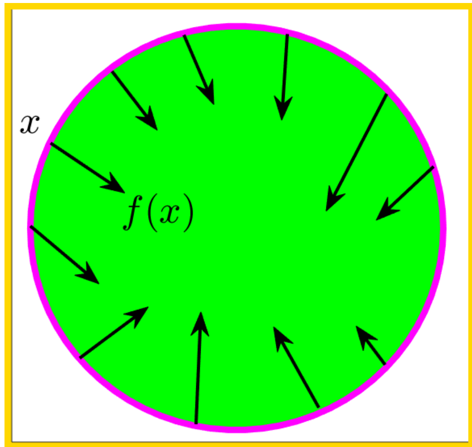
En vermell els punts x, en negre el camp vectorial $f(x)$ i en blau el flux $\varphi(t; x)$.

- *Imaginem que la superfície de nivell $S = \{h(x) = c\}$ és tal que $\operatorname{int} S$ és compacte. Podeu imaginar una esfera. Entre h o $-h$ triem el signe $+$ si $Dh(x)$ és el vector normal que apunta cap a fora o $-$ en cas contrari.*

- *La condició $Dh(x)f(x) < 0$ per $x \in S$, significa que*

  ***el camp** f **apunta cap a dins a** S.*

  En efecte, $Dh(x)f(x) = \|Dh(x)\|\|f(x)\| \cos\theta_x$ amb θ_x l'angle que formen $Dh(x)$ i $f(x)$. Per tant $|\theta_x| > \pi/2$ i, com $Dh(x)$ és el vector normal a S, el vector $f(x)$ entra dintre $\operatorname{int} S$:



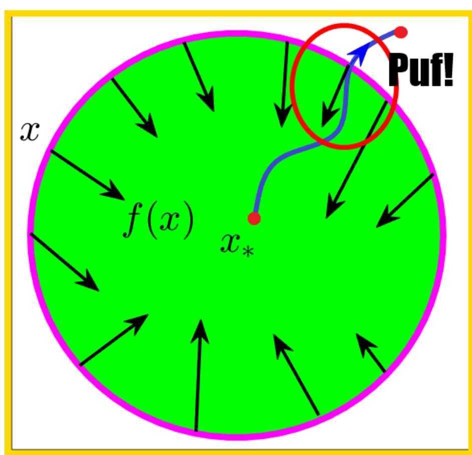
- *Això vol dir que* $int\, S$ *és positivament invariant, és a dir* $\varphi(t; x_0) \in int\, S$ *si* $x_0 \in int\, S$.

  Feu la demostració com a exercici, suposeu que $\varphi(t_*, x_*) \in S$ *per algun* $t_* > 0$ *i* $x_* \in int\, S$ *i estudieu la funció*

  $$H(t) = h(\varphi(t; x_*)$$

  per $t \sim t_*$.

- *Gràficament a* $\mathbb{R}^2$, *sense cap pretensió de ser una prova:*



6.4 Estabilitat d'òrbites periòdiques

Imaginem que tenim una equació $\dot{x} = f(x)$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ amb una òrbita periòdica γ, és a dir

$$p = \gamma(0), \qquad \dot{\gamma} = f(\gamma), \qquad \gamma(t + T) = \gamma(t)$$

amb $T > 0$. Volem veure com es comporten les solucions al voltant de γ. Una primera acció seria fer el canvi de variables

$$y = x - \gamma(t)$$

per passar l'òrbita periòdica a l'origen. Llavors

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\gamma}(t) = f(y + \gamma(t)) - f(\gamma(t)) = Df(\gamma(t))y + g(y,t)$$

essent $g(y,t) = o(\|y\|)$ uniformement (de fet T-periòdicament) en t. Així, com la matriu $Df(\gamma(t))$ és T-periòdica, podem realitzar el canvi de variable que ens dóna la teoria de Floquet $z = P(t)y$ per obtenir un sistema de la forma

$$\dot{z} = Bz + \tilde{g}(z,t), \qquad \tilde{g}(y,t) = o(\|y\|)$$

i B una matriu constant (probablement complexa). Llavors, hom podria pensar que aplicant el corol·lari 6.5, ja estem. La desgràcia és que

Lema 6.10 *La matriu B obtinguda fent el procediment anterior té el valor propi* 0.

Demostració. Feu la demostració com a exercici, seguint els passos:

1. Considerem el sistema lineal homogeni $\dot{\xi} = Df(\gamma(t))\xi$. Trieu la matriu B tal que $M(t) = P(t)e^{Bt}$ amb $M(0) = \mathrm{Id}$.

2. Veieu que $M(t) = D_2\varphi(t;p)$.

3. Demostreu que $f(p)$ és un vector propi de valor propi 1 de $D_2\varphi(T;p)$. De fet $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ és solució de $\dot{\xi} = Df(\gamma(t))\xi$.

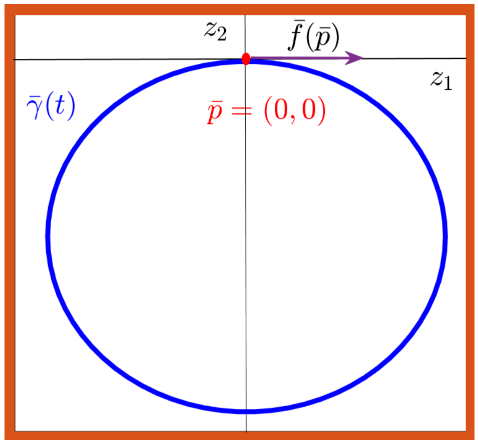
4. Concloeu que B té el valor propi 0.

■

El que està passant aquí és que estem considerant totes les direccions i, de fet, per veure si una solució va cap una òrbita periòdica o no, només ens caldran les direccions normals al moviment. Més concretament, pensem que estem en el pla

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Suposem que tenim una òrbita periòdica $\gamma(t)$ amb $\gamma(0) = p$. Només per simplificar una mica el raonament, fem uns canvis de variables per translladar p a $(0,0)$ i el vector $f(p)$ paral·lel a $(1,0)$:



Per aconseguir-ho fem:

$$y = x - p, \qquad \dot{y} = f(y+p) = \tilde{f}(y).$$

Considerem θ l'angle entre $(1,0)$ i el vector $\tilde{f}(0) = f(p)$ de tal manera que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} f(p) = \begin{pmatrix} \|f(p)\| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

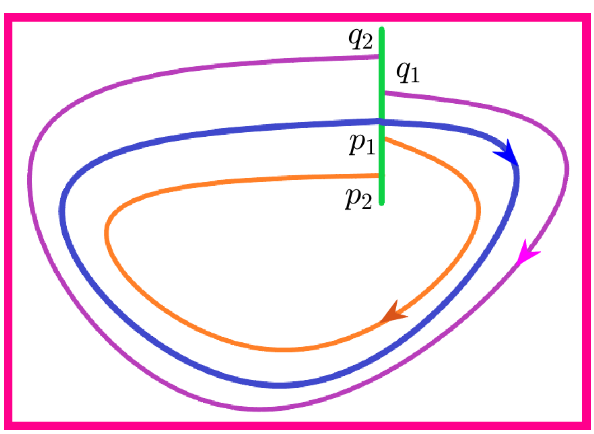
Anomenem R_θ a la rotació i considerem el canvi

$$z = R_\theta y, \qquad \dot{z} = R_\theta \tilde{f}(R_{-\theta} z) = \bar{f}(z), \qquad \bar{f}(0) = R_\theta \tilde{f}(0) = (\|f(p)\|, 0)^\top.$$

Exercici 6.11 *Demostreu que, en la situació anterior, si agafem un punt* $(0,\eta)$ *amb* $\eta \sim 0$*, llavors existeix un* $\tau(\eta)$ *tal que*

$$\varphi_1(\tau(\eta); (0,\eta)) = 0$$

essent $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$*, les components del flux. Per exemple, ens trobem que:*



Penseu quines serien les altres possibles situacions.

Definició 6.12 *En el contexte anterior, diem que*

- γ *és estable si per a tot* η *prou petit* $|\varphi_2(\tau(\eta);(0,\eta))| \leq |\eta|$
- γ *és assimptòticament estable si per a tot* η *prou petit* $|\varphi_2(\tau(\eta);(0,\eta))| < |\eta|$
- γ *és inestable si per a tot* η *prou petit* $|\varphi_2(\tau(\eta);(0,\eta))| > |\eta|$

Si anomenem $P(\eta) = \varphi_2(\tau(\eta);(0,\eta))$, *una condició suficient d'estabilitat és que* $|P'(0)| < 1$ *i d'inestabilitat* $|P'(0)| > 1$.

Anem ara a calcular $P'(0)$:

$$P'(\eta) = \tau'(\eta) f_2(\varphi(\tau(\eta);(0,\eta))) + D_2\varphi_2(\tau(\eta);(0,\eta)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avaluant a $\eta = 0$ i fent servir que $\tau(0) = T$, que $\varphi(T;(0,0)) = (0,0)$ i que $\bar{f}(0,0) = (*,0)$:

$$\begin{aligned} P'(0) &= \tau'(0)\bar{f}_2(\varphi(T;(0,0))) + D_2\varphi_2(T;(0,0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \tau'(0) f_2(0,0) + D_2\varphi_2(T;(0,0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= D_2\varphi_2(T;(0,0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Recordeu que $D_2\varphi(T;(0,0))$ té $(1,0)$ com vector propi de valor propi 1, per tant

$$P'(0) = D_2\varphi_2(T;(0,0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

és l'altre valor propi (per què?).

Així podem concloure que

Proposició 6.13 *Sigui* $\dot{x} = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^1$ *amb una òrbita periòdica. Sigui* p *un punt qualsevol d'aquesta òrbita. Sigui*

$$\lambda = \det D\varphi(T;p)$$

(observeu que λ *és també valor propi de* $D\varphi(T;p)$*). Llavors*

1. *Si* $|\lambda| < 1$, *llavors* γ *és assimptòticament estable.*
2. *Si* $|\lambda| > 1$, *llavors* γ *és inestable.*

Observació 6.14 *Tota aquesta teoria es pot generalitzar a* n *dimensions. De fet, l'aplicació* P *s'anomena aplicació de Poincaré. Veieu els exercicis 18, 19 i 20 del Tema 5.*

7 Bendixon i les òrbites periòdiques

Hi ha tres resultats importants per equacions diferencials autònomes al pla deguts al matemàtic Ivar Otto Bendixon. El primer ens diu on no podem trobar òrbites periòdiques, el segon ens assegura cap a on poden tendir les diferents solucions i per últim, un important corol·lari d'aquest darrer resultat que ens dona una important propietat de les òrbites periòdiques al pla.

Teorema 7.1 (Criteri de Bendixon) *Sigui $U \subset \mathbb{R}^2$ un obert, $V \subset U$ simplement connex i $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funció $\mathcal{C}^1$. Suposem que* $\operatorname{div} f(x) \neq 0$ *per a tot $x \in V$. Llavors $\dot{x} = f(x)$ no té cap òrbita periòdica enterament continguda a V.*

Demostració. La demostració és molt senzilla. En efecte, suposem que γ és una òrbita periòdica continguda a V. Definim $D = \operatorname{int} \gamma$ que és també simplement connex. Llavors podem aplicar el teorema de la divergència:

$$\int\int_D \operatorname{div} f \, dx = \int_\gamma n^\top f \, d\gamma$$

amb n el vector normal. Observeu però que $f(\gamma(t))$ és el vector tangent a γ, per tant sempre tenim que $n^\top f \equiv 0$. Així

$$\int\int_D \operatorname{div} f \, dx = 0$$

que és un contradicció amb el fet que $\operatorname{div} f \neq 0$ ja que, al ser una funció contínua no té canvis de signe. ■

El següent resultat, que no demostrarem, ens diu que, d'alguna manera, les equacions diferencials al pla són bastant previsibles.

Teorema 7.2 (Poincaré-Bendixon) *Sigui $U \subset \mathbb{R}^2$ un obert i $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una funció $\mathcal{C}^1$. Considerem un punt $q \in U$ i la solució $\varphi(t; q)$ de l'equació $x' = f(x)$ amb condició inicial $\varphi(0; q) = q$. Assumim que:*

- *El número de punts fixos ($f(p) = 0$) és finit.*
- *$\{\varphi(t; q)\}_{\pm t \geq 0}$ és fitat.*

Llavors tenim una de les tres possibilitats següents:

1. *O bé $\varphi(t; q)$ és una òrbita periòdica.*
2. *O bé existeix una òrbita periòdica $\gamma_\pm$ tal que dist$\big(\varphi(t; q), \gamma_\pm\big) \to 0$ quan $t \to \pm\infty$.*

3. O bé existeix una successió $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creixent amb $\pm t_n \to \infty$ quan $n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\pm t_n; q) \to p, \qquad f(p) = 0.$$

A més si $\{\varphi(t; q)\}_{\pm t\geq 0}$ és fitat en ambdós casos $\pm t \geq 0$, aleshores $\gamma_+ \neq \gamma_-$.

Observació 7.3 *La demostració d'aquest resultat és molt complicada i involucra el teorema de la corba de Jordan. Es pot generalitzar a fluxos definits sobre superfícies on el teorema de la corba de Jordan sigui cert, per exemple a l'esfera $\mathbb{S}^2$, però no és cert en superfícies com el tor $\mathbb{T}^2$, on aquest teorema és fals.*

Un dels corol·laris més coneguts d'aquest teorema és

Corol·lari 7.4 *Sigui $U \subset \mathbb{R}^2$ un obert i $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una funció $\mathcal{C}^1$. Tota òrbita periòdica de $\dot{x} = f(x)$ conté un punt fix al seu interior.*

Demostració. La demostració d'aquest resultat involucra el lema de Zorn:

Tot conjunt parcialment ordenat en el qual tot subconjunt totalment ordenat té un límit superior, conté un element maximal.

Donada una relació d'ordre, recordeu que un conjunt totalment ordenat és aquell en què, qualssevol dos elements són comparables. Definim ara

$$\Gamma = \{\gamma : I \to \mathbb{R}^2 \,:\, \gamma \text{ és una òrbita periòdica de } \dot{x} = f(x)\}$$

amb la relació d'ordre

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Longleftrightarrow \operatorname{int}\gamma_2 \subset \operatorname{int}\gamma_1.$$

Per unicitat de solucions, aquesta és efectivament una relació d'ordre. Agafem un subconjunt $\Pi \subset \Gamma$ totalment ordenat, és a dir un subconjunt d'òrbites periòdiques encaixades. Considerem

$$\Omega = \bigcap_{\gamma\in\Pi} \overline{\operatorname{int}\gamma}, \qquad \overline{\operatorname{int}\gamma} \text{ és l'adherència.}$$

És clar que per ser la intersecció de compactes encaixats $\Omega \neq \emptyset$. Sigui $p \in \Omega$. Llavors $\varphi(t; p) \in \Omega$ per a tot $t \geq 0$ (per què?).

Suposem ara que no tenim cap punt fix a $\operatorname{int}\gamma$ (i per tant a Ω). Pel teorema de Poincaré Bendixon $\varphi(t; p)$ ha de tendir cap a una òrbita periòdica $\beta \subset \Omega$ i per tant aquesta òrbita és una fita superior del subconjunt Π.

Sigui μ l'element maximal de Γ obtingut mitjançant l'aplicació del lema de Zorn. És a dir μ és una òrbita periòdica satisfent que:

$$\operatorname{int} \mu \subset \operatorname{int} \gamma, \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Si $\operatorname{int} \mu \neq \emptyset$, un punt $p \in \operatorname{int} \mu \neq \emptyset$ satisfà, aplicant altre cop el teorema de Poincaré-Bendixon, que $\gamma_+ = \gamma_- = \mu$, ja que no hi ha punts fixos i a més μ és maximal. Per tant, pel Teorema de Poincaré-Bendixson, tenim una contradicció. Si $\operatorname{int} \mu = \emptyset$, llavors no és una òrbita periòdica i per tant contradicció.

La contradicció ve de suposar que no tinc punts fixos a l'interior de l'òrbita periòdica. ■

Per acabar, comentar que aquesta situació d'ordre i predictibilitat no es dona quan considerem equacions diferencials a $\mathbb{R}^n$ amb $n \geq 3$. Un dels exemples més coneguts és l'equació de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \end{cases}$$

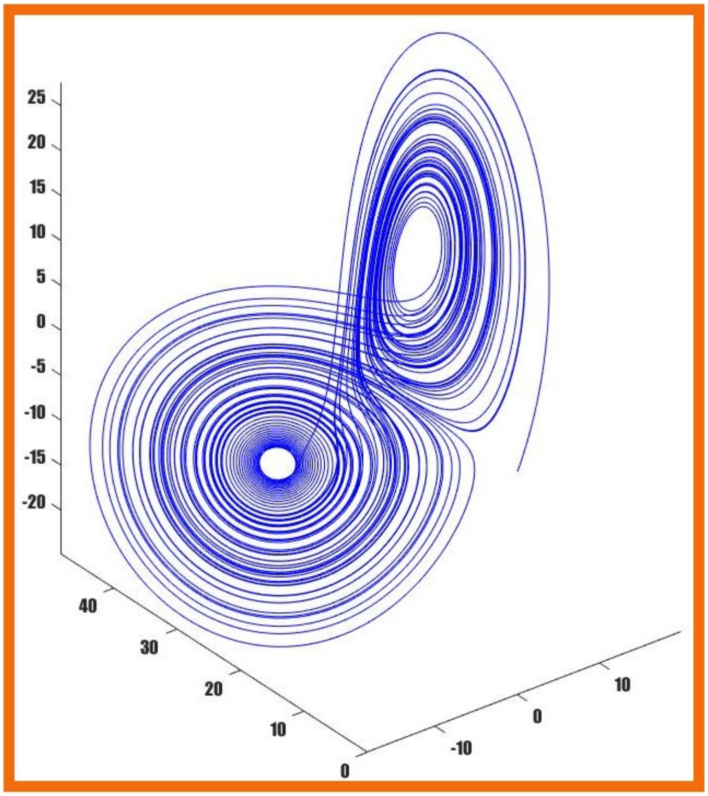
que és un model simplificat de convecció atmosfèrica. Per alguns valors dels paràmetres

$$\alpha = 10, \qquad \rho = 28, \qquad \beta = \frac{8}{3}$$

el sistema té el que s'anomena un **atractor extrany**:

- D'una banda totes les solucions tendeixen cap aquest conjunt.
- D'altra banda, les solucions al conjunt tenen un comportament qualitatiu extremament complicat, és el que es diu un conjunt caòtic!

Aquest conjunt té la forma de la coneguda papallona de Lorenz:


25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
40
30
20
10
0
-10
0
10