Tema 2

Derivación
Gráficas de funciones

Transparencias de Carmen Hernando siguiendo los apuntes de la asignatura de Cálculo I.

Derivada en un punto

Sea f una función definida en un entorno de un punto $c \in \mathbb{R}$

f es *derivable* en $c \Leftrightarrow$ existe y es finito el límite

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = f'(c) := \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

f'(c) es la *derivada* de f en c

Ejemplo: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x$$

Derivadas: definiciones

Sea f una función definida en $[c, b)$, entonces:

f es *derivable en c por la derecha* $\Leftrightarrow$ existe y es finito el límite

$$f'(c^+) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Analogamente se definine derivable por la izquierda

- $f:(a, b) \to \mathbb{R}$ es *derivable en (a, b)* $\Leftrightarrow$ f es derivable en cuaquier punto de (a, b).
- $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ es *derivable en $[a, b]$* $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ es derivable en el intervalo abierto } (a, b) \\ \text{derivable en } a \text{ por la derecha} \\ \text{derivable en } b \text{ por la izquierda.} \end{cases}$

Interpretación geométrica

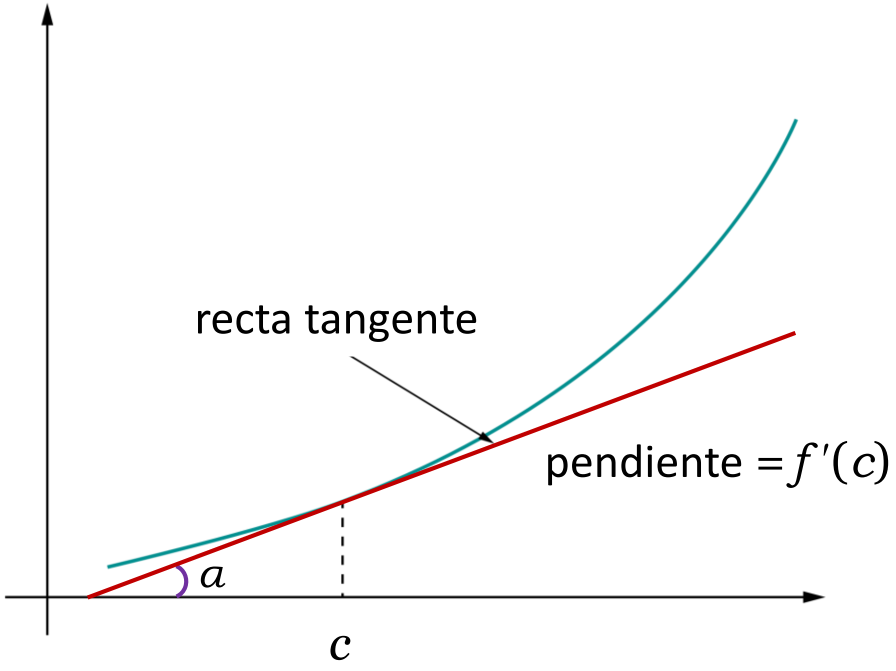
Si una función f es derivable en un punto c, entonces

$$\boxed{y = f(c) + f'(c)(x - c)}$$

es la *recta tangente* a la gráfica $y = f(x)$ en $x = c$.

La recta tangente tiene pendiente $m = \tan(a) = f'(c)$.

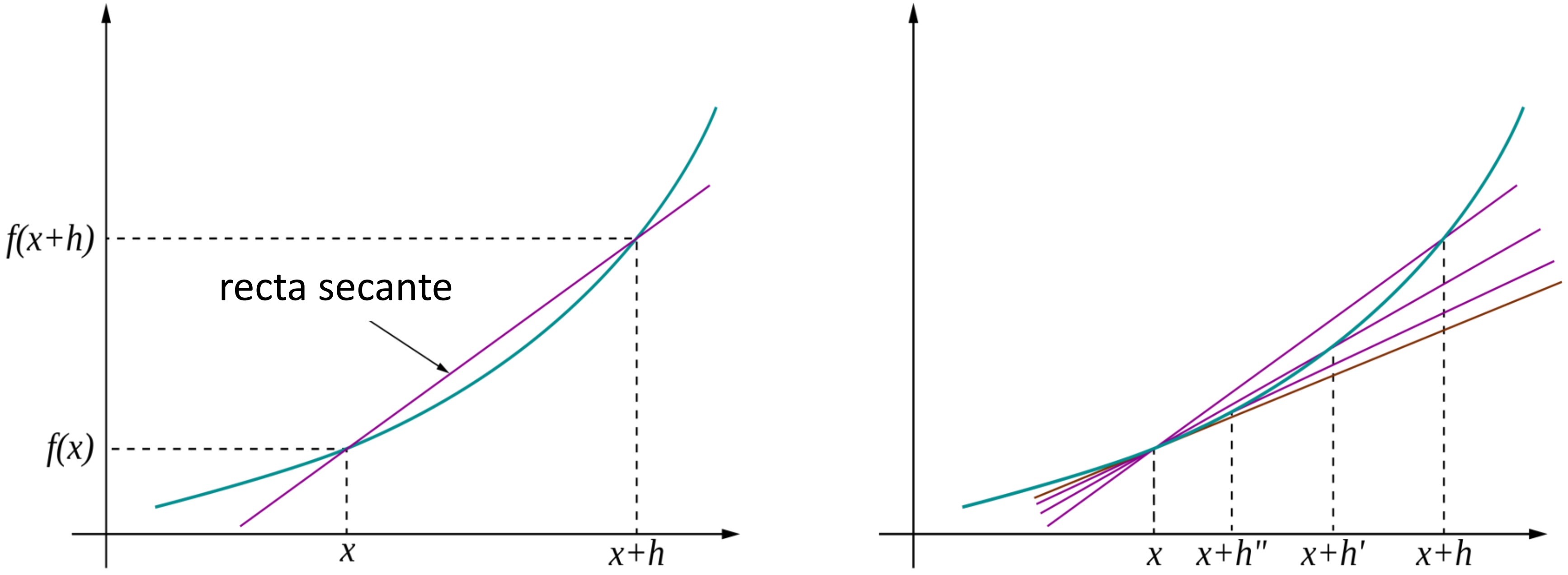
a es el ángulo entre la recta tangente y el eje horizontal.



Si el límite que define $f'(c)$ es infinito,
diremos que f tiene pendiente infinita en c.

Interpretación geomètrica (II)

La recta tangente es el límite de la recta secante que pasa por el punto fijo $(c, f(c))$ y el punto móvil $(c + h, f(c + h))$ cuando h tiende a 0.



Teorema. *f derivable en $c \Rightarrow f$ continua en c.*

Derivadas superiores

Si f es una función derivable en un intervalo $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, entonces la función

$$\begin{aligned} f' : \mathrm{I} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$

es la *primera derivada* de f.

Si f' vuelve a ser derivable en I, entonces la función $f'' : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como la derivada de la derivada; o sea,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = f''(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$$

es la *segunda derivada* de f.

Y, en general, la *derivada n-esima* de f es: $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)$

Derivadas de las funciones elementales

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(k) = 0,}\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},}\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x,}\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a \quad \forall a > 0,}\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0,}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x,}\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x,}\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh x) = \cosh x,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh x) = \sinh x,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{argsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{argcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{argtanh} x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Reglas de derivación

Si f y g son derivables en c y $k \in \mathbb{R}$, entonces

las funciones $k{\cdot}f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y f/g (si $g(c) \neq 0$) son derivables en c. Además:

$$\boxed{(k \cdot f)' = k \cdot f',}$$

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g',}$$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

Regla de la cadena:

Si f es derivable en x y g lo es en $f(x)$, entonces $g \circ f$ es derivable en x:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Derivada de la función inversa

Si f es derivable en x e invertible en un entorno de $x \Longrightarrow f^{-1}$ es derivable en $y = f(x)$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= I(x) = x \\ (f^{-1} \circ f)'(x) &= I'(x) = 1 \\ (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) &= I'(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}}$$

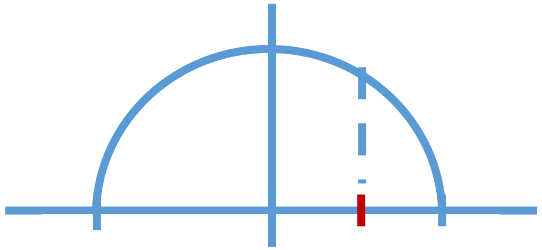
o, equivalentemente, $\boxed{(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$

Derivación implicita

Ejemplo:

Consideramos una función definida explicitamente por $\boxed{y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}}$

O implicitamente por la ecuación $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$



Para calcular la primera derivada $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ tenemos dos opciones:

- *Derivar la fórmula explícita:* $y' = f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$.
- *Derivar la ecuación implícita:* $x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$.

Derivación implícita (II)

Ejemplo:

También podemos calcular las derivadas de orden superior por derivación implícita:

$$x^2+y^2=1 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} x+yy'=0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} 1+(y')^2+yy''=0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} 3y'y''+yy'''=0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} 3(y'')^2+4y'y'''+yy^{(4)}=0,$$

luego despejando las derivadas y', y'', y''', $y^{(4)}$ obtenemos que

$$\boxed{y'=-\frac{x}{y},}\quad \boxed{y''=-\frac{1+(y')^2}{y},}\quad \boxed{y'''=-\frac{3y'y''}{y},}\quad \boxed{y^{(4)}=-\frac{3(y'')^2+4y'y'''}{y},}\ldots$$

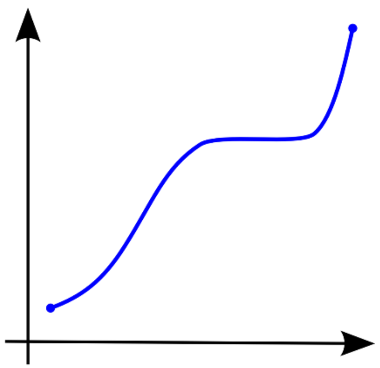
Por ejemplo, si $x=1/\sqrt{2}$, entonces $y=1/\sqrt{2}$,

$$y'=-1,\ y''=-2\sqrt{2},\ y'''=-12,\ y^{(4)}=60\sqrt{2}, \text{ etcétera.}$$

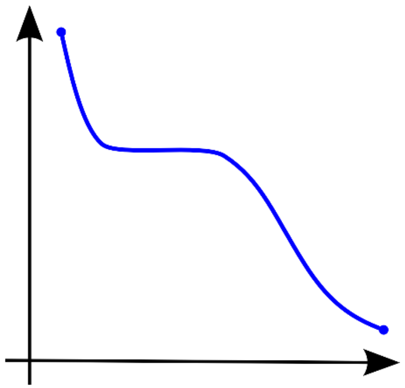
Gráficas de funciones: monotonía

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. En I, la función f es:

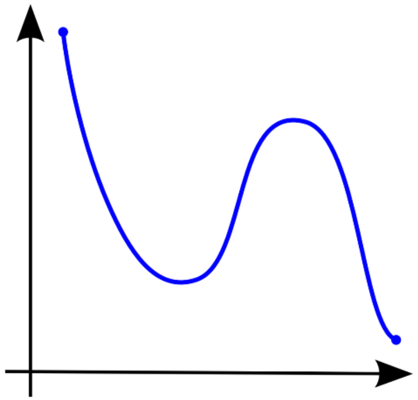
- *Creciente* si y sólo si $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$;
- *Decreciente* si y sólo si $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$;
- *Monótona* si y sólo si f es creciente o decreciente
- *Estrictamente creciente* (decreciente), cuando las desigualdades son estrictas.



Función creciente



Función decreciente

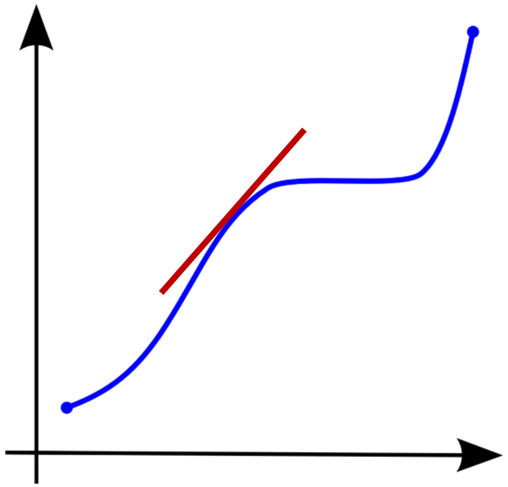


Función no monótona

Monotonía y primera derivada

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b)*. Entonces:*

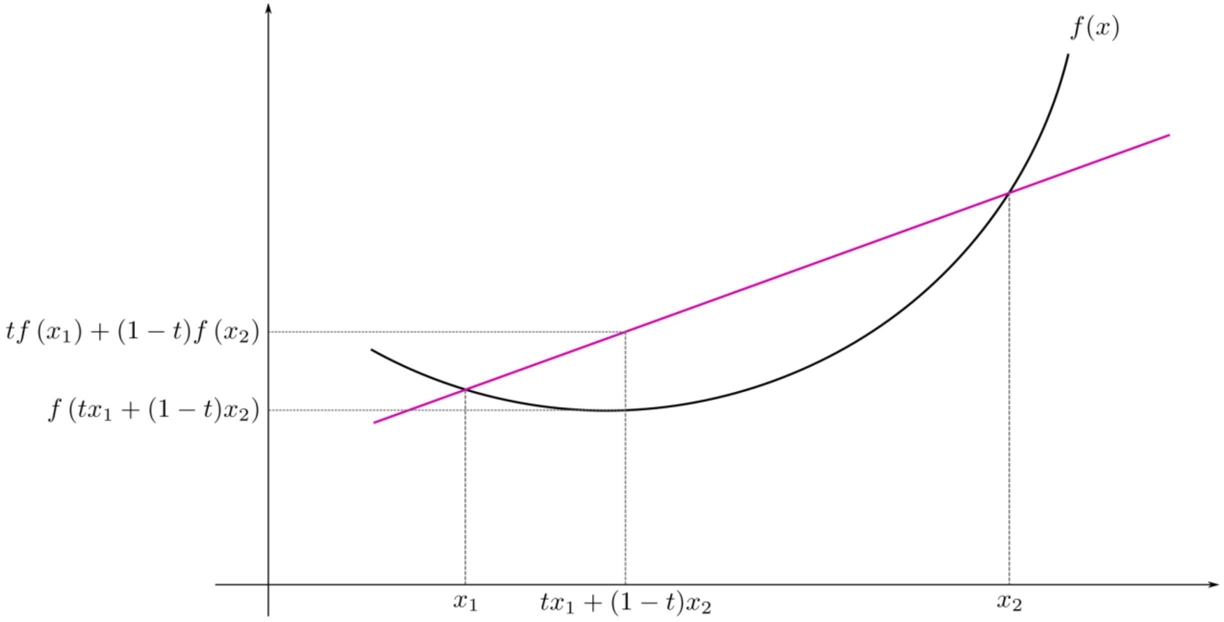
- $f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b) \;\Longrightarrow\; f$ *es creciente en* $[a,b]$;
- $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in(a,b) \;\Longrightarrow\; f$ *es decreciente en* $[a,b]$;
- $f'(x)> 0 \quad \forall x\in(a,b) \;\Longrightarrow\; f$ *estrict. creciente en* $[a,b]$ *y* $\exists\; f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$;
- $f'(x)< 0 \quad \forall x\in(a,b) \;\Longrightarrow\; f$ *estrict. decreciente en* $[a,b]$ *y* $\exists\; f^{-1}:[f(b),f(a)]\to[a,b]$;
- $f'(x)= 0 \quad \forall x\in(a,b) \;\Longrightarrow\; f$ *es constante en* $[a,b]$.



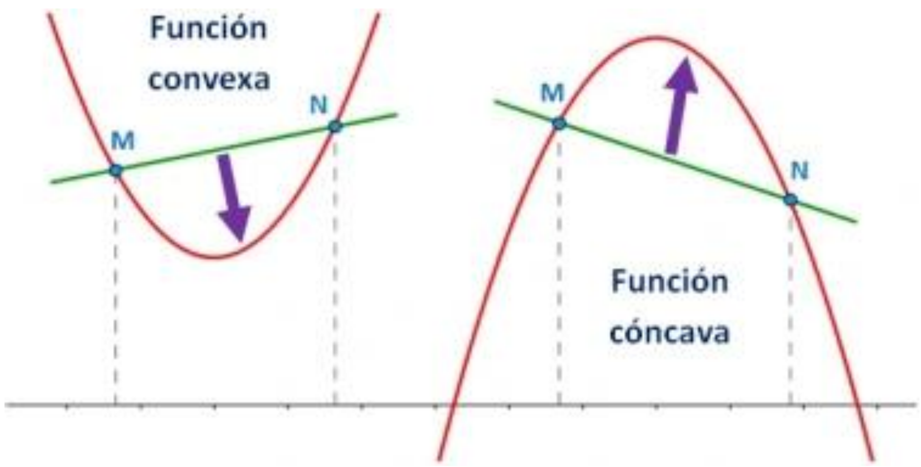
Gráficas de funciones: concavidad

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. En I, la función f es:

- *Convexa* $\Leftrightarrow$ $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad \forall t \in (0,1), \ \forall x_1 < x_2 \in I.$
- *Concava* $\Leftrightarrow$ $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad \forall t \in (0,1), \ \forall x_1 < x_2 \in I.$
- *Extrictamente convexa (còncava)* $\Leftrightarrow$ las desigualdades son extrictas



función convexa



Concavidad y segunda derivada

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$ *y sea* f *dos veces derivable en* (a,b), *entonces:*

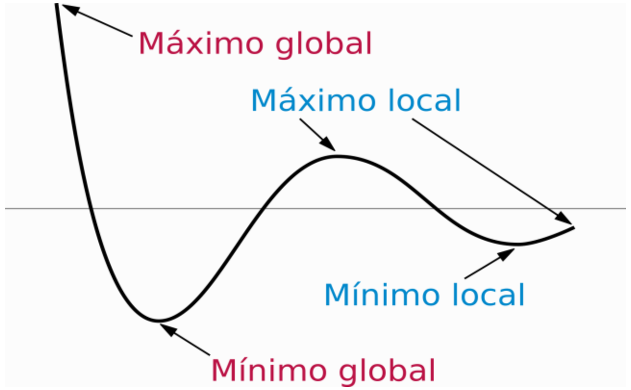
- $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b) \implies f$ *es convexa en* $[a,b]$;
- $f''(x)\leq 0 \quad \forall x\in(a,b) \implies f$ *es concava en* $[a,b]$.
- $f''(x)> 0 \quad \forall x\in(a,b) \implies f$ *es estrictamente convexa en* $[a,b]$;
- $f''(x)< 0 \quad \forall x\in(a,b) \implies f$ *es estrictamente concava en* $[a,b]$;
- $f''(x)= 0 \quad \forall x\in(a,b) \implies f$ *es lineal;*

  o sea, $f(x)=mx+n$ *para algunas* $m,n\in\mathbb{R}$.

Máximos y mínimos: definiciones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I y sea $c \in I$. En I, el punto c es un:

- *Mínimo global (o absoluto)* de $f \iff f(c) \le f(x)$ para toda $x \in I$
- *Máximo global (o absoluto)* de $f \iff f(c) \ge f(x)$ para toda $x \in I$
- *Mínimo local (o relativo)* de $f \iff f(c) \le f(x)$ si $x \in I$ está cerca de c
- *Máximo local (o relativo)* de $f \iff f(c) \ge f(x)$ si $x \in I$ está cerca de c
- *Máximo estricto* o *mínimo estricto* cuando esas desigualdades son extrictas para $x \neq c$
- *Extremo (global / local)* de $f \iff$ es un máximo o mínimo (global/local) de f
- *Punto crítico* de $f \iff f'(c) = 0$ o bien f no es derivable en c
- *Punto de inflexión* de $f \iff f$ cambia el carácter concavo/convexo en c



Máximos y mínimos y derivadas

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I y sea $c \in I$.

- *Si c es un extremo local de f* $\Longrightarrow$ *c es un punto crítico de f;*
- *Si* f *es derivable en* I *y* c *es un extremo local* $\Longrightarrow$ $f'(c) = 0$;
- *Si* f *es dos veces derivable en* I, $f'(c) = 0$ *y* $f''(c) \neq 0$,

$$si \quad f''(c) > 0 \quad \Longrightarrow \quad c \text{ es un mínimo local}$$

$$si \quad f''(c) < 0 \quad \Longrightarrow \quad c \text{ es un máximo local}$$

- *Si* f *es* $n \geq 2$ *veces derivable en* I, $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ *y* $f^{(n)}(c) \neq 0$

n *impar* $\Rightarrow$ *c es un punto de inflexión.*

$$n \text{ par } y \quad f^{(n)}(c) > 0 \quad \Longrightarrow \quad c \text{ es un mínimo local}$$

$$n \text{ par } y \quad f^{(n)}(c) < 0 \quad \Longrightarrow \quad c \text{ es un máximo local}$$

Existencia de extremos en compactos

Los intervalos cerrados y acotados de la forma $I = [a, b]$ se denominan *compactos*.

Teorema. *Si f es una función continua en un intervalo compacto I, entonces*

$$\exists m, M \in I \text{ tales que: } f(m) \leq f(x) \leq f(M) \text{ para todo } x \in I.$$

Es decir, f tiene un mínimo global m y un máximo global M en el intervalo I

El mínimo global m y el máximo global M del teorema anterior:

- pueden no ser únicos o no ser estrictos.
- pueden ser un extremo del intervalo compacto I (aunque $f'(a^+) \neq 0$ y $f'(b^-) \neq 0$)

El teorema no se cumple si el intervalo no es compacto

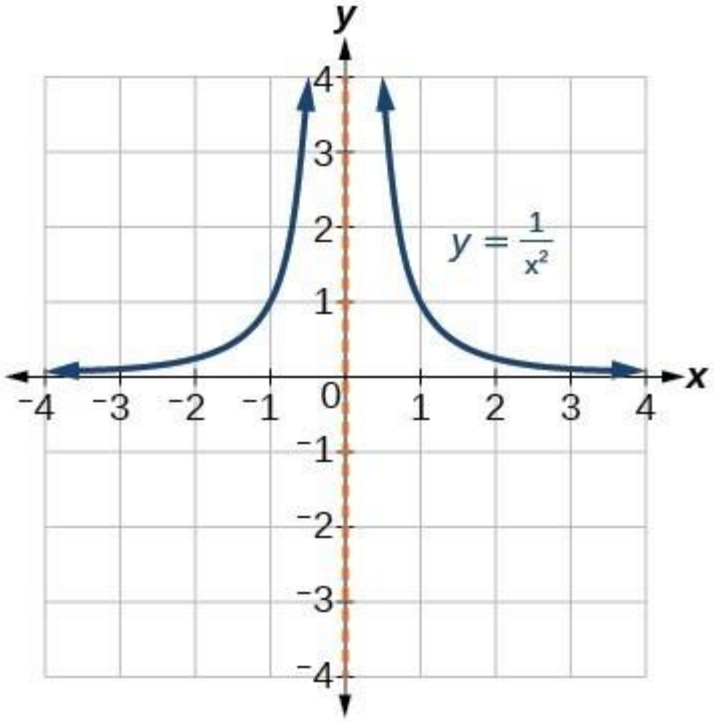
Algunas observaciones

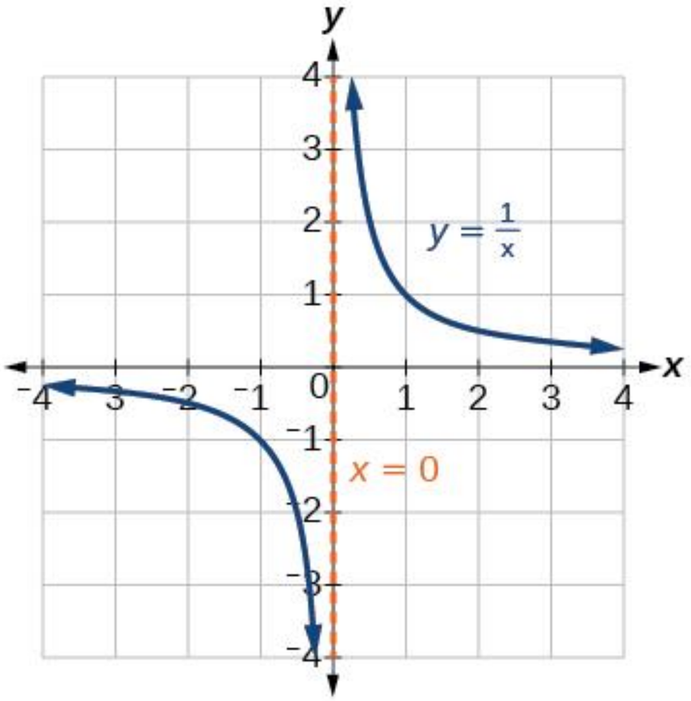
- Una función puede pasar de creciente a decreciente en puntos donde no está definida.

  Por ejemplo, $f(x) = 1/x^2$ en $x = 0$.

- Una funcio puede pasar de concava a convexa en puntós donde no está definida.

  Por ejemplo, $f(x) = 1/x$ en $x = 0$.





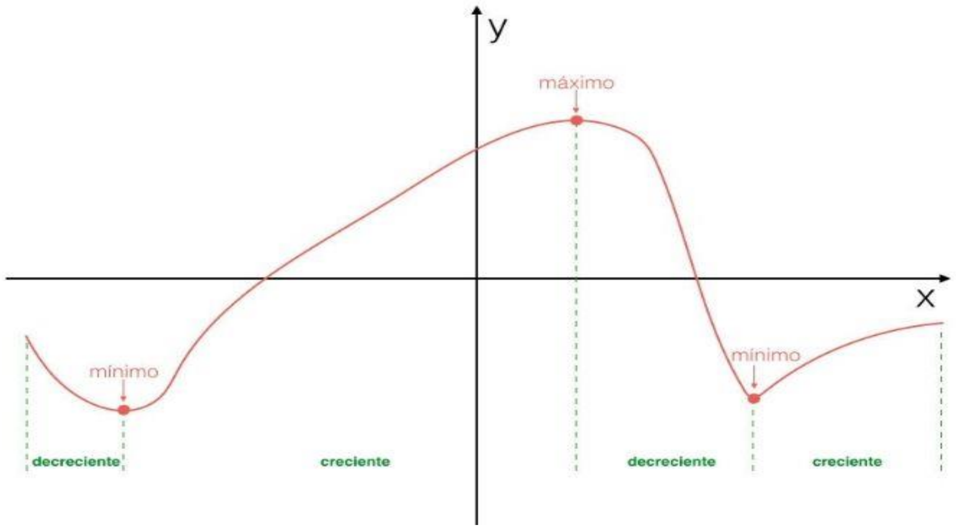
Algunas observaciones (II)

Para determinar los extremos y los puntós de inflexión de una función f hay que considerar separadamente tres tipos de puntos:

(1) puntos frontera del dominio de f,

(2) puntos donde f no sea derivable,

(3) ceros de la derivada de f



Más observaciones

Sólo es recomendable calcular la segunda derivada f'' y derivadas de orden superior para caracterizar extremos y puntos de inflexión si su cálculo es simple.

De lo contrario, es mejor estudiar el signo de la primera derivada f' en un entorno de c.

Si $f'(x)$ es negativa/positiva cuando x se acerca a c por la izquierda/derecha,

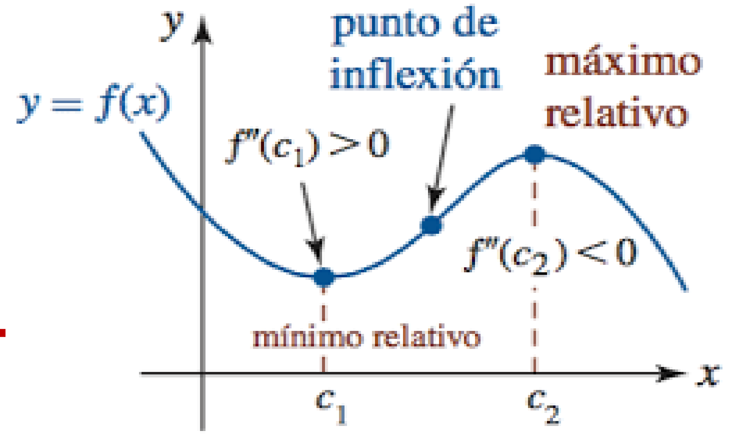
entonces c es un mínimo local.

Si $f'(x)$ es positiva/negativa cuando x se acerca a c por la izquierda/derecha,

entonces c es un máximo local.

Si $f'(c) = 0$ pero $f'(x)$ no cambia de signo en $x = c$,

entonces c es un punto de inflexión.

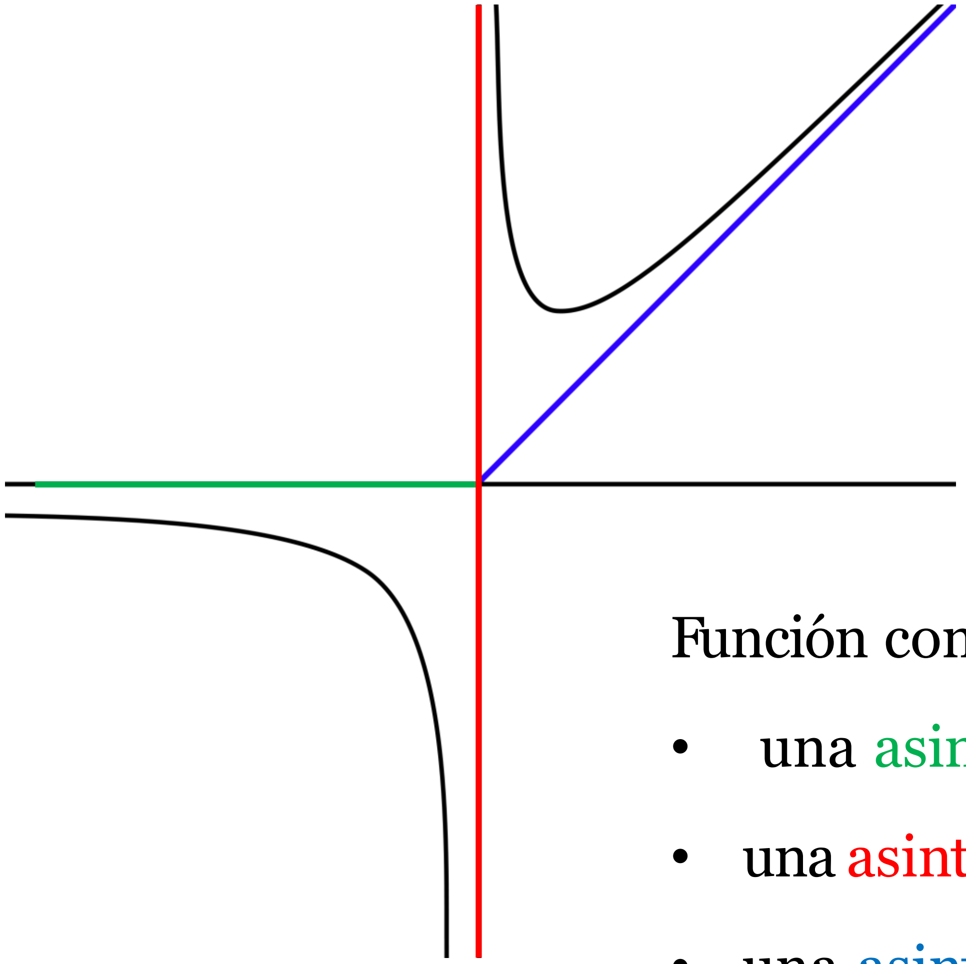


Asíntotas

- La recta $r \equiv \{x = c\}$ es:
  - Una *asíntota vertical* de f $\Leftrightarrow$ los dos límites laterales $\boxed{\lim_{x\to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty}$ (sin importar ni el signo del infinito ni que coincidan los dos límites).
  - Una *asíntota vertical por la derecha* (respectivamente, *por la izquierda*) de f $\Leftrightarrow$ el límite lateral por la derecha (respectivamente, por la izquierda) toma un valor infinito.
- La recta $r \equiv \{y = b\}$ es:
  - Una *asíntota horizontal* de f $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b}$
  - Una *asíntota horizontal hacia más infinito* (respectivamente, *hacia menos infinito*) de f cuando el límite $x \to +\infty$ (respectivamente, $x \to -\infty$) sea igual a b.
- La recta $r \equiv \{y = mx + b\}$ (con $m \neq 0$) es una *asíntota oblicua* de f $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx - b) = 0} \Leftrightarrow \boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right)}$$

Asíntotas



Función con:

- una asintóta horizontal hacia menos infinito en $\{y = 0\}$,
- una asintóta vertical en $\{x = 0\}$
- una asintóta oblicua hacia más infinito en $\{y = x\}$.

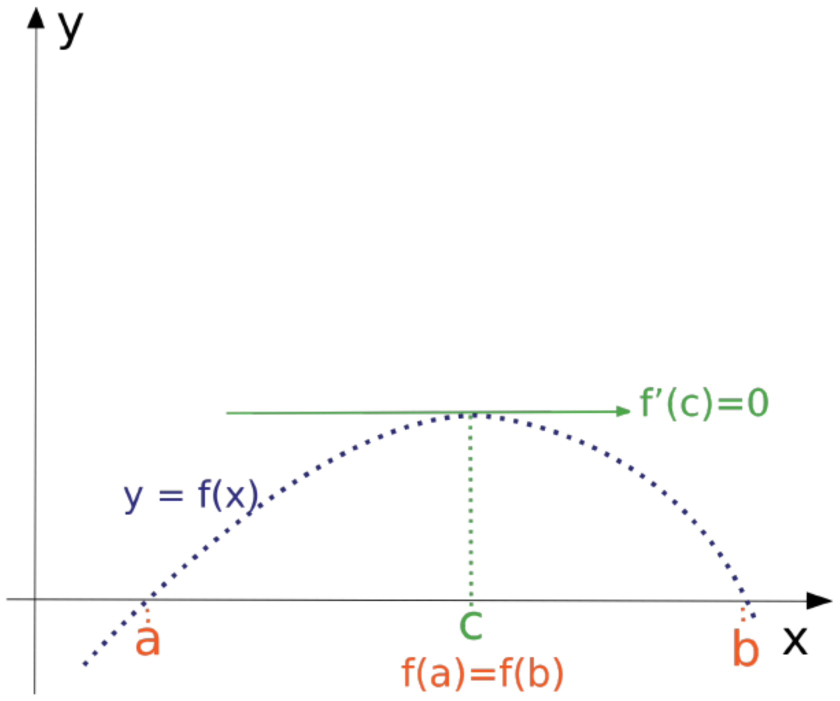
Teorema de Rolle

Teorema

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b) *tal que* $f(a) = f(b)$,

entonces existe algún punto $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Interpretación geométrica:
Si una función derivable tiene el mismo valor en dos puntos diferentes a i b, entonces existe algún punto intermedio $c \in (a,b)$ donde su recta tangente es horitzontal



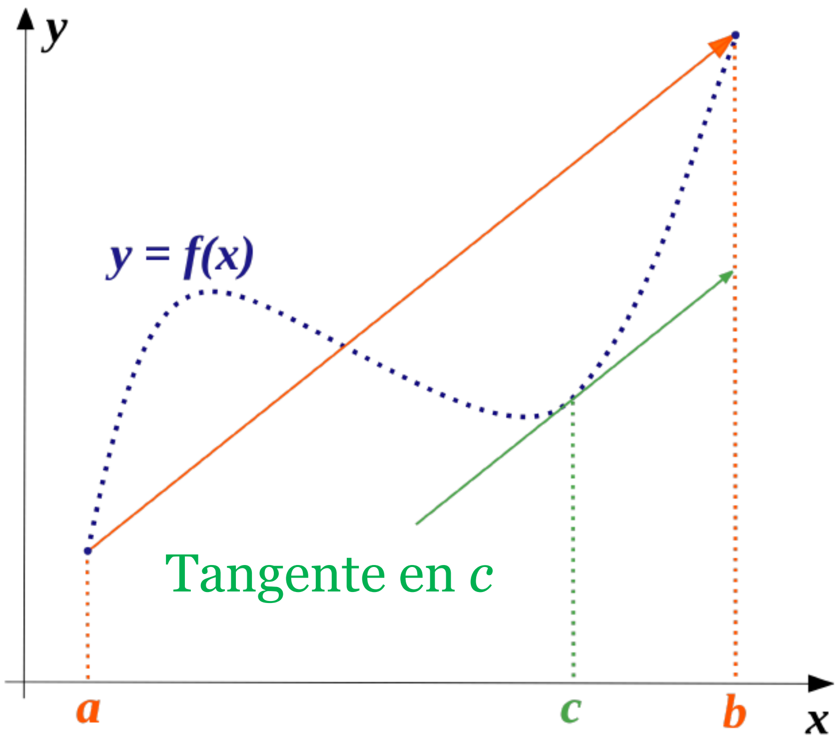
Teorema del valor medio

Teorema

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b),

entonces existe algún punto $c \in (a,b)$ *tal que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Interpretación geométrica:
Si una función es continua en [a,b] y derivable en (a,b), entonces existe algún punto intermedio $c \in (a,b)$ donde su recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Polinomio de Taylor. Definición

Si f es una función N veces derivable en un punto c, entonces el *polinomio de Taylor* de grado N de la función f en el punto c es:

$$\boxed{P_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2}(x-c)^2+\frac{f'''(c)}{6}(x-c)^3+\cdots+\frac{f^{(N)}(c)}{N!}(x-c)^N}$$

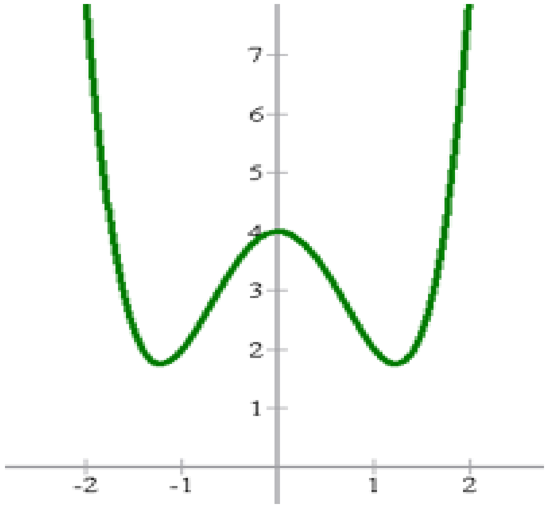
Aproximamos la función $f(x)$ por un polinomio que tenga las mismas derivadas (hasta un cierto orden N) que la función original $f(x)$ en un punto dado c.

Si el desarrollo es en el punto $c=0$, entonces se llama *polinomio de Maclaurin*.

La diferencia $\boxed{R_N(x)=f(x)-P_N(x)}$ es el *residuo de Taylor* de grado N de la función f en el punto c.

Polinomio de Taylor. Observaciones

- $P^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$ para todo $n = 0, 1, \ldots, N$.
- Si $f(x)$ es una función par/impar $\longrightarrow$ sus polinomios de Maclaurin sólo tienen potencias de grado par/impar.



Función par

Si $f(x)$ es una función par $\longrightarrow$ $f'(0)=0$

$f'(x)$ es impar, $f''(x)$ es par…

$f'''(0)=0$…

Polinomio de Taylor. Ejemplos

Función	Polinomios de Maclaurin
e^x	$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^N}{N!}$
$\cos x$	$P_{2N}(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^N \frac{x^{2N}}{(2N)!}$
$\sin x$	$P_{2N+1}(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!}$
$\ln(1-x)$	$P_N(x) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^N}{N}$
$\arctan x$	$P_{2N+1}(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{2N+1}$
$\frac{1}{1-x}$	$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N$
$(1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$	$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots$

Cálculo de límites con Taylor

- Muchos límites se pueden calcular usando los *desarrollos de Taylor* (o *de Maclaurin* si $c = 0$) de las funciones implicadas.
- La mayor dificultad de este método consiste en escoger hasta que orden se debe desarrollar cada función para determinar el valor del límite.
- A veces conviene realizar el cambio de variables $t = x - c$ para trabajar con los desarrollos de Maclaurin, que suelen ser más simples.

Ejemplos:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\mathrm{O}(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \mathrm{O}(x^2)\right) = 1;$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-x^2/2+\mathrm{O}(x^4)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(1/2 + \mathrm{O}(x^2)\right) = 1/2;$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\mathrm{O}(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \mathrm{O}(x)\right) = 1;$

Fórmula de Lagrange

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funcion* $N + 1$ *veces derivable, sea* $c \in (a, b)$.

Sea $R_N(x) = f(x) - P_N(x)$ *el residuo de Taylor de grado* N *de la función* f *en el punto* c.

Entonces, para todo $x \in (a, b)$ *existe un punto* $\xi = \xi(x) \in (c, x)$ *tal que*

$$\boxed{R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-c)^{N+1}}$$

Escribiremos $f(x) = P_N(x) + o\left[(x-c)^{N+1}\right]$ [Taylor]

$f(x) = P_N(x) + o\left[(x)^{N+1}\right]$ [Maclaurin]

Y se dice que el residuo $R_N(x)$ es “de orden $N + 1$”

Series de Taylor

¿Qué pasa cuando el grado de los polinomios de Taylor tiende a infinito?
Algunas veces el límite $N \to +\infty$ da lugar a la igualdad válida en intervalos adecuados:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(c)}{N!}(x-c)^N + \cdots$$

Estas expresiones con sumas infinitas son las *series de Taylor*.
(Las estudiamos en el Tema 4)

Regla de L'Hôpital

Sean f *y* g *dos funciones derivables en* $I\setminus\{c\}$,
donde I *es un intervalo abierto que contiene a c.*
Entonces:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \in \left\{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right\} \ \& \ \exists \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Esta regla también vale para los límites $\lim_{x\to c^{\pm}}$ *y para los límites* $\lim_{x\to\pm\infty}$.

El símbolo ∞/∞ denota de forma compacta las cuatro posibles indeterminaciones $\pm\infty/\pm\infty$.

- La regla sólo es válida para las indeterminaciones ∞/∞ y $0/0$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{e^x}{x} = \frac{1}{0+} = +\infty \neq 1 = \lim_{x\to 0+}\frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital. Observaciones

- Es usual tener que aplicar varias veces seguidas la regla de L'Hôpital

Ejemplo: calcular $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!x^0}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

- La no existencia de $\lim_{x\to H}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ no implica la no existencia de $\lim_{x\to H}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Ejemplo: $f(x) = x + \sin x, \;\; g(x) = x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$$

pero, en cambio, si intentamos aplicar la regla de L'Hôpital obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1} = 1 + \lim_{x\to+\infty}\cos x\,.$$

Regla de L'Hôpital. Comparar f(x) $\prec$ g(x)

La regla de L'Hôpital nos permite comparar la velocidad de crecimiento de funciones que tienden a más infinito cuando $x \to +\infty$.

Notación. $f(x) \prec g(x)$ cuando $x \to +\infty$ significa que $\lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x) = 0$;

(significa que la función $f(x)$ crece mucho más lentamente que la función $g(x)$ cuando $x \to +\infty$)

El logaritmo crece más lentamente que cualquier potencia de exponente positivo.
Las potencia de exponente positivo crecen más lentamente que una exponencial de base >1.
Concretamente, si $k \in \mathrm{R}$, $0 < \alpha < \beta$ y $1 < a < b$, entonces (cuando $x \to +\infty$) se verifica

$$k \prec \ln(\ln x) \prec \ln x \prec x^{\alpha} \prec x^{\beta} \prec a^{x} \prec b^{x} \prec x^{x}$$