Tema 3

Integración

Transparencias de Carmen Hernando siguiendo los apuntes de la asignatura de Cálculo I.

Integrales indefinidas. Definición

$$\boxed{F : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ es una } \textit{primitiva} \text{ de } f : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ cuando } F'(x) = f(x), \ \forall x \in (a,b).}$$

Usamos el símbolo $\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx}$ para denotar que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

- Todas las primitivas de f difieren entre ellas en una constante.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c,}$$

donde la constante libre $c \in \mathbb{R}$ recibe el nombre de constante de integración.

- *f continua $\Rightarrow f$ admite primitiva.*

Tabla de Integrales inmediatas

$$\int u^\alpha \,\mathrm{d}u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \forall \alpha \neq -1, \qquad \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c, \qquad \int \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + c,$$

$$\int a^u \,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + c \quad \forall a > 0, \qquad \int \sin u \,\mathrm{d}u = -\cos u + c, \qquad \int \cos u \,\mathrm{d}u = \sin u + c,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \tan u + c, \qquad \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c, \qquad \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan u + c,$$

$$\int \sinh u \,\mathrm{d}u = \cosh u + c, \qquad \int \cosh u \,\mathrm{d}u = \sinh u + c, \qquad \int \frac{\mathrm{d}u}{\cosh^2 u} = \tanh u + c,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{argsinh} u + c, \qquad \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{argcosh} u + c, \qquad \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \operatorname{argtanh} u + c.$$

Cambio de variable

Si $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = \varphi(x) \\ \mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + c = F(\varphi(x)) + c.}$$

O el proceso inverso:

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Ejemplo:

$$\int \sin^n x \cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = \sin x \\ \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x + c$$

Integración por partes

$$(u\cdot v)' = u\cdot dv + v\cdot du$$

$$u\cdot v = \int (u\cdot v)' = \int u\cdot dv + \int v\cdot du$$

$$\boxed{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

Ejemplo:

$$\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^2, \;\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \;\; v = \mathrm{e}^x \end{array} \right] = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x, \;\; \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \;\; v = \mathrm{e}^x \end{array} \right]$$

$$= x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \right) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + c$$

Integrales racionales

Una *función racional* es un cociente de polinomios:

$$f(x) = p(x)/q(x) \text{ con } p(x), q(x) \in \mathrm{R}[x].$$

Las integrales de estas funciones se denominan *integrales racionales*.

Vamos a ver como descomponemos una función racional como suma de *fracciones simples* (que son fracciones que su integral es directa)

- Si $gr\,(p(x)) \geq gr(q(x)) \implies \begin{array}{r|l} p(x) & q(x) \\ \hline r(x) & c(x) \end{array} \implies p(x) = q(x)\cdot c(x) + r(x)$

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}} \qquad \text{con } gr(r(x)) \leq gr(q(x))$$

Ejemplo:

$$\boxed{t^3+t = (t+1)(t^2 - t + 2) - 2}$$

$$\int \frac{t^3+t}{t+1}\,dt = \int (t^2 - t + 2)\,dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|1+t| + c$$

Integrales racionales (II)

➢ Si $gr\,(p(x)) < gr(q(x)) \implies$ Descomponemos $q(x)$ en factores irreducibles $\implies$

$$q(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{m_r} \cdot (x^2+b_1x+c_1) \cdot \ldots \cdot (x^2+b_sx+c_s)$$

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{r1}}{x-a_r} + \cdots + \frac{A_{rm_r}}{(x-a_r)^{m_r}} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{B_sx+C_s}{x^2+b_sx+c_s}}$$

Ejemplo: $p(x) = -50x - 10, \qquad q(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2.$

Descomponemos $q(x)$ en factores irreducibles $\implies$ $q(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2+1)$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D+Ex}{x^2+1}$$

Integrales racionales (III)

Obtenemos las constantes *A, B, C, D,* y *E* imponiendo que se cumpla la igualdad.

Calculamos la integral racional como suma de una serie de integrales de fracciones simples:

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)} = \ln|x-a| + c} \quad \boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + c} \quad \boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + c}$$

Ejemplo: $p(x) = -50x - 10,\qquad q(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2+1)$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D+Ex}{x^2+1} \iff A = 5,\ B = -10,\ C = 2,\ D = 9 \text{ y } E = -7$$

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - 10\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + 9\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - 7\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= 5\ln|x-1| + \frac{10}{x-1} + 2\ln|x+2| + 9\arctan x - \frac{7}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

Integrales racionales (IV)

Observación:

En general los sumandos del tipo: $\dfrac{Bx + C}{x^2 + b\,x + c}$

Los troceamos en dos de forma que la integral del primero da lugar a un logaritmo y la del segundo genera un arco tangente.

$$\boxed{\frac{Bx + C}{x^2 + b\,x + c} = \frac{B}{2}\,\frac{2x + b}{x^2 + b\,x + c} + \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}}$$

Si las raices de $x^2 + b\,x + c$ son $\alpha \pm \beta i$, entonces:
$x^2 + b\,x + c = (x-\alpha)^2 + \beta^2$

Ejemplo:

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - \arctan(x+1) + c.$$

Integrales trigonométricas

Son integrales de una expresión racional en las funciones sen x y cos x: $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\mathrm{d}x$.
Recordamos algunas relaciones trigonométricas:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad \sin 2x = 2\cos x \sin x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Utilizando estas relaciones y adecuados cambios de variable, podemos transformar siempre una integral trigonométrica en una integral racional. Los cambios que realizaremos serán:

- Caso R impar en el seno: $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.
- Caso R impar en el coseno: $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.
- Caso R par en seno y coseno: $t = \tan x$, $x = \arctan t$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$,
  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ y $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
- Caso R general: $t = \tan(x/2)$, $x = 2\arctan t$,
  $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Integrales trigonométricas (II)

- Caso R impar en el seno: $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$.

Ejemplo:

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\arctan t + c = -\arctan(\cos x) + c$$

- Caso R impar en el coseno: $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \,\mathrm{d}x$.

Ejemplo:

$$\int \cos^3 x \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int (1-t^2)t^{2n}\,\mathrm{d}t = \int t^{2n}\,\mathrm{d}t - \int t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + c = \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} - \frac{\sin^{2n+3} x}{2n+3} + c,$$

Integrales trigonométricas (III)

- Caso R par en seno y coseno: $t = \tan x,\ x = \arctan t,\quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$
  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ y $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

Ejemplo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \left[\begin{array}{c} t = \tan x \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Integrales trigonométricas (IV)

- Caso R general: $t = \tan(x/2)$, $x = 2\arctan t$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ejemplo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x - \cos x} = \left[\begin{array}{cc} t = \tan(x/2), & \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + c\ln\left|\frac{\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\right| + c.$$

Integrales con $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$

Se suelen calcular mediante el cambio $\boxed{x = \alpha \sin t,\ \mathrm{d}x = \alpha \cos t\,\mathrm{d}t}$

Ejemplo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \left[\begin{array}{l} x = 4\sin t \\ \mathrm{d}x = 4\cos t\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \frac{4\cos t\,\mathrm{d}t}{16\sin^2 t \cdot 4\cos t} = \frac{1}{16}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$

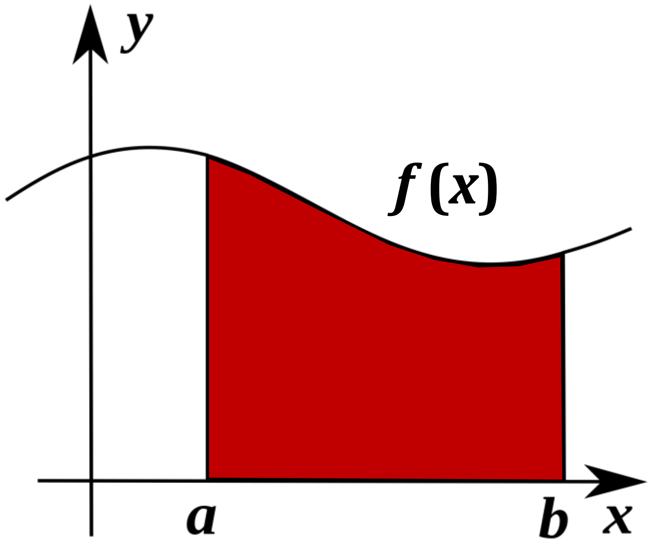
Caso R par en seno y coseno

$$= \left[\begin{array}{l} u = \tan t \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ \sin t = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \end{array}\right] = \frac{1}{16}\int \frac{1+u^2}{u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{16}\int u^{-2}\,\mathrm{d}u$$

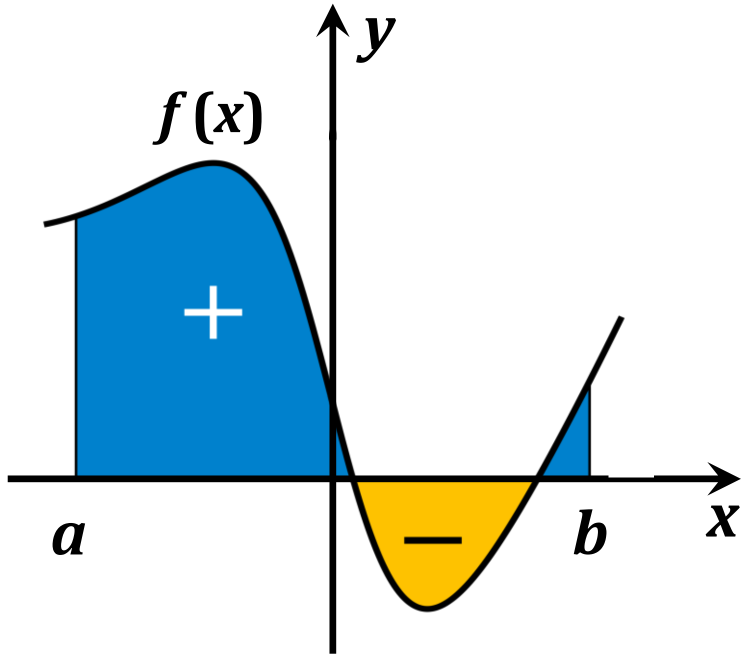
$$= \frac{-1}{16u} + c = \frac{-1}{16\tan t} + c = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + c.$$

Integrales definidas

Vamos a calcular area comprendida entre el eje horizontal y la gráfica de una función continua f definida en un intervalo compacto $[a, b]$



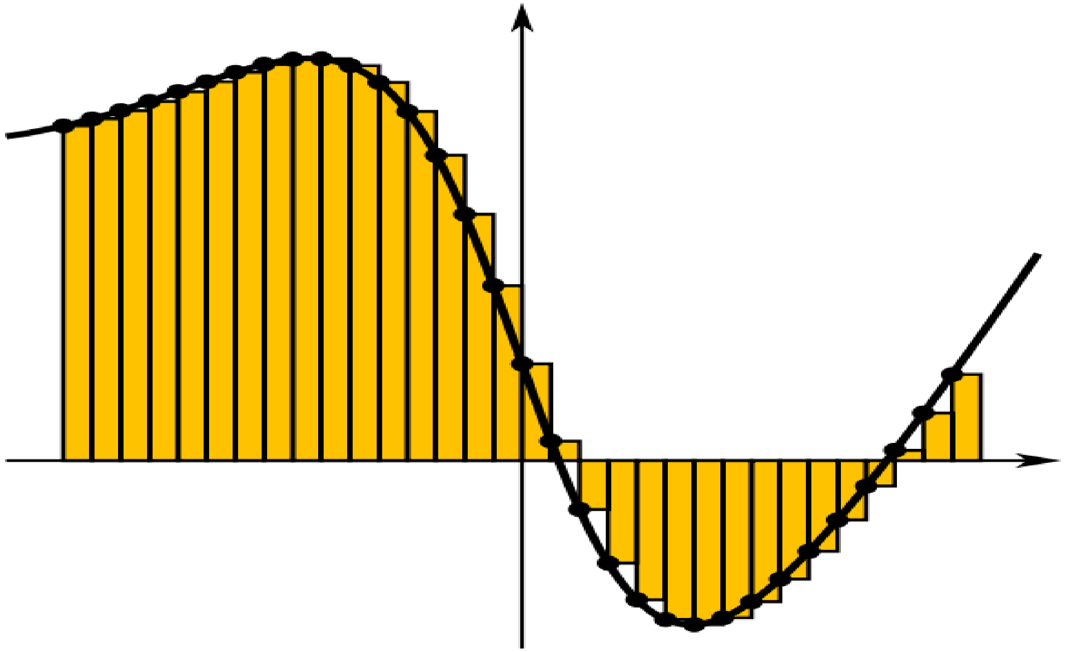
Integral de una función positiva



Integral de una función con cambios de signo

Integrales definidas

La idea bàsica del símbolo $\int_b^a f(x)dx$ es obtener el área asociada a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como el límite de la suma de las áreas con signo de ciertos rectángulos con bases cada vez menores. Para eso necesitamos fijar las bases de los rectángulos (concepto de partición) y las alturas de los rectángulos (concepto de suma de Riemann).



Integrales definidas

Una *partición* de un intervalo compacto $[a, b]$ es un conjunto de puntos ordenados

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

La cantidad $\|\Delta x\| = \max_{1 \le j \le N} \Delta x_j$, con $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, es el *tamaño* de la partición.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función.

Dada una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$ y unos puntos arbitrarios $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, N$, entonces

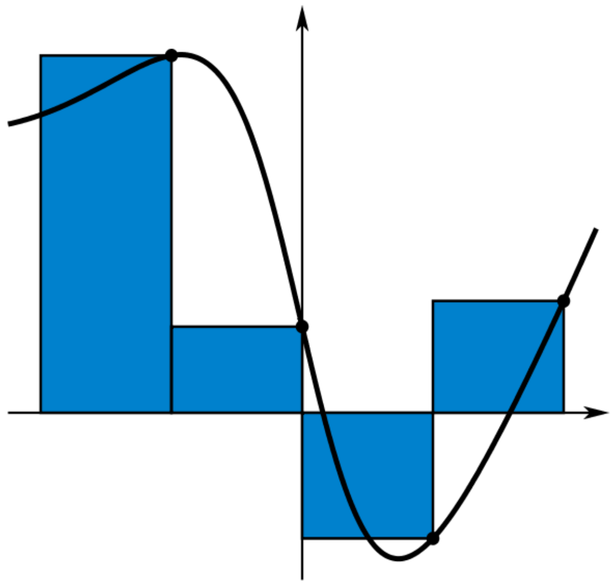
$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} f(c_j)\Delta x_j}$$

es una *suma de Riemann* de la función f en el intervalo $[a, b]$.

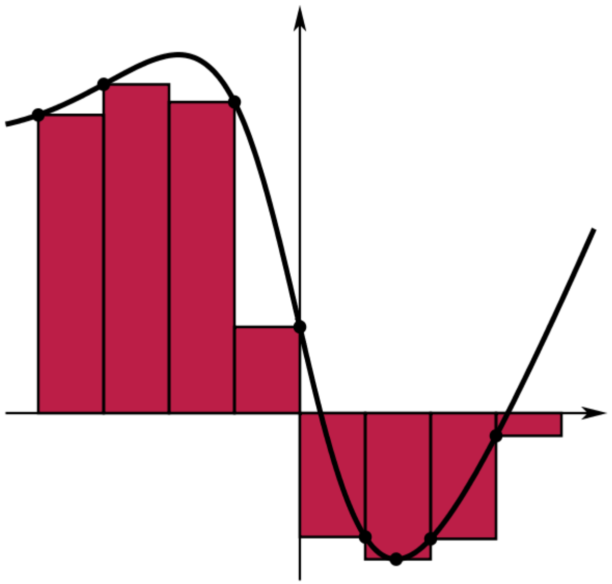
La anterior suma de Riemann se puede interpretar como la suma de las áreas De los N rectángulos de bases Δx_j y alturas $f(c_j)$

Integrales definidas

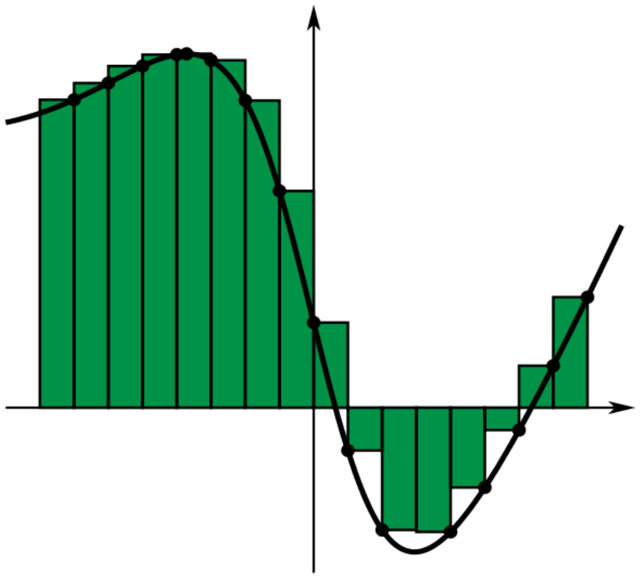
Existen sumas de Riemann de diferentes tipos, dependiendo de la elección del punto $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$.



c_j es el extremo derecho en el intervalo



c_j es el mínimo de f en el intervalo



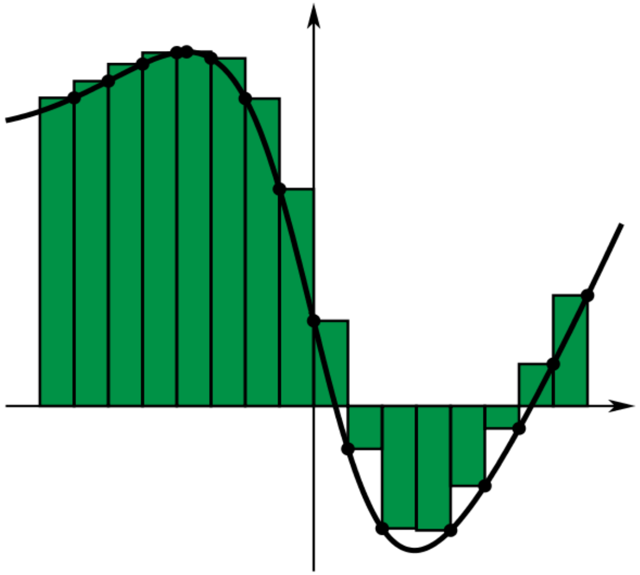
c_j es el máximo de f en el intervalo

Integrales definidas

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.
Diremos que f es *integrable (en el sentido de Riemann)* si existe el límite de sus sumas de Riemann cuando $\|\Delta x\| \to 0$ y entonces escribimos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(c_j)\Delta x_j .}$$

es la *integral definida de la función f en el intervalo* $[a, b]$



$$\boxed{f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow f \text{ integrable en } [a, b]}$$

Propiedades básicas de las integrales definidas

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

- *Aditividad:* Si $a < c < b$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

- *Linealidad:* Si $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, entonces

$$\boxed{\int_b^a (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_b^a f(x)\,dx + \beta \int_b^a g(x)\,dx}$$

- *Monotonicidad:* Si $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

Regla de Barrow

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua y* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una primitiva de* f*, entonces*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región encerrada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a, b > 0$.

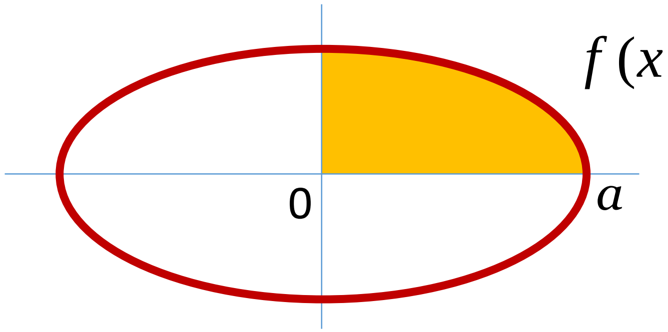
Regla de Barrow

Ejemplo:

Calcular el área de la región encerrada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a, b > 0$.

La elipse es simétrica respecto ambos ejes de coordenadas, luego:

área total = 4 área de la parte de la elipse contenida en el primer cuadrante



$$f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$$

$$\text{Área} = 4\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} x = a\sin t,\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \\ x = 0 \to t = 0,\ x = a \to t = \pi/2 \end{array}\right] =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2ab\int_0^{\pi/2} \big(1 + \cos(2t)\big)\,\mathrm{d}t = ab\Big[2t + \sin(2t)\Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \pi ab.$$

Teorema del valor medio

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, su *promedio* es: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Teorema del valor medio para integrales

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua* $\Longrightarrow$ *existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $\bar{f} = f(c)$,

equivalentemente,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c).}$$

Ejemplo:

La función $f(x) = 3x^2 - 2x$ es continua.

a) En el intervalo compacto $[1, 4]$ ¿cuál es el promedio de f?

b) Calcular $c \in [1, 4]$ tal que $\bar{f} = f(c)$.

Teorema del valor medio

Ejemplo:

La función $f(x) = 3x^2 - 2x$ es continua.

a) En el intervalo compacto $[1, 4]$ ¿cuál es el promedio de f ?^{3}

b) Calcular $c \in [1, 4]$ tal que $\bar{f} = f(c)$.

a) En [1, 4], el *promedio* de f es:

$$\bar{f} = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[x^3 - x^2\right]_{x=1}^{x=4} = (64 - 16 - 1 + 1)/3 = 16$$

b) Por el TVM, sabemos que existe algún punto $c \in [1, 4]$ tal que:

$$f(c) = 3c^2 - 2c = \bar{f} = 16 \quad \Longrightarrow \quad 3c^2 - 2c - 16 = 0.$$

$$c_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 16 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16 \cdot 3}}{3} = \frac{1 \pm 7}{3} \quad \Rightarrow c_- = -2 \notin [1, 4], \; c_+ = 8/3 \in [1, 4].$$

Así pues, $c = 8/3$ es el punto predicho por el teorema del valor medio

Teorema fundamental del cálculo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

La *función integral* de f es la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

Teorema fundamental del cálculo

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua y* $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *,entonces* F *es derivable y* $F' = f$.

Ejemplo:

Dada la función $f(t) = \ln^2(t + e)$, continua en el intervalo $[0, +\infty)$,

calcular la recta tangente en x=0 de la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

Teorema fundamental del cálculo

Ejemplo:

Dada la función $f(t) = \ln^2(t + \mathrm{e})$, continua en el intervalo $[0, +\infty)$, calcular la recta tangente en x=0 de la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

La recta tangente en el punto $x = c$ es: $y = F(c) + F'(c)(x - c)$

En nuestro caso $c = 0$, luego $y = F(0) + F'(0)(x - 0)$

$$F(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad F'(0) = f(0) = \ln^2 \mathrm{e} = 1^2 = 1.$$

Así pues, la recta tangente es $y = 0 + 1(x - 0) = x$

$$y = x$$

Regla de Leibniz

Si f *es continua,* α *y* β *son derivables y* $G(x)=\int_{\alpha(x)}^{b(x)} f(t)dt,$

entonces G *es derivable y*

$$\boxed{G'(x) = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)}$$

Ejemplo:

La derivada de $G(x) = \int_{a}^{x^3} \operatorname{sen} t \, dt \quad \Longrightarrow \quad G'(x) = \operatorname{sen}(x^3)\cdot 3x^2$

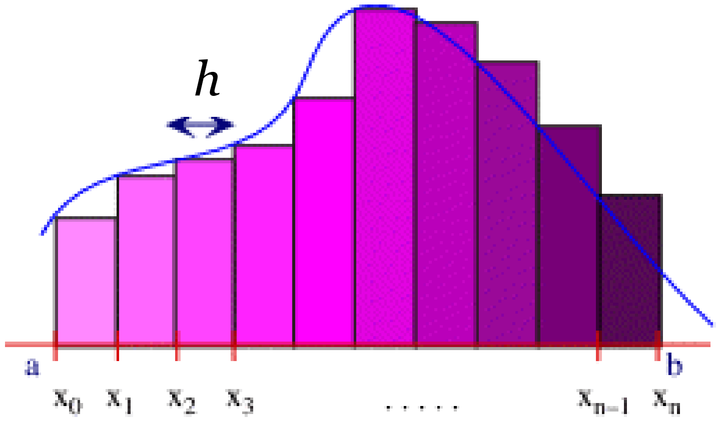
Integración númerica

Se trata de aproximar la integral de una fucnión por diferentes métodos.

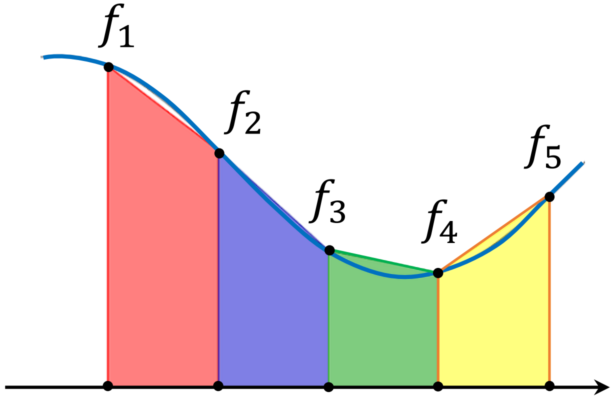
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable.
Consideramos la partición uniforme de N intervalos dada por

$$x_j = a + jh, j = 0, \ldots, N,$$

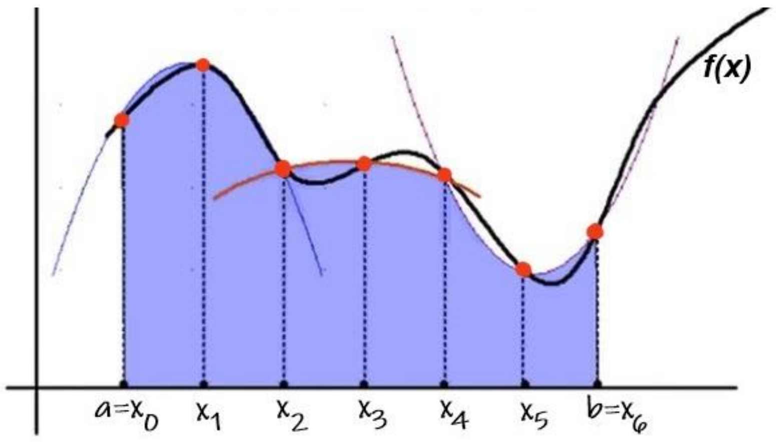
donde la cantidad $h = (b - a)/N$ recibe el nombre de *paso de integración*. Sea $f_j = f(x_j)$.



Rectángulos



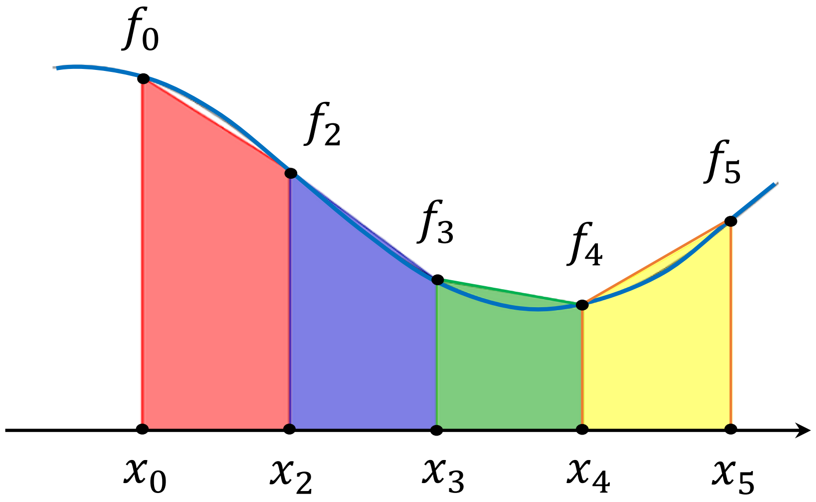
Trapecios



Parábolas

Método de los trapecios

$$T_N\,(f\,;[a,b]) = \frac{b-a}{2N}\,(f_0 \; + 2f_1 \; + \cdots + 2f_{N-1} + f_N)$$



Tomamos como valor aproximado $T_N(f\,;[a,b])$ que es igual al área debajo de la linea poligonal que une los puntos (x_j, f_j) para $j = 0,\ldots,N$.

$T_N(f\,;[a,b])$ es la suma de las áreas de los trapecios:
de bases $\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = h = (b-a)/N$
y alturas f_{j-1}, f_j para $j = 1,\ldots,N$.

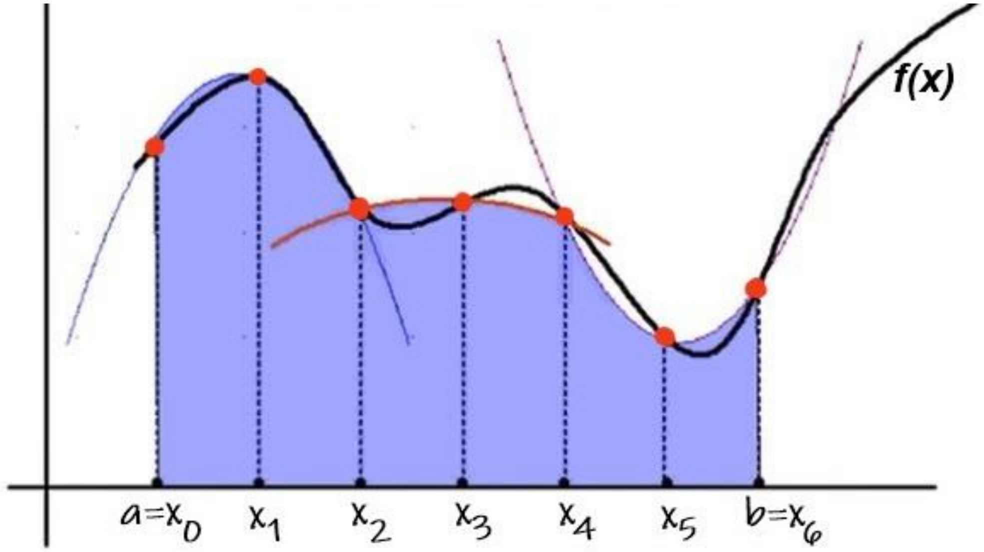
Si f es convexa $\Longrightarrow$ $T_N(f;[a,b]) \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$

Si f es concava $\Longrightarrow$ $T_N(f;[a,b]) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Método de Simpson

$$S_N(f\,;[a,b]) = \frac{b-a}{3N}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N\right)$$

En este método se necesita que N sea par



$S_N(f\,;[a,b])$ es igual al área debajo de la función construida por $N/2$ arcos de parábolas.

El arco j-ésimo interpola los puntós:

$$(x_{2j-2}, f_{2j-2}),\ (x_{2j-1}, f_{2j-1}) \text{ y } (x_{2j}, f_{2j})$$

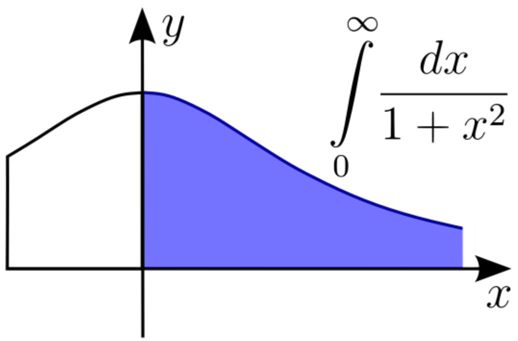
para $j = 1, \ldots, N/2$.

Es más preciso que el método de los trapecios

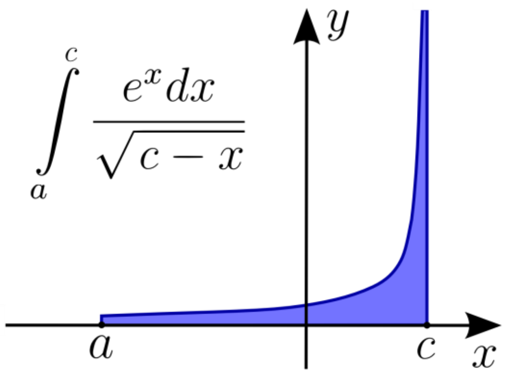
Integrales impropias

Las *integrales impropias* son integrales de los tipos siguientes:

- De *primera especie:* el intervalo de integración tiene longitud infinita
- De *segunda especie:* el integrando alcanza un valor infinito en algún punto
- De *tercera especie:* ambas cosas a la vez.



De primera especie



De segunda especie

Una integral impropia puede tener un valor finito, un valor ($\pm$) infinito o no tener ningún valor definido.

Integrales impropias: convergencia

Dada una función $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ que sea integrable en todos los intervalos compactos de la forma $[a, M]$, con $M > a$, diremos que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ es:

- *convergente* cuando existe y es finito el límite $\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$
- *divergente* en caso contrario (esto es, cuando no existe o no es fínito este límite)

Si existe el límite, entonces:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Tipos de integrales impropias

Función	Intervalos compactos	Límite que da la integral impropia	Impropia	Especie
$f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$	$[a,M],\ \forall M>a$	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$	En $+\infty$	1ª
$f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$	$[N,b],\ \forall N<b$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{N\to-\infty} \int_N^b f(x)\,\mathrm{d}x$	En $-\infty$	1ª
$f:(a,b]\to\mathbb{R}$	$[\alpha,b],\ \forall\alpha\in(a,b]$	$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$	En a	2ª
$f:[a,b)\to\mathbb{R}$	$[a,\beta],\ \forall\beta\in[a,b)$	$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$	En b	2ª

Cualquier otro tipo de integral impropia se puede poner como suma de integrales de estos cuatro tipos.

Ejemplo importante

$$\boxed{\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, & \text{si } \alpha > -1 \text{ (convergente)} \\ +\infty, & \text{si } \alpha \leq -1 \text{ (divergente)} \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{-1}{\alpha+1}, & \text{si } \alpha < -1 \text{ (convergente)} \\ +\infty, & \text{si } \alpha \geq -1 \text{ (divergente)} \end{cases}}$$

Veamos como se prueban estos resultados. Si $\alpha \neq -1$, tenemos que

$$\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=\epsilon}^{x=1} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1-\epsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, & \text{si } \alpha > -1 \\ +\infty, & \text{si } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=M} = \lim_{M\to+\infty} \frac{M^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} = \begin{cases} \frac{-1}{\alpha+1}, & \text{si } \alpha < -1 \\ +\infty, & \text{si } \alpha > -1 \end{cases}$$

Los cálculos cuando $\alpha = -1$ son más simples. Concretamente,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\epsilon\to 0^+} [\ln x]_{x=\epsilon}^{x=1} = -\lim_{\epsilon\to 0^+} \ln\epsilon = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{M\to+\infty} [\ln x]_{x=1}^{x=M} = \lim_{M\to+\infty} \ln M = +\infty.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^\alpha \,\mathrm{d}x \text{ siempre es divergente}}$$

Criterios de comparación

Si las funciones $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathrm{R}$ *son continuas y* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *cuando* $x \longrightarrow +\infty$, *entonces*:

- $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{dx}$ *convergente* $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$ *convergente,*
- $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$ *divergente* $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$ *divergente.*

- *Idem si* $f, g : (-\infty, b] \longrightarrow \mathrm{R}$ *son continuas y* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *cuando* $x \longrightarrow -\infty$.
- *Idem si* $f, g : (a, b] \longrightarrow \mathrm{R}$ *son continuas y* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *cuando* $x \longrightarrow a^{+}$.
- *Idem si* $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathrm{R}$ *son continuas y* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *cuando* $x \longrightarrow b^{-}$.

Criterios del cociente

Sean $f, g : [a, +\infty) \to \mathrm{R}$ funciones continuas, positivas cuando $x \longrightarrow +\infty$

existe $L = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

- Si $L = 0$, entonces: $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{dx}$ convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$ convergente
- Si $L = +\infty$, entonces: $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{dx}$ divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$ divergente
- Si $0 < L < +\infty$, entonces: $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{dx}$ convergente $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$ convergente

- *Ídem si* $f, g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *son continuas, positivas cuando* $x \to -\infty$ *y* $\exists L = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- *Ídem si* $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *son continuas, positivas cuando* $x \to a^+$ *y* $\exists L = \lim_{x \to a^+} f(x)/g(x)$.
- *Ídem si* $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *son continuas, positivas cuando* $x \to b^-$ *y* $\exists L = \lim_{x \to b^-} f(x)/g(x)$.

Integrales absolutamente convergentes

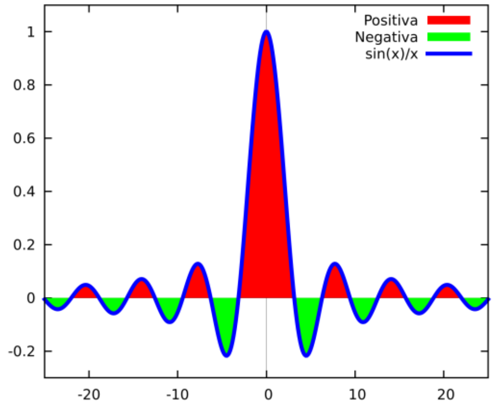
Una integral impropia de una función *f(x)* es *absolutamente convergente* si la correspondiente integral impropia de la funcion positiva |*f(x)*| es convergente.

Teorema. *Toda integral impropia absolutamente convergente es convergente.*

Observacion. El recíproco en general no es cierto.

Ejemplo: la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ es convergente

pero no absolutamente convergente.



Integral de Dirichlet