Tema 1

Funciones
Límites
Continuidad

Transparencias de Carmen Hernando siguiendo los apuntes de la asignatura de Cálculo I.

Funciones: Imagen, Dominio y Recorrido

Sea $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de una variable real. Entonces:

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : f$ está definida en $x\}$ es el *dominio* de f.
- $y = f(x)$ es la *imagen* de un punto $x \in D_f$ por f.
- $R_f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D_f$ tal que $y = f(x)\}$ es el *rango* o *recorrido* de f.
- $f(X) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X$ tal que $y = f(x)\}$ es la *imagen* de un conjunto $X \subset D_f$ por f.
- $f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Y\}$ es la *anti-imagen* de un conjunto $Y \subset R_f$ por f.

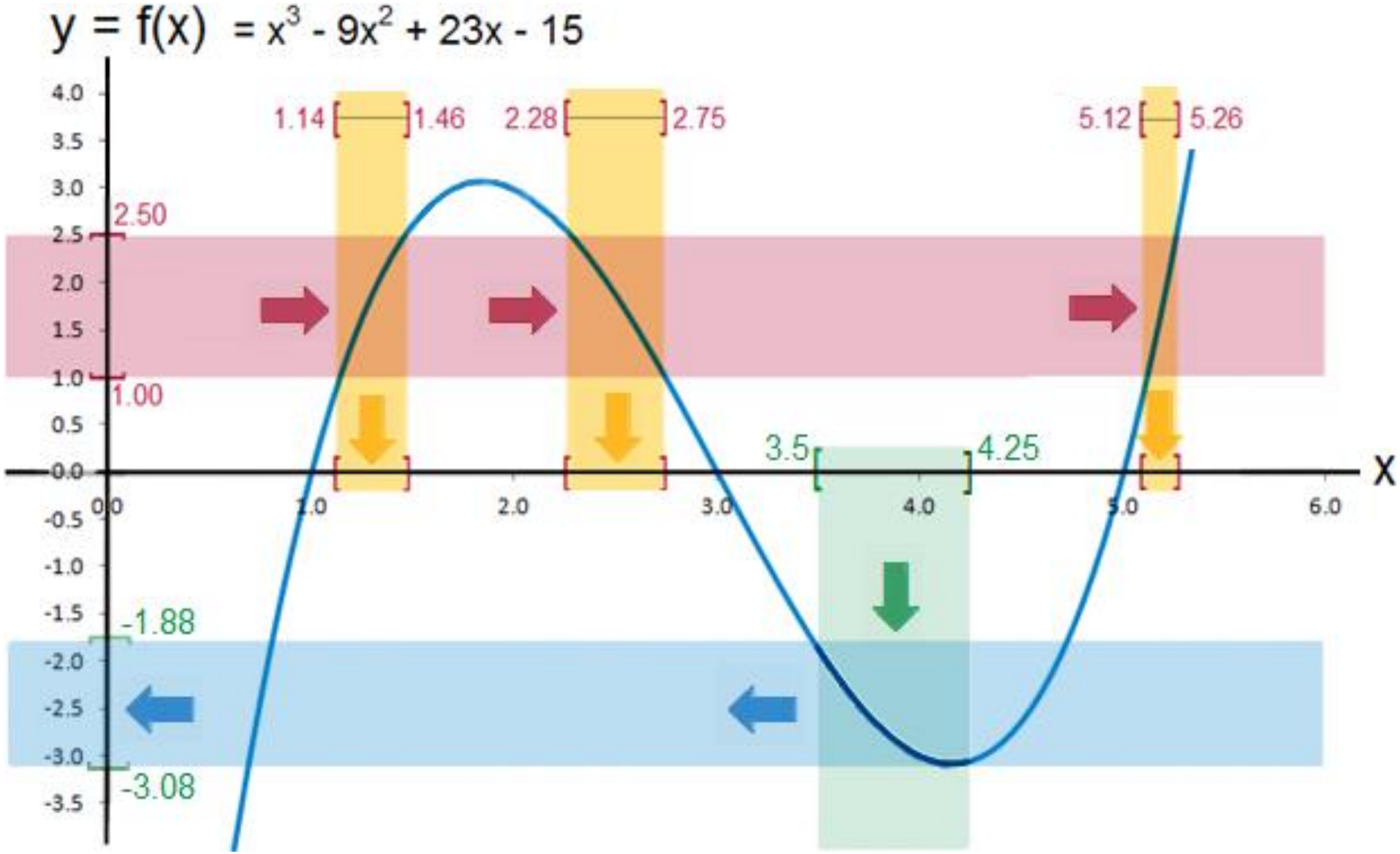


Imagen de $X = [7/2, 17/4]$ y anti-imagen de $Y = [1, 5/2]$ por una función f.

Funciones: Composición

Sean $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones de una variable real.

Entonces, la *composición* $g \circ f : D_{g \circ f} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Es decir, primero se calcula $f(x)$ (imagen de x por f),

y luego $g(f(x))$ (imagen de $f(x)$ por g).

El dominio de la composición es

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathrm{R} : x \in D_f ,\ f(x) \in D_g\}.$$

Observación. La composición no es una operación conmutativa: $g \circ f \neq f \circ g$.

Funciones: Inversa

Sea $f : X \to Y$ una función de una variable real: $X, Y \subset \mathbb{R}$. Diremos que f es:

- *Inyectiva* cuando no existan dos puntos diferentes de X con la misma imagen;
- *Exhaustiva* cuando $f(X) = Y$;
- *Biyectiva* cuando sea inyectiva y exhaustiva simultáneamente.

Si $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva y $Y = f(X)$ es la imagen de X por $f \implies f : X \to Y$ es biyectiva

y existe una única función $f^{-1} : Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denominada *inversa* de f, tal que $\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$

La inversa cumple: $\cdot\ (f^{-1} \circ f)(x) = x$ para toda $x \in X$

$\cdot$ y $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para toda $y \in Y$.

Es decir, en términos de la composición se verifica:

$$f^{-1} \circ f = Id, \qquad f \circ f^{-1} = Id.$$

Funciones elementales simples

Las funciones *elementales simples* són:

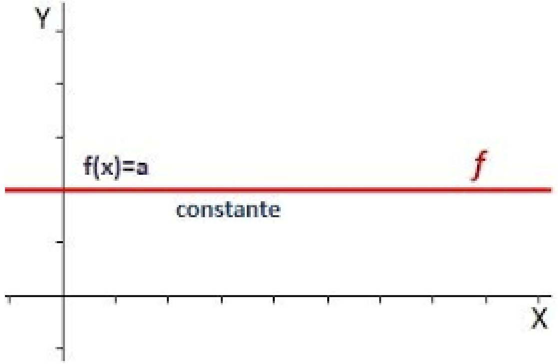
- las **constantes**: $k \in \mathbb{R}$;
- las **potencias**: x^n con $n \in \mathrm{N}$ o x^α con $\alpha \neq 0$ y $x > 0$;
- las **exponenciales**: e^x y a^x ($= \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$) con $a > 0$;
- los **logaritmos**: $\ln x$ y $\log_a x$ con $a > 0$;
- las **trigonométricas**: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

  y sus inversas: $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\arctan x$
- las **hiperbólicas**: $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, $\tanh x$

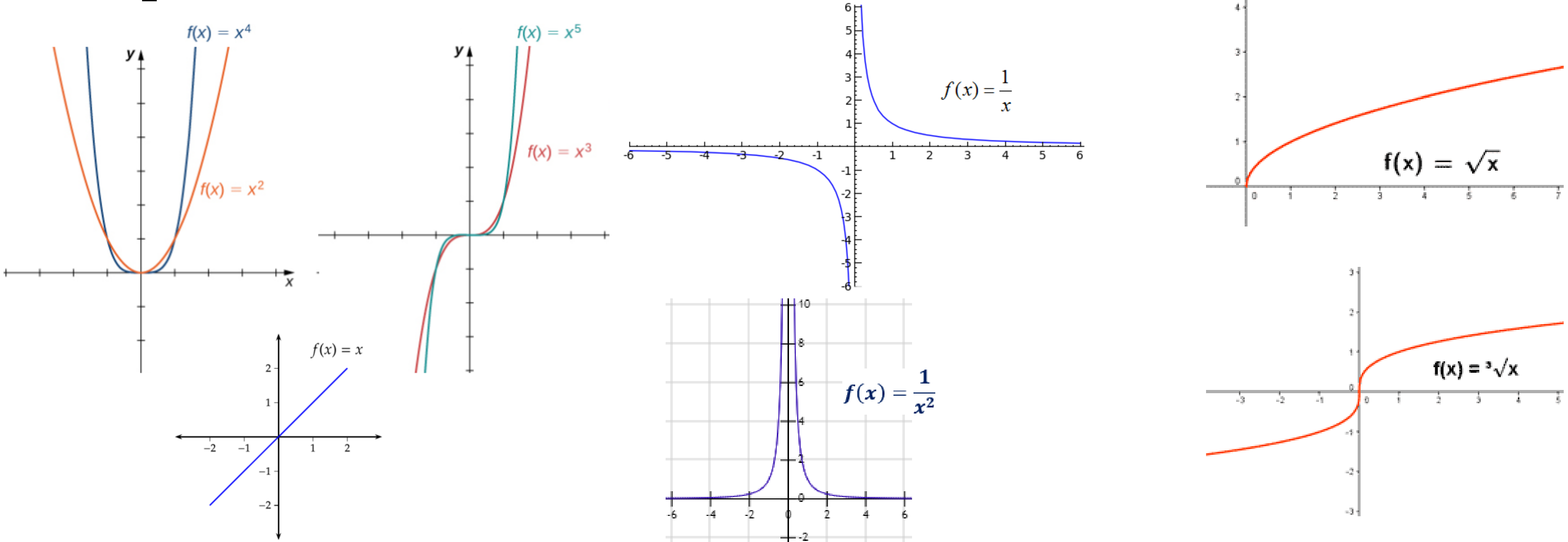
  y sus inversas $\operatorname{argsenh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtanh} x$.

Funciones elementales simples

- las **constantes**:

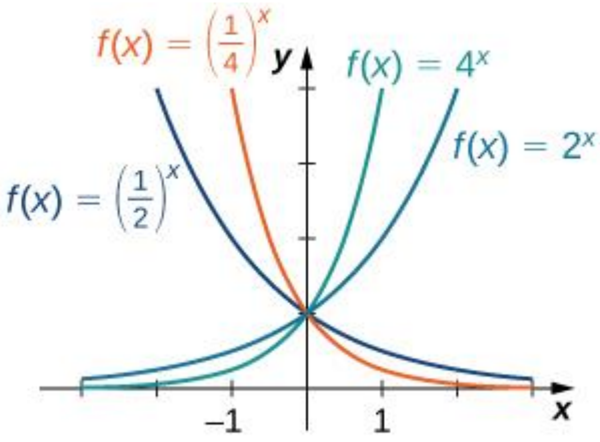


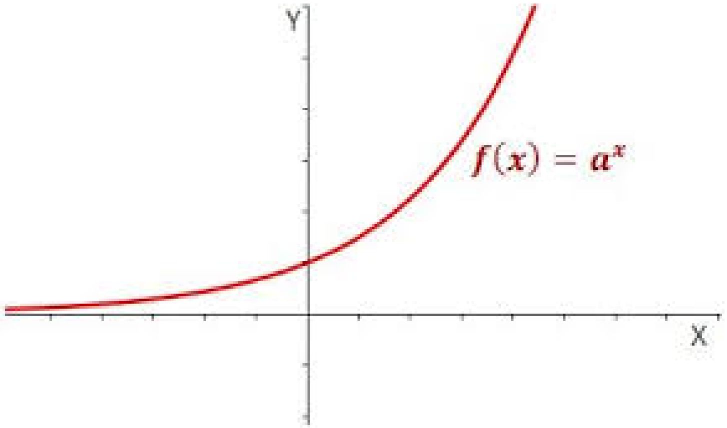
- las **potencias**:

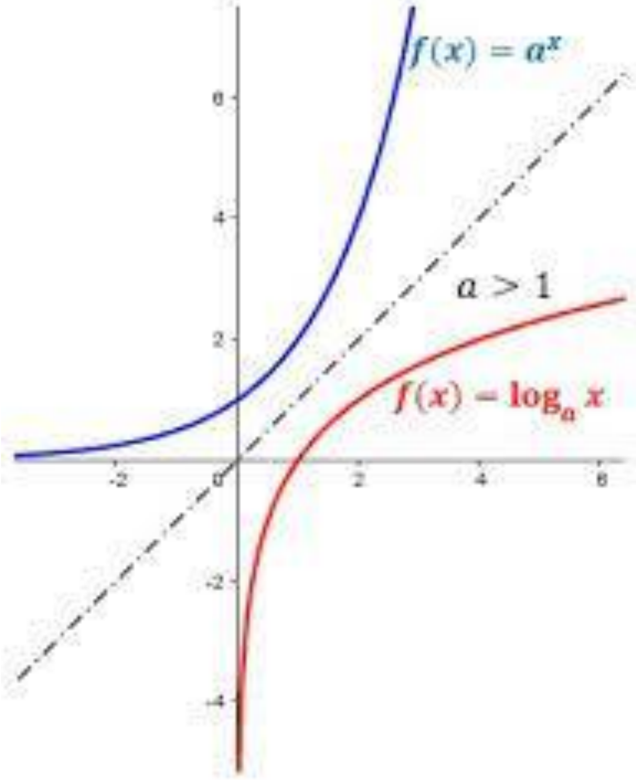


Funciones elementales simples

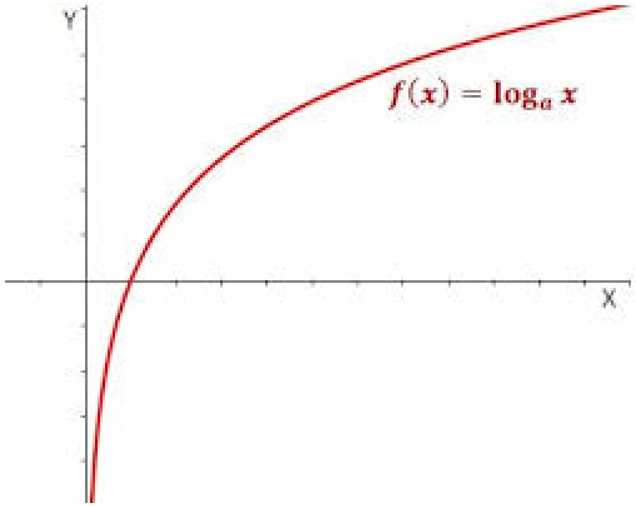
- las **exponenciales**:





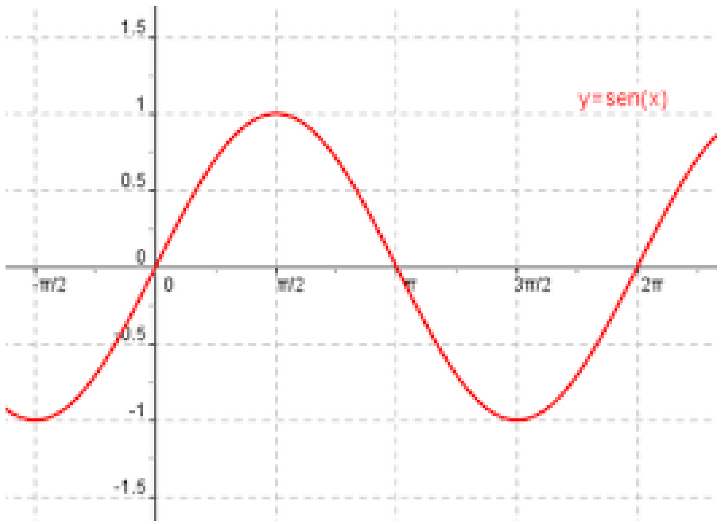


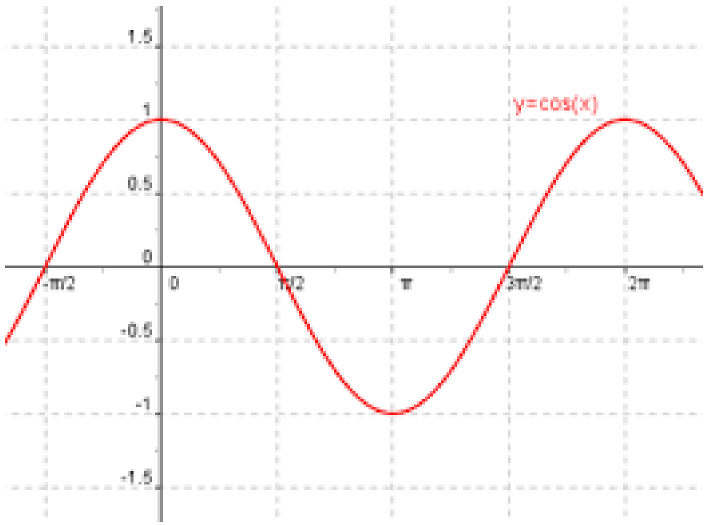
- los **logaritmos**:

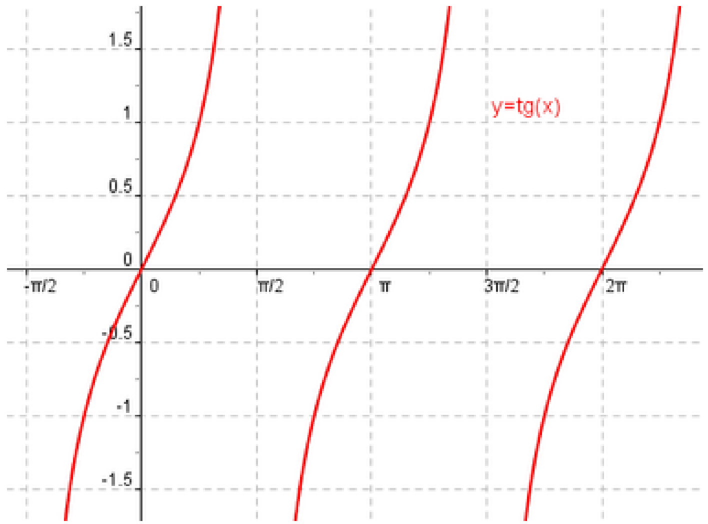


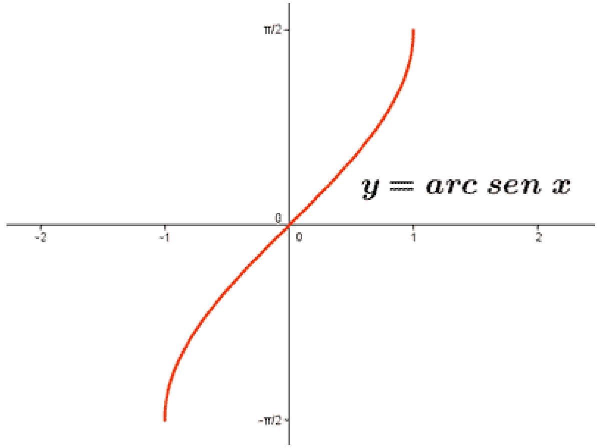
Funciones elementales simples

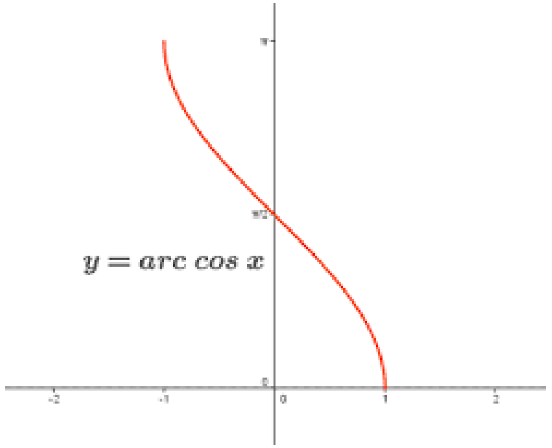
- las **trigonométricas**:

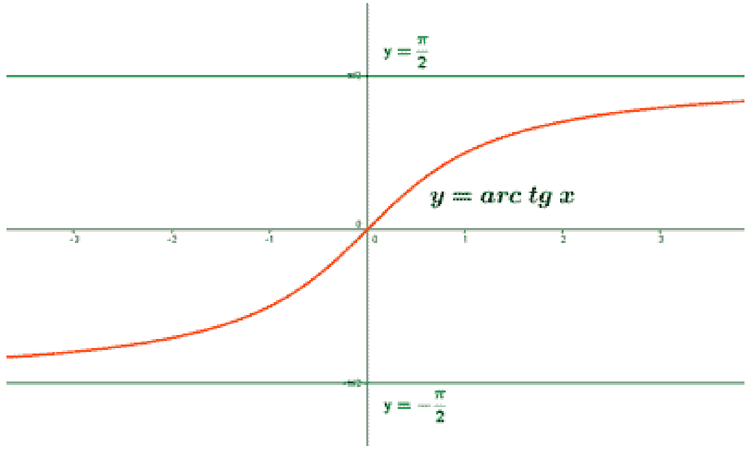










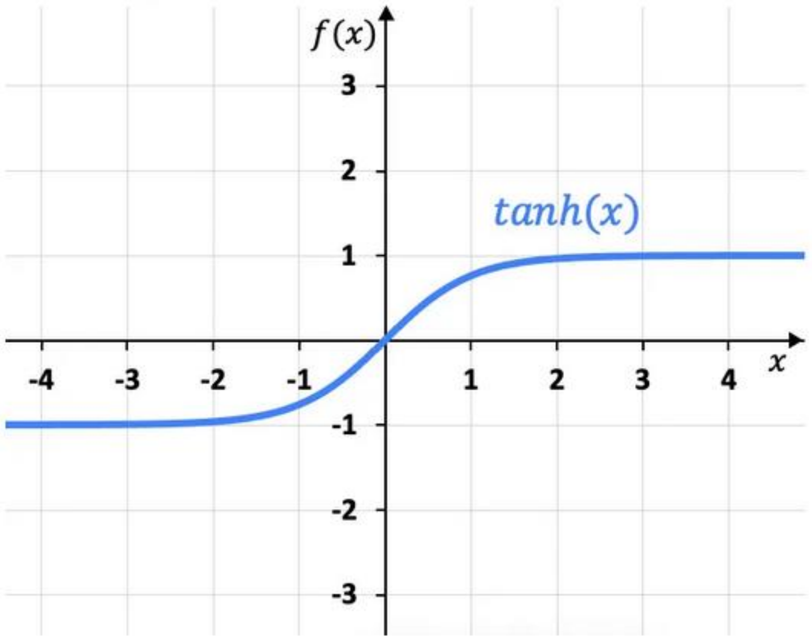


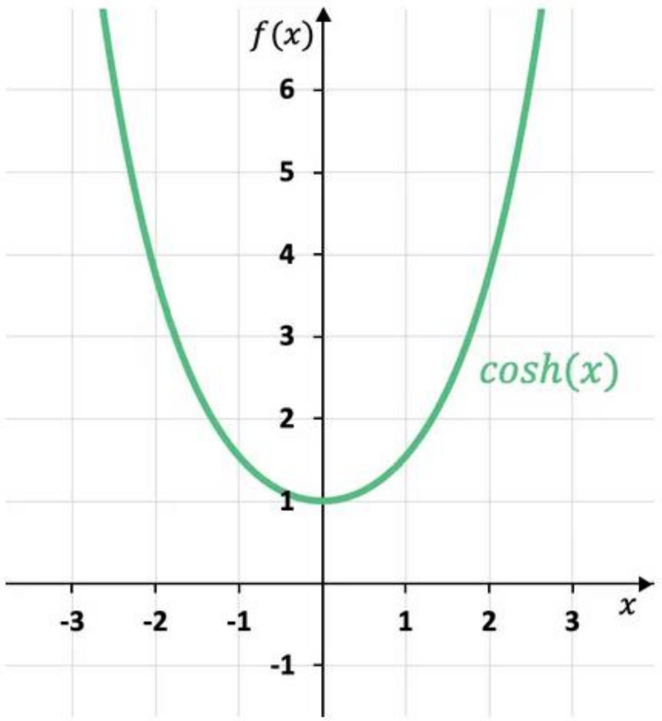
Funciones elementales simples

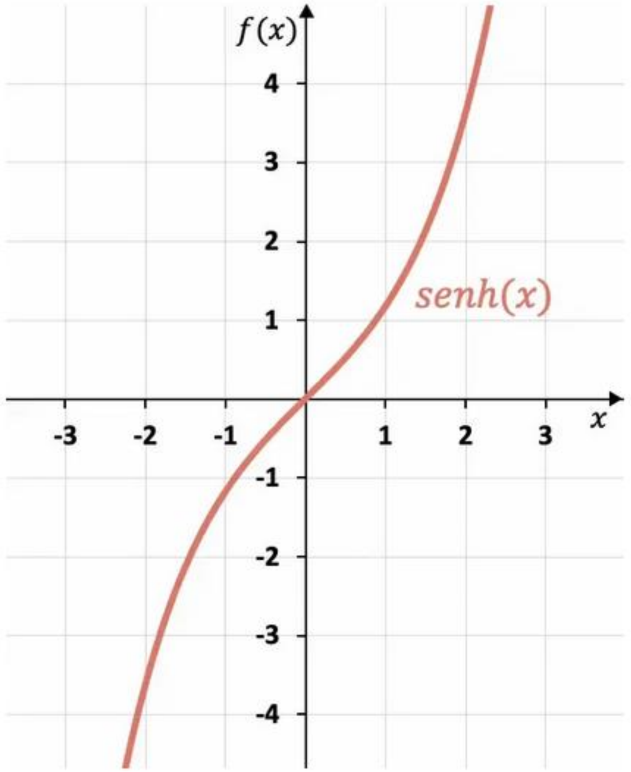
- las **hiperbólicas**:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$







$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Funciones elementales

Las *funciones elementales* son las combinaciones finitas de funciones elementales simples mediante sumas, restas, productos, cocientes y composiciones.

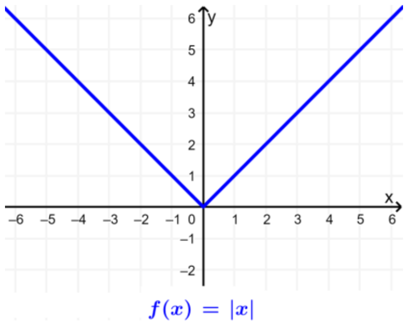
Ejemplos:

- los polinomios
- Las funciones $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cotan} x = \dfrac{1}{\tan x}$
- $f(x) = x^x$
- $f(x) = \exp\left(\sqrt{1+\cos x} + \frac{\sinh x}{\ln x}\right) \cdot (x^2 + x + 1)^{x-1} - \cosh\left[\arctan\left(\frac{1+2^x}{1+3^x}\right)\right]$

Funciones NO elementales

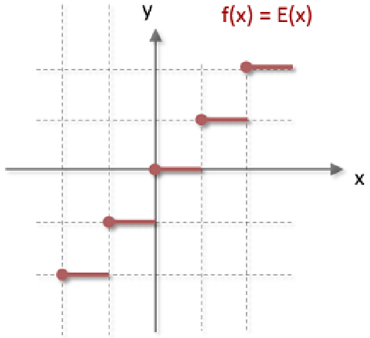
Ejemplos:

- La función valor absoluto $$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



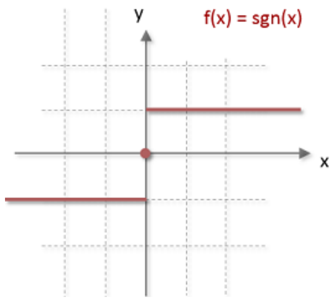
- La función error $$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

- La función de Dirichlet $$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$



- La función parte entera $$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

- La función signo $$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

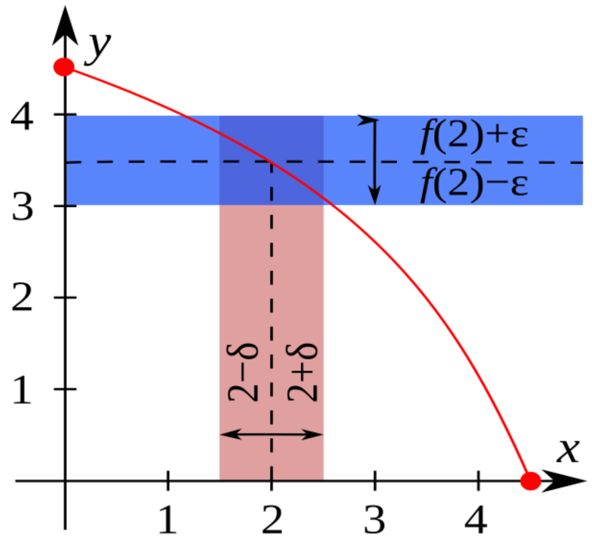


Límites: Definiciones

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow [\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } \ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

"*L* es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c si y sólo si
$f(x)$ está cerca de L cuando x está cerca (pero no es igual) de c"

Ejemplo:



$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3.5$$

Límites: possibles situaciones

Hay 15 situaciones posibles:

$$\lim_{x \to \star} f(x) = \circledast$$

$$\star = \begin{cases} c \in \mathbb{R} \\ c^+ \\ c^- \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \qquad \circledast = \begin{cases} L \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Límites: todos los casos

Las cinco formas en que podemos mover x :

Límite	Normal	Lateral izquierdo	Lateral derecho	A menos infinito	A más infinito
Símbolo	$\lim_{x\to c} f(x) = \circledast$	$\lim_{x\to c^-} f(x) = \circledast$	$\lim_{x\to c^+} f(x) = \circledast$	$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \circledast$	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \circledast$
f definida en	$c \in (a, b)$	(a, c)	(c, b)	$(-\infty, b)$	(a, ∞)
la "distancia"	$\lvert x - c \rvert < \delta$	$c - \delta < x < c$	$c < x < c + \delta$	$x < -N$	$x > N$

Los tres posibles "valores" que puede tomar el límite:

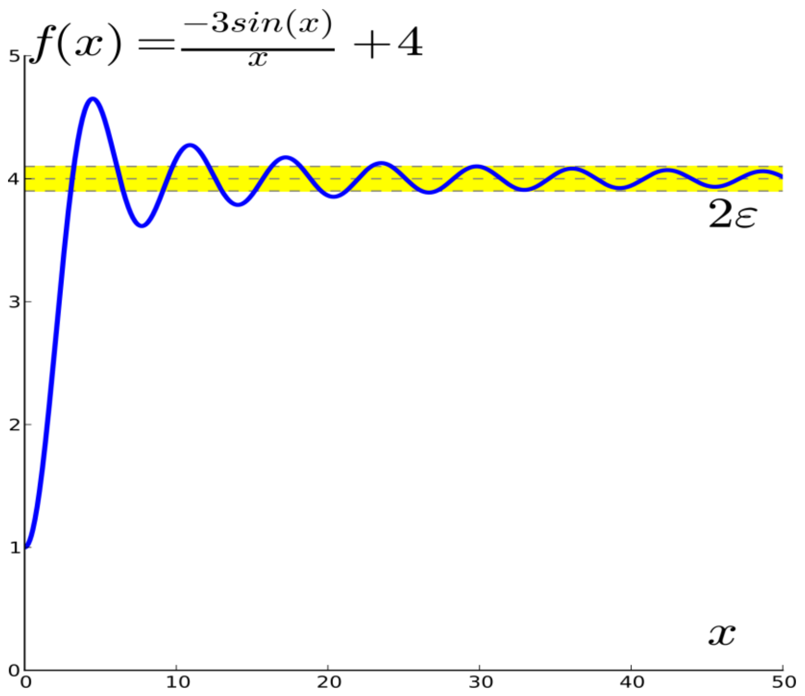
Valor del límite	Finito	Menos infinito	Más infinito
Símbolo	$\lim_{x\to\star} f(x) = L \in \mathbb{R}$	$\lim_{x\to\star} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to\star} f(x) = +\infty$
el "error"	$\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	$f(x) < -M$	$f(x) > M$

Si no se toma ninguno de estos valores, decimos que el límite no existe

Límites: ejemplo

Otro ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff [\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$$

Límites, límites laterales, asíntotas

Observaciones:

- El cálculo de un límite de la forma $x \to c$ se puede reducir al cálculo de los dos límites laterales $x \to c^{\pm}$, pues

$$\lim_{x\to c} f(x) = * \Leftrightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) = * = \lim_{x\to c^+} f(x).$$

Si alguno de los dos límites laterales $x \to c^{\pm}$ no existe o ambos límites laterales existen pero no coinciden, entonces el límite $x \to c$ no existe.

- f tiene una *asíntota vertical* en $x = c$ cuando ambos límites laterales $\lim_{x\to c^{\pm}} f(x)$ toman un valor infinito, sin importar ni el signo del infinito ni que coincidan ambos límites laterales.
- Y diremos que f tiene una *asíntota vertical por la derecha* (respectivamente, *por la izquierda*) en $x = c$ cuando el límite lateral por la derecha (respectivamente, por la izquierda) toma un valor infinito.

Límites finitos y operaciones

Si $\lim\limits_{x \to \star} f(x) = \mathrm{F}$ y $\lim\limits_{x \to \star} g(x) = \mathrm{G}$, entonces:

- $\lim\limits_{x \to \star} (k \cdot f(x)) = k \cdot \mathrm{F}$,
- $\lim\limits_{x \to \star} (f(x) \pm g(x)) = \mathrm{F} \pm \mathrm{G}$,
- $\lim\limits_{x \to \star} (f(x) \cdot g(x)) = \mathrm{F} \cdot \mathrm{G}$,
- $\lim\limits_{x \to \star} (f(x))^{\mathrm{n}} = \mathrm{F}^{\mathrm{n}}$

Si además $\lim f(x) = \mathrm{F} \neq 0$, entonces:

- $\lim\limits_{x \to \star} (g(x) / f(x)) = \mathrm{G/F}$,
- $\lim\limits_{x \to \star} (f(x))^{g(x)} = \mathrm{F}^{\mathrm{G}}$

Límites y operaciones

Las siguientes situaciones también están *determinadas* :

$$L \pm \infty = \pm\infty, \qquad \frac{L}{\infty} = 0, \qquad \frac{L}{0} = \infty \ \text{ si } L \neq 0, \qquad L \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } L > 0 \\ \mp\infty, & \text{si } L < 0 \end{cases}$$

$$\infty^{L} = \begin{cases} \infty, & \text{si } L > 0 \\ 0, & \text{si } L < 0 \end{cases}, \qquad 0^{L} = \infty^{-L} = \begin{cases} 0, & \text{si } L > 0 \\ \infty, & \text{si } L < 0 \end{cases}, \qquad \begin{matrix} \log(+\infty) = +\infty, \\ \log(0^{+}) = -\infty, \end{matrix}$$

$$L^{+\infty} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < L < 1 \\ +\infty, & \text{si } L > 1 \end{cases}, \qquad L^{-\infty} = \frac{1}{L^{+\infty}} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } 0 < L < 1 \\ 0, & \text{si } L > 1 \end{cases}, \qquad 0^{+\infty} = 0$$

Límites: indeterminaciones

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0\cdot\infty \qquad +\infty-\infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0}$$

Todas ellas son equivalentes.

Veamos dos formas de resolver indeterminaciones del tipo 0/0:

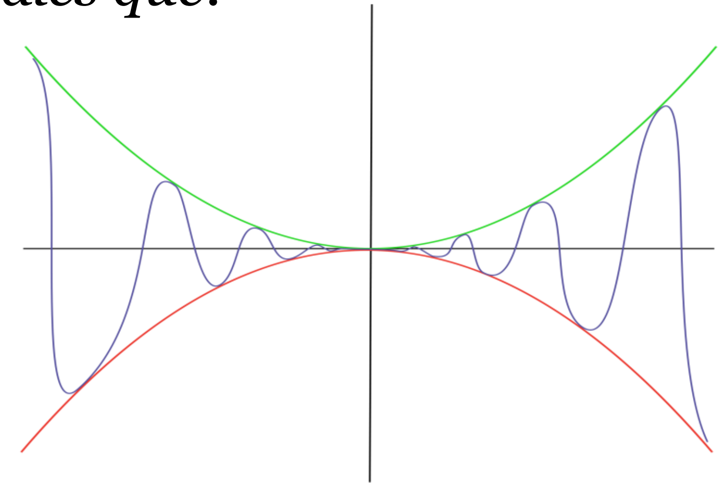
- *Cancelación:* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$
- *Racionalización:* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$

Límites: Teorema del bocadillo

Si tenemos tres funciones definidas en un entorno de un punto c tales que:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \approx c$ *(excepto, quizá, en* $x = c$*)*
- $\exists L = \lim_{x\to c} h(x) = \lim_{x\to c} g(x)$,

entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.



Si dos funciones verifican:

- $h(x) \leq f(x)$ *cuando* $x \approx c$,
- $\lim_{x\to c} h(x) = +\infty$,

entonces $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$.

Si dos funciones verifican:

- $f(x)$ *es una función acotada,*
- $g(x)$ *es una función que tiende a cero,*

entonces $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = 0$,

Límites destacados

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x$$

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x} \iff 1 \geq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \exp\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right] = \mathrm{e}$$

Continuidad: Definiciones

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función definida en un entorno de un punto $c \in$ R; entonces:

$$\boxed{f \text{ es } \textit{continua en } c \iff \exists \lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

- $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es *continua en* $(a, b) \iff f$ es continua en c, $\forall c \in (a, b)$
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *continua en* $[a, b] \iff \begin{cases} f \text{ es continua en } (a, b), \\ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \\ \exists \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$
- $f : [c, b) \to \mathbb{R}$ es *continua en c por la derecha* $\iff \exists \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$
- $f : (a, c] \to \mathbb{R}$ es *continua en c por la izquierda* $\iff \exists \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

Continuidad: operaciones

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } g \text{ es una función continua en } L \\ y \lim_{x\to c} f(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = g(L)$$

- f y g son continuas en c y $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot f, f \pm g, f \cdot g$ y f/g si $g(c) \neq 0$ son continuas en c
- $\left.\begin{array}{r} f \text{ es continua en } c \\ g \text{ es continua en } f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ es continua en c
- $\left.\begin{array}{r} f \text{ es continua en } c \\ f \text{ es invertible en un entorno de } c \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}$ es continua en $f(c)$

Las funciones elementales simples son continuas $\Rightarrow$ Todas las funciones elementales son simples

Discontinuidades

Si una función f definida en un entorno de un punto $c \in \mathbb{R}$ no es continua en c, entonces la discontinuidad es:

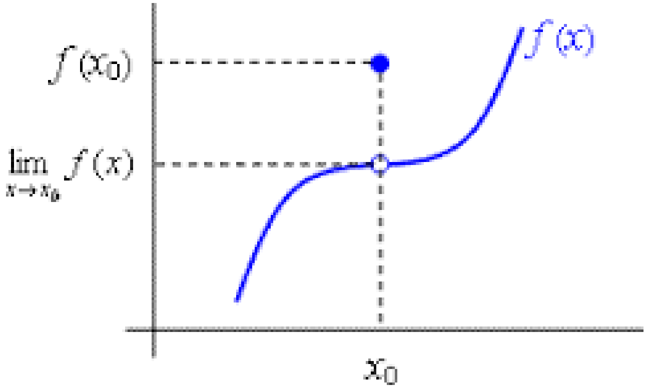
Evitable cuando $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, pero su valor no coincide con $f(c)$.

En tal caso, podemos conseguir que f sea continua en c simplemente redefiniendo

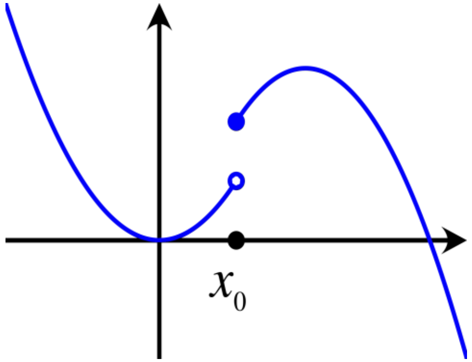
$$f(c) := \lim_{x\to c} f(x).$$

De salto cuando ambos límites laterales $\lim_{x\to c^{\pm}} f(x)$ existen, pero sus valores no coinciden

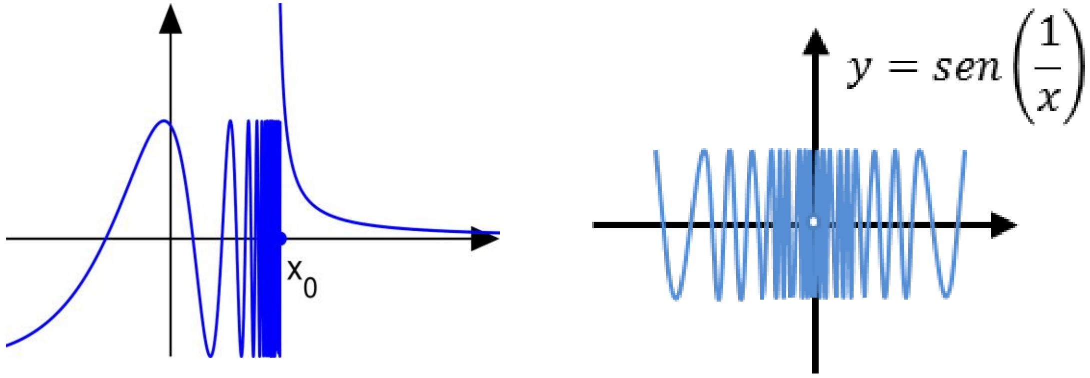
De segunda especie cuando alguno de los límites laterales es $\pm\infty$ o no existe.



discontinuidad evitable



discontinuidad de salto



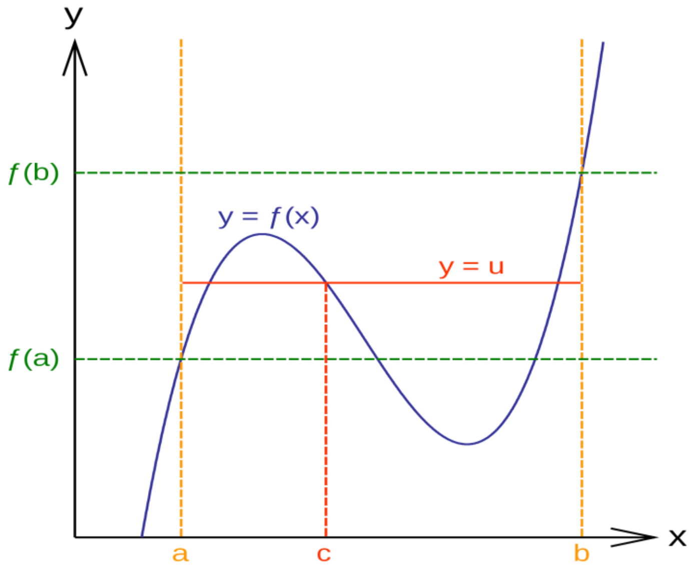
discontinuidad de segunda especie

Resultados sobre continuidad

Teorema (Valor intermedio)**.**

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

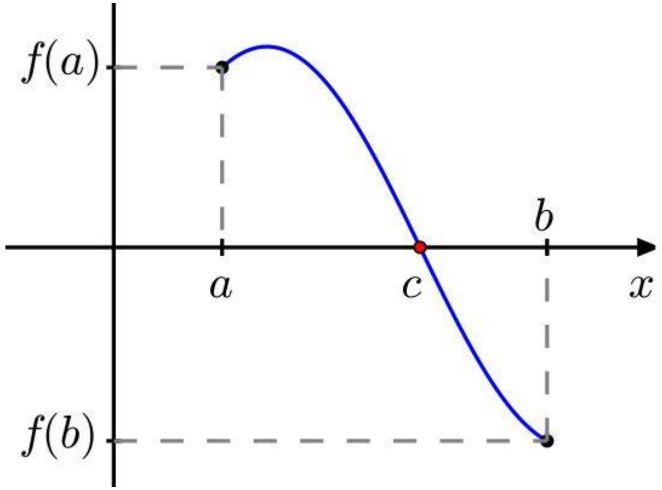
$$f \text{ continua en } [a, b] \text{ y } f(a) \neq f(b) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } f(a) < f(b),\ \forall u \in (f(a), f(b)),\ \exists c \in (a, b):\ f(c) = u \\ \text{Si } f(a) > f(b),\ \forall u \in (f(b), f(a)),\ \exists c \in (a, b):\ f(c) = u \end{cases}$$



Resultados sobre continuidad

Teorema (Bolzano)
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces f tiene al menos un cero en el intervalo abierto (a, b).

$$f \text{ continua en } [a, b] \text{ y } f(a) \cdot f(b) < 0 \Longrightarrow \exists c \in (a, b) \text{ tal que } f(c) = 0$$



Corolario. *Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.*

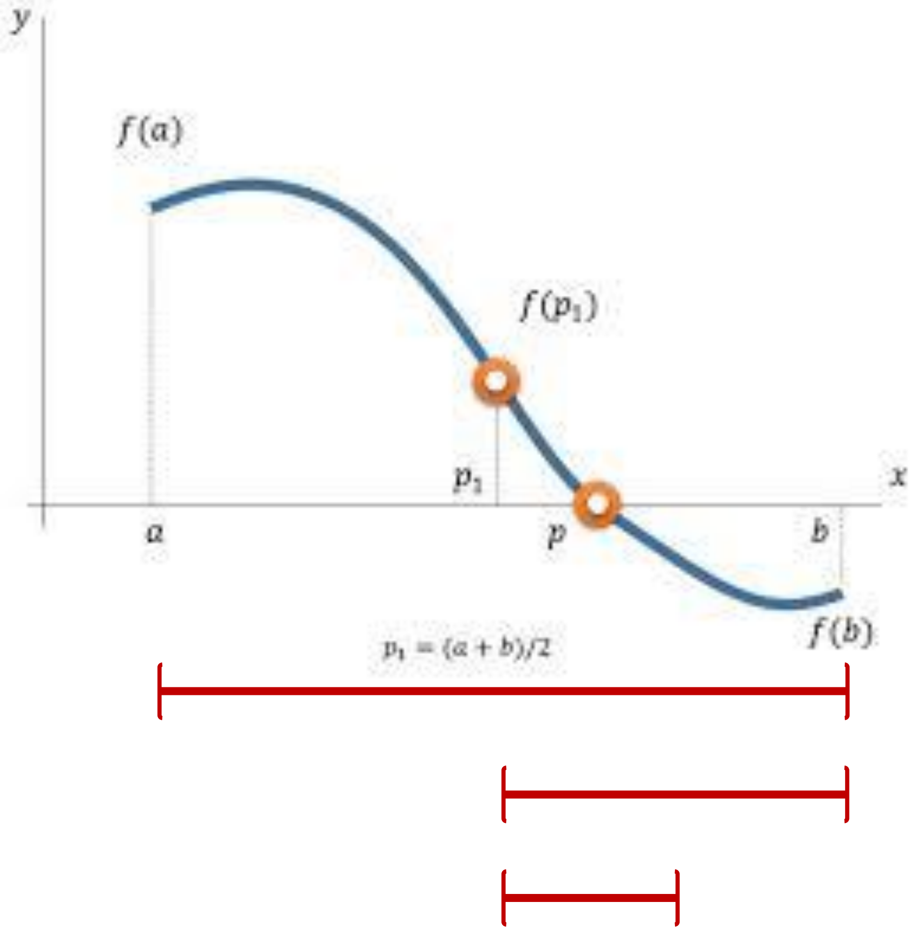
Método de bisección

Queremos obtener aproximaciones de algún cero de f con tanta precisión como deseemos.

Supongamos $f(a)>0$ y $f(b)<0$

Procedemos así:
Consideramos p el punto medio de a y b
Evaluamos f en p. Si $f(p)>0$ nos quedamos con $[p, b]$.
Si $f(p)<0$ nos quedamos con $[a, p]$.
Y así sucesivamente.

$Sea\ f\ continua\ en\ [a,b]\ y\ f(a)\cdot f(b)<0$
$\Rightarrow \exists c \in (a,b)\ tal\ que\ f(c)=0.$



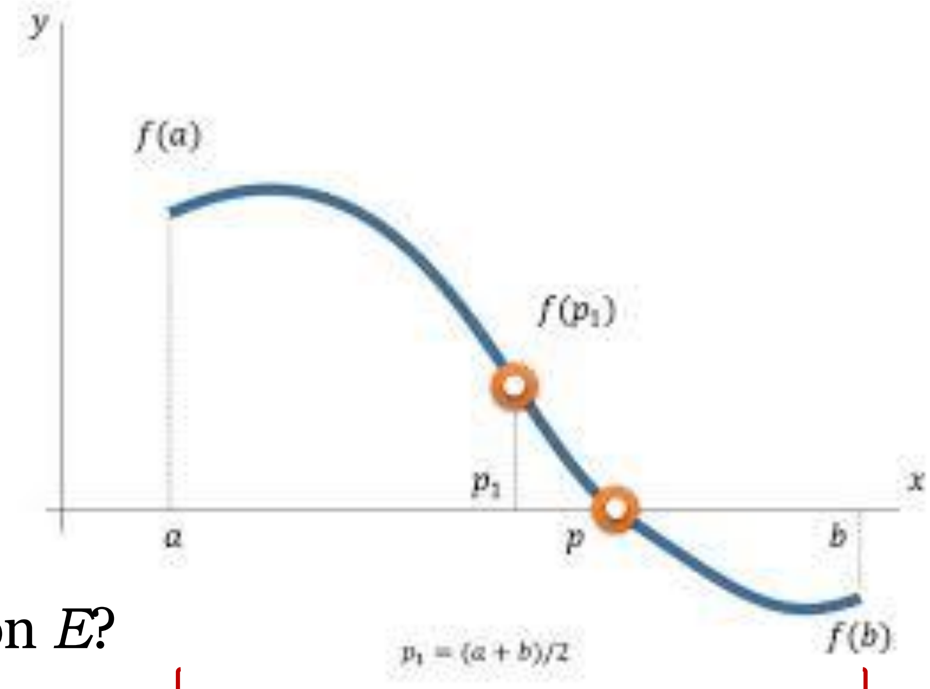
Método de bisección

Queremos obtener aproximaciones de algún cero de f con tanta precisión como deseemos.

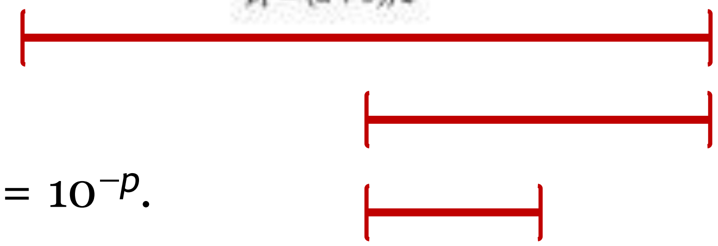
> *Sea f continua en* $[a, b]$ *y* $f(a) \cdot f(b) < 0$
> $\Longrightarrow \exists c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Supongamos $f(a)>0$ y $f(b)<0$

Procedemos así:
Consideramos p el punto medio de a y b
Evaluamos f en p. Si $f(p)>0$ nos quedamos con $[p, b]$.
Si $f(p)<0$ nos quedamos con $[a, p]$.
Y así sucesivamente.



¿Cuántos pasos necesitamos para conseguir una precisión E?



$$\frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{b-a}{\epsilon} \Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln\left((b-a)/\epsilon\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left((b-a)/\epsilon\right)}{\ln 2}$$

Para calcular un cero con p decimales correctos, necesitamos la precisión $E = 10^{-p}$.

Si $[a, b] = [0, 1]$ y $E = 10^{-5} \Longrightarrow n \geq \ln(10^5)/\ln 2 \approx 16.61 \Longrightarrow$ necesitamos 17 pasos.