

BECA DE COLABORACIÓN

Proyecto Estudio geométrico de las ecuaciones diferenciales implícitas

estudiante: Hèctor Castejón Díaz
profesor responsable: Xavier Gràcia Sabaté

1 Antecedentes

En el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, aquellas que pueden expresarse en forma normal han sido estudiadas profusamente, y se dispone de teoremas muy generales que aseguran la existencia y unicidad de soluciones para dichas ecuaciones. Aquellas que no pueden expresarse en forma normal a menudo se denominan *ecuaciones diferenciales implícitas*. En algunos casos la singularidad se concentra en algunos puntos (por ejemplo en ciertas ecuaciones de segundo orden lineales, tema bien conocido desde hace tiempo).

Las ecuaciones diferenciales singulares en todo punto no recibieron mucha atención hasta los trabajos de Bergmann y Dirac a mediados del s XX, cuando se hizo aparente la necesidad de considerar lagrangianas singulares en física teórica. En efecto, cualquier teoría que posea invariancia de *gauge* debe ser necesariamente descrita mediante una lagrangiana singular. El algoritmo de ligaduras de Bergmann y Dirac intenta determinar qué puntos son posibles condiciones iniciales y cuál es la multiplicidad de las soluciones.

En los años 70 del s XX la geometría diferencial dota la mecánica analítica de herramientas que le confieren un mayor alcance y una mejor comprensión (ver por ejemplo Abraham y Marsden, 1978, y Arnol'd, 1989). En particular, el algoritmo de Bergmann y Dirac para sistemas hamiltonianos con ligaduras fue formulado geoméricamente en el trabajo de Gotay, Nester y Hinds (1978), dando lugar al algoritmo de ligaduras presimpléctico.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para una lagrangiana singular tienen un tipo de singularidad específica: las derivadas de orden superior (segundo orden, en el caso habitual de la mecánica) no pueden despejarse porque están afectadas por una matriz no invertible. Generalizando esta idea, Gràcia y Pons (1992) estudiaron los sistemas de ecuaciones linealmente singulares, y propusieron un algoritmo de integrabilidad para dichos sistemas, algoritmo que puede considerarse como una generalización del algoritmo de Gotay *et al.* Dicho trabajo fue extendido posteriormente al caso de sistemas no autónomos (Gràcia y Martín, 2005).

Las ecuaciones diferenciales implícitas, también llamadas ecuaciones diferencio-algebraicas, tienen numerosas aplicaciones a otros ámbitos, singularmente de ingeniería, por lo que su estudio se ha desarrollado también en ámbitos ajenos a la física teórica. Por ejemplo, Rabier y Rheinboldt (1994) y Mendella, Marmo y Tulczyjew (1995) plantearon un algoritmo de integrabilidad para ecuaciones implícitas cualesquiera, si bien en este caso el algoritmo es de más difícil implementación.

Por otra parte, hacia los años 60 del s XX aparecieron los primeros sistemas de computación simbólica y desde entonces han ido ganando prestaciones y usuarios; actualmente algunos de los más populares son Maple y Mathematica. Frente a estos programas comerciales, más recientemente ha aparecido Sage como una alternativa en código abierto.

Aparte de la derivación, las operaciones requeridas en el algoritmo de integrabilidad son esencialmente de álgebra lineal, por lo que el algoritmo puede programarse en un sistema de computación simbólica. Hay que notar, sin embargo, que a menudo las variedades obtenidas a lo largo del algoritmo no son tales, sino que pueden presentar singularidades.

Referencias

- R Abraham and JE Marsden, *Foundations of mechanics*, Addison-Wesley, 1978.
- V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989.

- MJ Gotay, JM Nester and G Hinds; "Presymplectic manifolds and the Dirac-Bergmann theory of constraints", *J. Math. Phys.* **27** (1978) 2388-2399.
- X Gràcia and JM Pons, "A generalized geometric framework for constrained systems", *Diff. Geom. Appl.* **2** (1992) 223-247.
- X Gràcia and R Martín, "Geometric aspects of time-dependent singular differential equations", *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **2** (2005) 597-618.
- G Mendella, G Marmo and WM Tulczyjew, "Integrability of implicit differential equations", *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995) 149-163.
- PJ Rabier and WC Rheinboldt, "A geometric treatment of implicit differential-algebraic equations", *J. Diff. Eq.* **109** (1994) 110-146.

2 Objetivos y plan de trabajo

El objetivo de este trabajo es el estudio de las ecuaciones diferenciales singulares bajo distintos puntos de vista, y la implementación y programación del algoritmo de integrabilidad para su resolución.

Se propone el siguiente plan de trabajo:

- Lectura de referencias relevantes sobre lagrangianas singulares, ecuaciones diferenciales singulares y algoritmos de integrabilidad.
- Búsqueda de bibliografía sobre la materia y manejo de las bases de datos matemáticas MathSciNet y Zentralblatt MATH, así como Science Citation Index.
- Estudio del sistema de computación simbólica SAGE y comparación con otros sistemas análogos.
- Programación del algoritmo de integrabilidad para sistemas linealmente singulares, incluida la aplicación a los sistemas lagrangianos singulares.
- Aplicación del programa a ejemplos concretos.
- Comunicación de los resultados obtenidos en el seno del grupo investigador y grupos afines.
- Eventualmente, publicación de los resultados obtenidos en congresos y revistas especializadas.

3 Prerrequisitos. Idoneidad del estudiante

Para poder desarrollar con éxito el plan de trabajo el alumno debe poseer conocimientos avanzados de geometría diferencial y ecuaciones diferenciales, así como experiencia en el manejo de programas de cálculo.

El estudiante Hèctor Castejón, a lo largo de los cursos que ha realizado de la licenciatura de Matemáticas en la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC, ha cursado las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales I, Geometría Diferencial II, Ampliación de Modelos Matemáticos de la Física y Variedades Diferenciales con buenas calificaciones, por lo que satisface ampliamente los requisitos mencionados.

4 Grupo investigador

El grupo de investigación que acoge al estudiante es el grupo de **Geometría Diferencial, Sistemas Dinámicos y Aplicaciones** (<http://www-ma4.upc.edu/dgdsa>) del Departamento de **Matemática Aplicada IV** de la **Universidad Politécnica de Cataluña**.

El grupo está calificado como *grupo de investigación consolidado* por la AQU-Catalunya (Agència per a la Qualitat del Sistema Universitari a Catalunya) y financiado por la AGAUR (Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca).

Este grupo, junto con otros equipos de investigación españoles, forma parte de la **Red de Geometría, Mecánica y Control** (<http://www.gmcnetwork.org>).